Федеральное агентство по образованию

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Государственный технологический университет
«Московский институт стали и сплавов»
Новотроицкий филиал

А. В. Швалёва
Т. П. Филоненко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Орск 2007

УДК 373.6/.9
ББК 74.5 р
Ш33

Научный редактор

Соколов А. А., *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин СамГУПС (филиал г. Орска), доцент кафедры математики и естествознания Новотроицкого филиала МИСиС*

Рецензенты:

Чурсин В. Б., *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин СамГУПС (филиал г. Орска)*

Ткачева И. М., *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин СамГУПС (филиал г. Орска)*

Ш33 Швалёва, А. В. Аналитическая геометрия : учебно-методическое пособие / А. В. Швалёва, Т. П. Филоненко. – Орск : Издательство ОГТИ, 2007. – 111 с. – ISBN 5-8424-0326-9.

ISBN 5-8424-0326-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время роль математических дисциплин в естествознании, технике, инженерных дисциплинах огромна и высшая математика используется во многих областях организации производства (и в разработке оптимальных планов размещения капиталовложений, планов строительства, производства и перевозок, и при руководстве технологическими процессами и др.). В этой связи к математическому образованию будущего специалиста предъявляются очень высокие требования. Свободное владение основными математическими понятиями, приемами приводит к более глубокому пониманию целого ряда специальных вопросов. При этом математика не излагает какие-либо технические вопросы, а дает будущему специалисту необходимое математическое развитие.

Предлагаемое учебно-методическое пособие (в совокупности с курсом лекций) предназначено для самостоятельной подготовки студентов технических и экономических специальностей заочной формы обучения по курсу аналитической геометрии. Основной целью данного издания является оказание помощи студентам в приобретении и закреплении знаний по курсу аналитической геометрии, в приобретении навыков решения широкого круга задач. Нами подобраны и методически распределены задачи основных разделов аналитической геометрии. Весь представленный материал разбит на блоки, что отражено в оглавлении. Задачи предлагаются в порядке возрастания уровня сложности, что позволяет студентам постепенно приобретать необходимые навыки и опыт решения задач. Задачи снабжены чертежами, подробным описанием решения.

В конце каждой главы приведены задачи для самостоятельного решения с ответами.

В пособии предложена контрольная работа по курсу аналитической геометрии (в десяти вариантах). Представлен нулевой вариант контрольной работы с подробным описанием решения каждой из предлагаемых задач, что позволяет сделать процесс выполнения контрольной работы менее трудоёмким.

Учебно-методическое пособие может быть использовано как для работы под руководством преподавателя, так и при самостоятельном изучении курса аналитической геометрии.

ГЛАВА 1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Разложение векторов в линейную комбинацию через базисные векторы. Координаты вектора

Прежде чем приступить к решению задач данного параграфа, обратитесь к материалам параграфов 1.1, 1.2, 1.4, 1.6 курса лекций по аналитической геометрии.

Задача 1.1.1. Дан треугольник ABC, BK – медиана. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}$ по базису, состоящему из векторов B=$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$. Укажите координаты векторов $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK}$ в данном базисе (рис. 1.1.1).

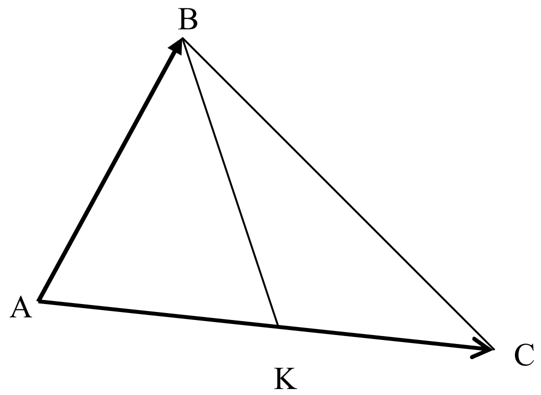

Рис. 1.1.1

Решение. 1) Вектор $\overrightarrow{BC}$ можно представить как сумму векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.$$

Учитывая, что $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, вектор $\overrightarrow{BC}$ примет вид:

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Таким образом, вектор $\overrightarrow{BC}$ в данном базисе имеет координаты $\overrightarrow{BC}$ (-1; 1).

2) Вектор $\overrightarrow{BK}$ можно представить в виде суммы векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AK}$:

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}.$$

Вектор $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$, так как точка K – середина отрезка AC и направления векторов $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AC}$ совпадают. В результате

$$\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC},$$

координаты $\overrightarrow{BK}$ (-1; $\frac{1}{2}$).

Задача 1.1.2. Дан треугольник ABC, в котором проведены медианы AK и BM, точка O – точка пересечения этих медиан. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM}$ по базису, состоящему из векторов B=$\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right\}$ (рис. 1.1.2).

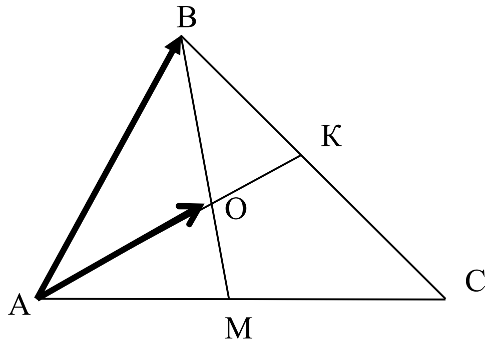

Рис. 1.1.2

Решение. 1) Так как AK – медиана треугольника ABC, точка K – середина отрезка BC. Поэтому можно утверждать, что вектор $\overrightarrow{BC}$= 2 $\overrightarrow{BK}$. Вектор $\overrightarrow{BK}$ можно представить через линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AK}$ следующим образом:

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK}.$$

Вектор $\overrightarrow{AK}$ не является базисным вектором, а поэтому необходимо его разложить через базисные векторы. Из школьного курса геометрии известно, что медианы в треугольнике пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Таким образом, AO:OK = 2:1, на весь отрезок AK приходится 3 части, а отрезок AO составляет от него $\frac{2}{3}$ части. В этой связи можно утверждать следующее:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AO},$$

а вектор $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AO}$.

.

Так как вектор $\overrightarrow{BC} = 2\cdot\overrightarrow{BK} = 2\cdot(-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AO})$, то координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ (-2; 3).

2) Вектор $\overrightarrow{AC}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Вектор $\overrightarrow{AB}$ является базисным, а для вектора $\overrightarrow{BC}$ можно воспользоваться разложением его через базисные векторы, полученным в первой части задачи:

$$\overrightarrow{BC} = -2\cdot\overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{AO}.$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-2\cdot\overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{AO}) = -\overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{AO},$$

а координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ (-1; 3).

3) Вектор $\overrightarrow{BM}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}.$$

Вектор $\overrightarrow{AM}$ составляет половину вектора $\overrightarrow{AC}$, так как точка М – середина отрезка АС, а разложение вектора $\overrightarrow{AC}$ через базисные векторы было получено во второй части задачи, воспользуемся им.
$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot(-\overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{AO}) = -\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AO}$.

Координатами вектора $\overrightarrow{BM}$ являются значения (-$\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}$).

Задача 1.1.3. Дан треугольник АВС, МР – средняя линия треугольника, параллельная основанию АС, ВК – медиана треугольника. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{PC}$ через базисные векторы В = $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ (рис. 1.1.3) .

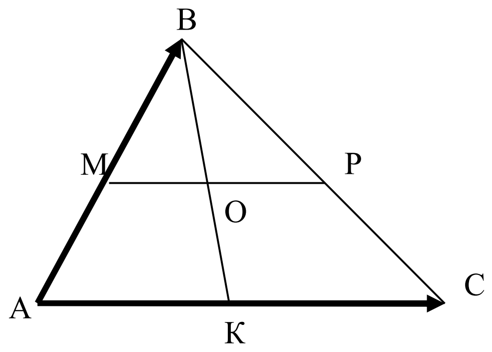

Рис. 1.1.3

Решение. 1) Вектор $\overrightarrow{OP}$ составляет половину от вектора $\overrightarrow{MP}$, то есть $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{MP}$. Вектор $\overrightarrow{MP}$, в свою очередь, равен половине вектора $\overrightarrow{AC}$, так как отрезок MP – средняя линия треугольника, которая по длине в два раза короче основания. Таким образом,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

2) Представим вектор $\overrightarrow{BK}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AK}$:

$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$$

(вектор $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$, так как точка К – середина отрезка АС).

3) Вектор $\overrightarrow{PC}$ составляет половину вектора $\overrightarrow{BC}$, так как MP – средняя линия треугольника и точки P и M являются серединами соответственно сторон BC и AB. $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$, вектор $\overrightarrow{BC}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Тогда линейная комбинация базисных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ для вектора $\overrightarrow{PC}$ примет вид:

$$\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2} \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Задача 1.1.4. Дан треугольник MPK, в котором на стороне MP взята точка A таким образом, что MA:AP как 3:1. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KP}$ в базисе из векторов B = $\{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MK}\}$ (рис. 1.1.4).

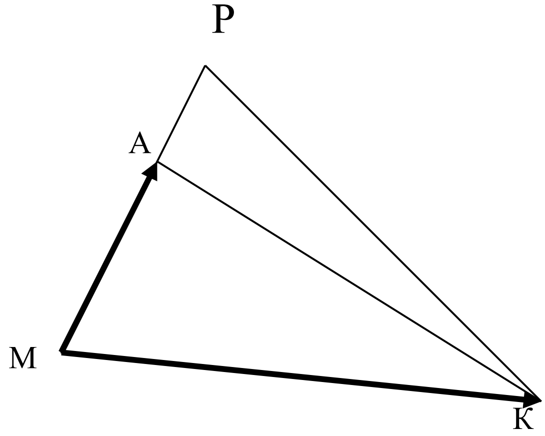

Рис. 1.1.4

Решение. 1) Вектор $\overrightarrow{KA}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{MA}$:

$$\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MA}.$$

Вектор $\overrightarrow{MA}$ является базисным вектором, а вектор $\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{MK}$. В результате

$$\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MK}.$$

2) Вектор $\overrightarrow{KP}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{MA}$:

$$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MP}.$$

Вектор $\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{MK}$, а вектор $\overrightarrow{MP}$ составляет $\frac{4}{3}$ от вектора $\overrightarrow{MA}$, то есть $\overrightarrow{MP} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{MA}$. Таким образом,

$$\overrightarrow{KP} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MK}.$$

Задача 1.1.5. Дана треугольная пирамида KABC (вершиной является точка K). Точка M – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найдите разложения векторов $\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KB}$ в базисе, состоящем из векторов B=$\{\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\}$. Укажите координаты векторов $\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{KB}$ в данном базисе (рис. 1.1.5).

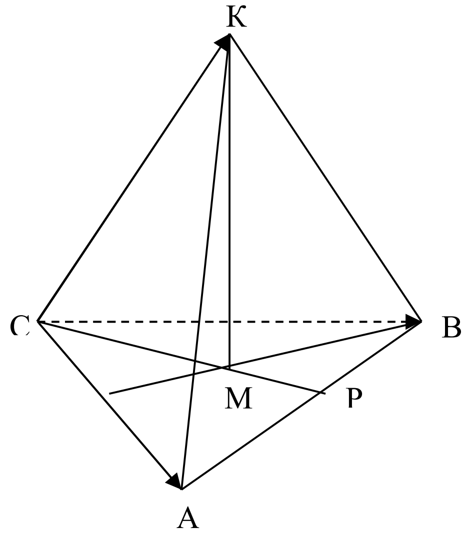

Рис. 1.1.5

Решение. 1) Вектор $\overrightarrow{KM}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{KC}$ и $\overrightarrow{CM}$:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CM}.$$

Вектор $\overrightarrow{CK}$ является базисным вектором, а вектор $\overrightarrow{CM}$ можно представить через вектор $\overrightarrow{CP}$. Точка М – точка пересечения медиан, а, как известно из школьного курса геометрии, медианы в треугольнике пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Таким образом, на отрезок СМ приходится две части, на отрезок МР – одна часть, а весь отрезок СР составляет три части. В результате $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CP}$. Однако вектор $\overrightarrow{CP}$ также не является базисным, но его можно представить в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ следующим образом:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CP} =$$

$$\frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP}) = \frac{2}{3} \cdot (\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}) =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CB} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA} =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA}.$$

Разложив вектор $\overrightarrow{CM}$ через базисные векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$, можно найти разложение вектора $\overrightarrow{KM}$ через базисные векторы:

$$\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CK} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CA}.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{KM}$ $(-1;\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

2) Вектор $\overrightarrow{KB}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{KC}$ и $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CB}.$$

Оба вектора $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{CB}$, участвующие в разложении, являются базисными, третий базисный вектор $\overrightarrow{CA}$ в разложении вектора $\overrightarrow{KB}$ отсутствует. Это можно представить следующим образом:

$$\overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{CK} + 0\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Координатами вектора $\overrightarrow{KB}$ будут являться числа $\overrightarrow{KB}(-1;0;1)$.

1.2. Длина вектора. Скалярное произведение векторов

Для успешного решения задач данного параграфа Вам необходимо обратиться к курсу лекций и рассмотреть вопросы параграфа 1.9.

Задача 1.2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ *и его длину, если известны координаты точек A(-1;3;0) и B(2;4;7).*

Решение. 1) Для отыскания координат вектора $\overrightarrow{AB}$ необходимо помнить следующее: если точки A и B имеют координаты A $(x_1;y_1;z_1)$, а точка B $(x_2;y_2;z_2)$, вектор $\overrightarrow{AB}$ будет иметь координаты:

$$\overrightarrow{AB}\ (x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

В нашем случае вектор $\overrightarrow{AB}$ будет иметь координаты: $\overrightarrow{AB}(2-(-1); 4-3;7-0)$ и в конечном результате $\overrightarrow{AB}(3;1;7)$.

2) Для того, чтобы отыскать длину вектора, необходимо знать координаты вектора в ортонормированном базисе B=$\{i,j,k\}$. Коорди-

наты вектора $\overrightarrow{AB}$ известны из первой части задачи. Длина вектора обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ и находится по формуле:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$, где $(x;y;z)$ – координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

Таким образом, длина вектора $\overrightarrow{AB}$ будет равна:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 7^2} = \sqrt{9+1+49} = \sqrt{59}.$$

Задача 1.2.2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если длины векторов известны и равны $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{14}$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{21}$, а угол между векторами составляет $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Скалярным произведением двух векторов называется число, определяемое следующим равенством:

$\vec{a}\,\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$, где $\left|\vec{a}\right|$ – длина вектора $\vec{a}$, $\left|\vec{b}\right|$ – длина вектора $\vec{b}$, α – угол между векторами.

Скалярное произведение векторов определится равенством:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{21} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{294} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{588}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{147}}{2} = \sqrt{147}.$$

Задача 1.2.3. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CK}$, если известны координаты точек А(-2;1;4), В(1;2;-3), С(2;-2;6) и К(4;-3;1).

Решение. Согласно формуле, записанной в предыдущей задаче, для того чтобы отыскать скалярное произведение векторов, необходимо знать длины векторов и угол между ними. Зная координаты точек, мы можем отыскать координаты вектора, а следовательно, и длину вектора. Однако угол между векторами α отыскать не удастся. В этой связи воспользуемся ещё одной формулой, позволяющей отыскать скалярное произведение векторов, если известны координаты вектора:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$, где $(a_1;a_2;a_3)$ – координаты вектора $\vec{a}$, $(b_1;b_2;b_3)$ координаты вектора $\vec{b}$.

Для отыскания скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CK}$ необходимо найти сначала координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\ (1\text{-}(\text{-}2);2\text{-}1;\text{-}3\text{-}4) = \overrightarrow{AB}\,(3;1;\text{-}7);$$

$$\overrightarrow{CK}\,(4\text{-}2;\text{-}3\text{-}(\text{-}2);1\text{-}6) = \overrightarrow{CK}\,(2;\text{-}1;\text{-}5).$$

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CK}$ определится следующим равенством:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CK} = 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) + (-7)\cdot(-5) = 6 - 1 + 35 = 40.$$

Задача 1.2.4. Определите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CK}$, если известны координаты точек: А(-1;2;-1), В(-2;1;3), С(3;-2;1), К(2;-4;3).

Решение. Угол между векторами можно отыскать, используя скалярное произведение векторов. Согласно определению скалярного произведения векторов:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CK} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CK}\right| \cos\alpha,$ где α – есть угол между векторами.

Из последней формулы можно найти $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CK}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CK}\right|}.$$

Таким образом, необходимо найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CK}$, скалярное произведение, длины и, подставив в формулу, отыскать $\cos\alpha$.

$$\overrightarrow{AB}(-2-(-1);1-2;3-(-1)) = (-1;-1;4);$$

$$\overrightarrow{CK}(2-3;-4-(-2);3-1) = (-1;-2;2).$$

Скалярное произведение векторов определится следующим равенством:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CK} = -1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-2) + 4\cdot 2 = 1 + 2 + 8 = 11.$$

Найдем длины векторов:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18};$$

$$\left|\overrightarrow{CK}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3.$$

В результате $\cos\alpha$ будет равен:

$$cos\,\alpha = \frac{11}{\sqrt{18 \cdot 3}} = \frac{11}{\sqrt{9 \cdot 2} \cdot 3} = \frac{11}{9 \cdot \sqrt{2}}.$$

Тогда угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CK}$ есть величина, равная

$$\alpha = arccos\frac{11}{9 \cdot \sqrt{2}}.$$

Задача 1.2.5. Определите направляющие косинусы вектора $\vec{a}$(-2;4;1).

Решение. Направляющие косинусы вектора – это косинусы углов, которые он образует с осями координат. Если вектор $\vec{a}$ задан своими координатами в ортонормированном базисе $\vec{a}\,(x;y;z),$ то направляющие косинусы можно определить по формулам:

$$\cos(\vec{a}\,{}^\wedge\, ox) = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos(\vec{a}\,{}^\wedge\, oy) = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \cos(\vec{a}\,{}^\wedge\, oz) = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

где a_x, a_y, a_z – первая, вторая и третья координаты вектора $\vec{a}$ соответственно, $|\vec{a}|$ – длина вектора $\vec{a}$.

Для данной задачи a_x= -2; a_y= 4; a_z = 1. Длина вектора определяется согласно равенству:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$$

Таким образом, направляющие косинусы вектора найдутся следующим образом:

$$cos(\overrightarrow{a}\,{}^\wedge\, ox) = \frac{-2}{\sqrt{21}};\ cos(\vec{a}\,{}^\wedge\, oy) = \frac{4}{\sqrt{21}};\ cos(\vec{a}\,{}^\wedge\, oz) = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

Задача 1.2.6. Определите орт вектора $\vec{a}$ (2;-1;3).

Решение. Ортом вектора $\vec{a}$ называют единичный вектор, направленный вдоль вектора $\vec{a}$. Обозначение орта: $\overrightarrow{a_0}$. Отыскать орт вектора можно согласно следующему равенству:

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Найдём длину вектора $\vec{a}$:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{14}.$$

Тогда ортом вектора $\vec{a}$ будет вектор с координатами:

$$\overrightarrow{a_0}\left(\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{-1}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

Задача 1.2.7. Определите угол между прямыми АВ и СМ, если координаты точек известны: А(2;3;1), В(-1;2;4), С(1;-2;5), М(3;2;1).

Решение. Отыскание угла между прямыми *AB и CM* можно свести к задаче на отыскание угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CM}$. Однако нужно помнить, что при пересечении двух прямых образуется четыре угла. За угол между прямыми принимается меньший из получившихся углов, то есть угол $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. В этой связи $\cos\alpha$ не может принимать отрицательные значения, так как α лежит в первой четверти, а $\cos\alpha$ в первой четверти имеет положительные значения. Поэтому угол между прямыми найдется согласно следующему равенству:

$$\cos(\mathrm{AB},\ \mathrm{CM}) = \left|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CM})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CM}\right|}.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CM}$.

$$\overrightarrow{AB}(-1-2;2-3;4-1) = (-3;-1;3),$$

$$\overrightarrow{CM}(3-1;2-(-2);1-5) = (2;4;-4).$$

Определим cos(AB, CM):

$$\cos(AB,CM) = \frac{\left|-3\cdot 2+(-1)\cdot 4+3\cdot(-4)\right|}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}} = \frac{\left|-6+(-4)+(-12)\right|}{\sqrt{19}\cdot\sqrt{36}} = \frac{\left|-22\right|}{6\cdot\sqrt{19}}$$

Таким образом,

$$\cos(\mathrm{AB},\ \mathrm{CM}) = \frac{22}{6\cdot\sqrt{19}} = \frac{11}{3\cdot\sqrt{19}},$$

а угол между прямыми АВ и СМ составляет:

$$\alpha = \arccos\frac{11}{3\cdot\sqrt{19}}.$$

Задача 1.2.8. Найдите длины векторов $\vec{a}(3;2;1)$ и $\vec{b}(2;-3;0)$ и выясните: являются ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярными.

Решение. Определим длины векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

Для того, чтобы выяснить, являются ли векторы перпендикулярными, достаточно найти скалярное произведение векторов. Если скалярное произведение векторов равно нулю, то это есть условие перпендикулярности векторов, то есть если $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ взаимно перпендикулярны, то

$$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0.$$

Верно и обратное утверждение: если выполняется последнее равенство, то векторы взаимно перпендикулярны.

Найдем скалярное произведение векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = 6 + (-6) + 0 = 0.$$

Скалярное произведение векторов равно нулю, а поэтому можно сделать вывод, что векторы перпендикулярны.

Задача 1.2.9. Даны три вектора $\vec{a}(3;2;1)$, $\vec{b}$ (2;-3;0) и $\vec{c}(6;4;2)$. Выясните, являются ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарными между собой. Сонаправлены они или противоположно направлены?

Решение. Известно, что если векторы $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ коллинеарные (параллельные) между собой, то их соответственные координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda.$$

Если коэффициент пропорциональности λ положителен, то векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ сонаправлены, если отрицателен – противоположно направлены.

Найдём отношение соответствующих координат векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*:*

$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{-3} \neq \frac{1}{0}$, а поэтому $\vec{a}$ не коллинеарен вектору $\vec{b}$.

Найдём отношение соответствующих координат векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{c}$*:*

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \lambda,$$

равенство отношений соответствующих координат выполняется, а поэтому векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{c}$ коллинеарны. Так как λ положителен, векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{c}$ сонаправлены.

1.3. Векторное произведение векторов

Прежде чем приступать к разбору задач данного параграфа, обратитесь к теории параграфа 1.10 курса лекций по аналитической геометрии.

Задача 1.3.1. Найдите длину векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляет $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Из определения векторного произведения векторов известно, что векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\,\alpha$;

2) направление вектора $\vec{c}$ перпендикулярно плоскости векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*;*

3) направление вектора $\vec{c}$ выбирается (из двух возможных) так, чтобы векторы $\vec{a},\ \vec{b}, \vec{c}$ составляли правую систему векторов.

Обозначается векторное произведение векторов: $\left[\vec{a};\vec{b}\right]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$.

Нам необходимо найти длину векторного произведения векторов, то есть длину вектора, получившегося в результате векторного произведения векторов. Из первого условия:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sin\,\alpha = 4\cdot 2\cdot sin\frac{\pi}{3} = 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\cdot\sqrt{3}.$$

Задача 1.3.2. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a}$(-1;2;1), $\vec{b}$(2;-3;1).

Решение: под векторным произведением векторов $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3)$ *и* $\vec{b}\,(b_1;b_2;b_3)$ понимают вектор, координаты которого можно определить согласно следующему равенству:

$$\vec{c} = \left[\vec{a};\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

В нашем случае векторное произведение векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ определится:

$$\vec{c} = \left[\vec{a};\vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{j} - \vec{k}.$$

В результате векторного произведения получился вектор $\vec{c}$, координаты которого $\vec{c}$(5;3;-1).

Задача 1.3.3. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} = 2\cdot\vec{i} - 3\cdot\vec{j} + 3\cdot\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + 4\cdot\vec{k}$ (рис. 1.3.1).

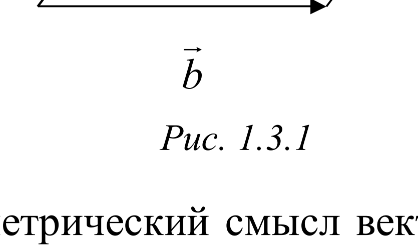

Рис. 1.3.1

Решение. Геометрический смысл векторного произведения векторов состоит в следующем: модуль векторного произведения векторов численно равен площади параллелограмма, который построен на этих векторах. Чтобы отыскать площадь параллелограмма, нужно найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*,* а затем отыскать его длину.

Векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ заданы своими разложениями через базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а поэтому их координаты будут соответственно равны коэффициентам, стоящим при этих базисных векторах: $\vec{a}(2;-3;3)$, $\vec{b}(-1;2;4)$.

Определим векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-18\cdot\vec{i}-11\cdot\vec{j}+\vec{k}$$

В результате векторного произведения векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ получился вектор $\vec{c}$ с координатами: $\vec{c}(-18;-11;1)$. Для отыскания площади параллелограмма осталось вычислить длину векторного произведения, то есть длину вектора $\vec{c}$:

$$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{(-18)^2+(-11)^2+1^2}=\sqrt{324+121+1}=\sqrt{446}.$$

Таким образом, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ будет:

$$S=\sqrt{446}.$$

Задача 1.3.4. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=2\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}-\vec{j}+2\cdot\vec{k}$ (рис. 1.3.2).

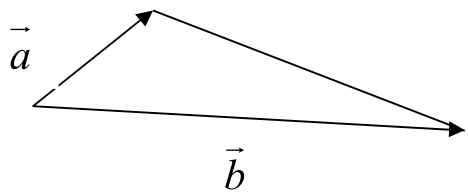

Рис. 1.3.2

Решение. Площадь треугольника составляет от площади параллелограмма $\frac{1}{2}$. Поэтому достаточно найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*,* и умножить найденное значение на $\frac{1}{2}$ – это и будет площадь треугольника. Вычислим векторное произведение векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*:*

$$\cdot\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-5\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}-5\cdot\vec{k}$$

Определим длину вектора, получившегося в результате векторного произведения векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$*:*

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{25\cdot3}=5\cdot\sqrt{3}.$$

В результате площадь параллелограмма равна $5\cdot\sqrt{3}$, а искомая площадь треугольника равна:

$$\text{S}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{3}=2{,}5\cdot\sqrt{3}.$$

Задача 1.3.5. Найдите площадь треугольника, заданного вершинами: A(-1;2;1), B(2;-1;3), C(-2;3;1).

Решение. Искомая площадь равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Вычислим координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}(2-(-1);-1-2;3-1)=(3;-3;2);$$
$$\overrightarrow{AC}(-2-(-1);3-2;1-1)=(-1;1;0).$$

Найдём векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+0\cdot\vec{k}$$

Длина (или модуль) векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдётся следующим образом:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{2\cdot4}=2\cdot\sqrt{2}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равна $2 \cdot \sqrt{2}$. Следовательно, площадь треугольника будет равна:

$$S=\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Задача 1.3.6. Даны координаты точек A(-1;2;1), B(0;2;3), C(-2;3;1). Вычислите площадь треугольника ABC, а также определите длину высоты треугольника, которая опущена из вершины B.

Решение. 1) Для отыскания площади треугольника ABC вычислим площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Определим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}(0-(-1);2-2;3-1)=(1;0;2),$$

$$\overrightarrow{AC}(-2-(-1);3-2;1-1)=(-1;1;0).$$

Векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ будет равно:

$$\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + \vec{k}.$$

Длина векторного произведения равна:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равна длине векторного произведения и равна 3, соответственно, площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма и равна 1,5.

2) Чтобы отыскать длину высоты треугольника, вспомним формулу площади треугольника, известную из школьного курса геометрии:

$$S=\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK,$$

где AC – основание треугольника, а BK – его высота, проведенная к основанию. Выразим из последней формулы высоту BK:

$$BK=\frac{2 \cdot S}{AC}.$$

Площадь треугольника АВС была нами найдена в первой части задачи, длину основания АС можно отыскать как длину вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}\,.$$

В результате длина высоты ВК треугольника АВС будет равна:

$$\text{ВК}=\frac{2\cdot 1{,}5}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

1.4. Смешанное произведение векторов

Прежде, чем приступить к рассмотрению задач данного параграфа, обратитесь к курсу лекций по аналитической геометрии к теории параграфа 1.11.

Задача 1.4.1. Даны три вектора $\vec{a}$ (-1;2;3), $\vec{b}$ (0;2;3), $\vec{c}$(-1;3;4). Найдите смешанное произведение этих векторов.

Решение. Смешанным (или векторно-скалярным) произведением трёх векторов $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначается смешанное произведение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Если векторы $\vec{a},\ \vec{b}$ и $\vec{c}$ даны их координатами $\vec{a}\,(a_1;a_2;a_3),\ \vec{b}(b_1;b_2;b_3),\ \vec{c}\,(c_1;c_2;c_3)$, то смешанное произведение $\vec{a}\vec{в}\vec{c}$ вычисляется по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

В нашем случае смешанное произведение векторов будет равно:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=\text{-8-6+6+9=1}.$$

Задача 1.4.2. Даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, заданные своими координатами: $\vec{a}(-1;3;0)$, $\vec{b}\ (4;2;-1)$, $\vec{c}(0;-2;3)$. Являются ли векторы компланарными?

Решение. Компланарными векторами называют векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов является равенство нулю смешанного произведения этих векторов. Поэтому достаточно отыскать смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и посмотреть: если получится число, равное нулю, то векторы компланарны, в противном случае векторы не являются компланарными.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=-6+2-36=-40\neq 0.$$

Вывод: векторы не являются компланарными.

Задача 1.4.3. Даны координаты точек: А(5;3;3), В(3;2;0), С(4;7;9), К(6;8;12). Определите, лежат ли эти точки в одной плоскости?

Решение. Для того, чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо отыскать смешанное произведение векторов. Если векторы окажутся компланарными, то они лежат в одной плоскости и, следовательно, и точки будут лежать в одной плоскости. Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AK}$:

$$\overrightarrow{AB}(3-5;2-3;0-3)=(-2;-1;-3);$$

$$\overrightarrow{AC}(4-5;7-3;9-3)=(-1;4;6);$$

$$\overrightarrow{AK}(6-5;8-3;12-3)=(1;5;9).$$

Найдём их смешанное произведение векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK}=\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}=-72+15-6+12+60-9=0$$

Так как смешанное произведение векторов равно нулю, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK}$ являются компланарными векторами, а следовательно лежащими в одной плоскости. Это даёт основание утверждать, что и точки A, B, C, K лежат в одной плоскости.

Задача 1.4.4. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$(-1;0;2), $\vec{b}$ (0;2;3), $\vec{c}$(-1;3;1) (рис. 1.4.1).

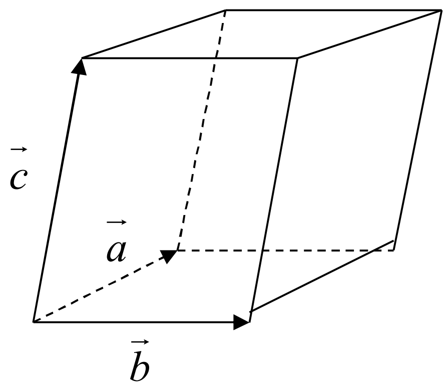

Рис. 1.4.1

Решение. Геометрический смысл смешанного произведения векторов состоит в следующем: модуль смешанного произведения векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Таким образом, необходимо отыскать смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, получившееся число взять по модулю и это и будет искомым объемом.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=-2+0+0-(-4)-(-9)-0=11,$$

$$V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=|11|=11.$$

Отсюда получаем, что объём параллелепипеда равен 11.

Задача 1.4.5. Найдите объем треугольной пирамиды KABC с вершинами K(0;-4;2), A(0;-1;3), B(-3;2;-2), C(5;-2;1) (рис. 1.4.2).

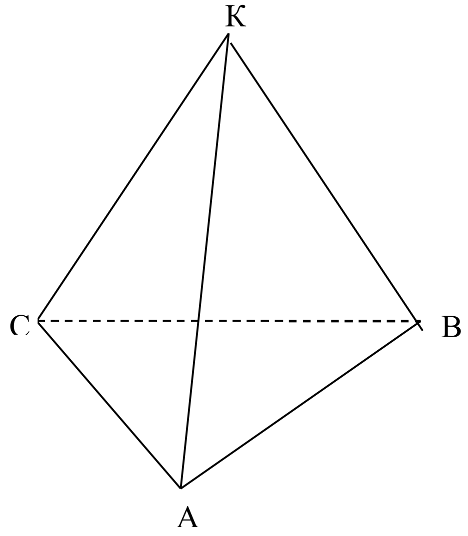

Рис. 1.4.2

Решение. Объем треугольной пирамиды составляет $\frac{1}{6}$ от объема параллелепипеда. В этой связи необходимо отыскать объем параллелепипеда, а затем полученный результат умножить на $\frac{1}{6}$ – это и будет искомый объём.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}(-3-0;2-(-1);-2-3)=(-3;3;-5),$$

$$\overrightarrow{AC}(5-0;-2-(-1);1-3)=(5;-1;-2),$$

$$\overrightarrow{AK}(0-0;-4-(-1);2-3)=(0;-3;-1).$$

Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK}$ будет равно:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK}=\begin{vmatrix}-3 & 3 & -5\\ 5 & -1 & -2\\ 0 & -3 & -1\end{vmatrix}=-3+75+0-0-(-18)-(-15)=105,$$

то есть объём параллелепипеда равен $|105|=105$. Объем пирамиды ABCK можно найти:

$$V_{ABCK}=\frac{1}{6}\cdot 105=\frac{105}{6}.$$

Задача 1.4.6. Найдите объём треугольной пирамиды ABCD с вершинами A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1), D(4;1;3).

Решение. Объём треугольной пирамиды составляет от объёма параллелепипеда $\frac{1}{6}$. Найдём объём параллелепипеда.

$$\overrightarrow{AB}(5-2;5-(-1);4-1)=(3;6;3),$$
$$\overrightarrow{AC}(3-2;2-(-1);-1-1)=(1;3;-2),$$
$$\overrightarrow{AD}(4-2;1-(-1);3-1)=(2;2;2).$$

Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ будет равно:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=18+6+(-24)-18-(-12)-12=-18$$

Объём параллелепипеда равен $|-18|=18$, тогда объём треугольной пирамиды $ABCD$ определится как:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot 18=3.$$

Задача 1.4.7. Найдите высоту КМ пирамиды КАВС с вершинами К(0;0;0), А(-2;1;0), В(-1;3;2), С(0:-5:1) (рис. 1.4.3).

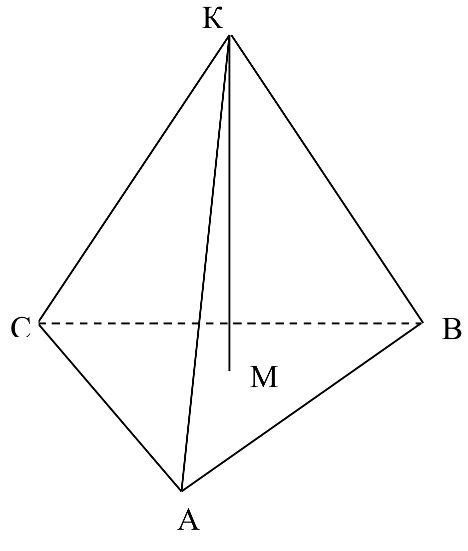

Рис. 1.4.3

Решение. Из школьного курса геометрии известно, что объём пирамиды находится по формуле:

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H,$$

где $S_{осн}$ – площадь основания пирамиды, а Н – её высота.

Поэтому для отыскания высоты пирамиды H = KM, необходимо отыскать площадь основания пирамиды – площадь треугольника ABC и объём пирамиды.

Найдём координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}(-1-(-2);3-1;2-0)=(1;2;2),$$
$$\overrightarrow{AC}(0-(-2);-5-1;1-0)=(2;-6;1),$$
$$\overrightarrow{AK}(0-(-2);0-1;0-0)=(2;-1;0).$$

Площадь треугольника ABC вычислим с использованием векторного произведения векторов:

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 1\end{vmatrix}=14\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-10\cdot\vec{k}$$

В результате векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ получился вектор с координатами $\vec{c}$(14;3;-10). Длина этого вектора, умноженная на 0,5, есть площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{c}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{14^2+3^2+(-10)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{305}.$$

Объем пирамиды вычислим с помощью смешанного произведения векторов. Найдём смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AK}$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AK}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0+(-4)+4-(-24)-(-1)-0=25$$

Объём пирамиды составит:

$$V_{ABCK}=\frac{1}{6}\cdot\left|25\right|=\frac{25}{6}.$$

Выразим из школьной формулы объёма пирамиды высоту H:

$$\text{H}=\frac{3\cdot V_{ABCK}}{S_{осн}}=\frac{3\cdot\frac{25}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{305}}=\frac{25}{\sqrt{305}}.$$

1.5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.5.1. Дан треугольник MNP, NK – медиана, точка O – середина отрезка NK. Найдите разложения векторов $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MN}$ через базисные векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OK}$. В ответ укажите координаты векторов $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MN}$ в предложенном базисе.

Ответ: $\overrightarrow{MP}$(-2;2),$\overrightarrow{NP}$(-1;3),$\overrightarrow{MN}$(-1;-1).

Задача 1.5.2. Дан треугольник ABC. BP и AK – медианы, точка O – точка пересечения медиан BP и AK. Найдите разложения векторов $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ через базисные векторы $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AO}$. В ответ укажите координаты векторов $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ в предложенном базисе.

Ответ: $\overrightarrow{BP}$(3;-3), $\overrightarrow{BC}$(4;-3), $\overrightarrow{AB}$(-2;3).

Задача 1.5.3. Дан параллелограмм ABCD. Точка O – точка пересечения диагоналей параллелограмма AC и BD. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AD}$ в базисе, состоящем из векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$.

Ответ: $\overrightarrow{CD}$(-1;1), $\overrightarrow{OB}$(0;-1), $\overrightarrow{AD}$(1;1).

Задача 1.5.4. Дана четырехугольная пирамида KABCD, в основании которой параллелограмм ABCD. Точка O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{KD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{KO}$, $\overrightarrow{BK}$ в базисе, состоящем из векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AD}$.

Ответ: $\overrightarrow{KD}$(0;-1;1),$\overrightarrow{AC}$(1;0;1),$\overrightarrow{KC}$(1;-1;1),$\overrightarrow{KO}$(0,5;-1;0,5),$\overrightarrow{BK}$(-1;1;0).

Задача 1.5.5. Даны координаты точек A(1;2;-3), B(4;1;0). Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Ответ: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{19}$.

Задача 1.5.6. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, если известны координаты точек A(2;0;3), B(-3;0;4), C(1;-1;2), D(4;3;0).

Ответ: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -13$.

Задача 1.5.7. Даны два вектора $\vec{a}$(-2; 0; 3) и $\vec{b}$ (1;-3;4). Найдите угол между векторами.

Ответ: $cos\,\alpha = \dfrac{10}{\sqrt{338}}$.

Задача 1.5.8. Даны координаты вершин треугольника A(-1;2;0), B(0;-3;2), C(4;3;-1). Найдите угол BAC и длину стороны AC.

Ответ: $cos\,\alpha = \dfrac{-2}{9\cdot\sqrt{10}}$; $AC = \sqrt{27}$.

Задача 1.5.9. Даны два вектора $\vec{a}$(-3;4;0) и $\vec{b}$ (3;-4;3). Найдите векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ: $\vec{a}\times\vec{b} = 12\cdot\vec{i} + 9\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$.

Задача 1.5.10. Даны четыре точки A(-1;0;1), B(-3;0;2), C(3;2;4), D(-5;4;1). Найдите векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD} = -2\cdot\vec{i} - 14\cdot\vec{j} - 4\cdot\vec{k}$.

Задача 1.5.11. Даны векторы $\vec{a}$ (-2;0;1) и $\vec{b}$ (4;3;-1). Найдите площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Ответ: S=7.

Задача 1.5.12. Даны векторы $\vec{a}$ (-4;3;0) и $\vec{b}$(0;4;-2). Найдите площадь треугольника, построенного на этих векторах.

Ответ: S=$\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{356} = \sqrt{89}$.

Задача 1.5.13. Дан треугольник ABC с вершинами A(0;-1;-2), B(3;4;2), C(-3;1;2). Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{841}$.

Задача 1.5.14. Даны три вектора $\vec{a}$ (-4;2;1), $\vec{b}$(1;-1;-2), $\vec{c}$(3;-1;0). Найдите смешанное произведение векторов.

Ответ: $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$=-2.

Задача 1.5.15. Даны векторы $\vec{a}(-4;0;1)$, $\vec{b}(2;0;-0,5)$, $\vec{c}(7;-3;1)$. Выясните, являются ли векторы компланарными?

Ответ: векторы являются компланарными.

Задача 1.5.16. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(2;-4;1)$, $\vec{b}(1;0;-1)$, $\vec{c}(7;-3;1)$.

Ответ: V=23.

Задача 1.5.17. Даны вершины треугольной пирамиды A(-4;2;1), B(-7;1;4), C(3;0;-1), D(2;-3;1). Найдите объем треугольной пирамиды ABCD, площадь основания BCD и высоту пирамиды AK.

Ответ: V=4,5;

$S=\sqrt{1475}$;

$AK=\dfrac{27}{2\cdot\sqrt{1475}}$.

ГЛАВА 2. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЛОСКОСТЬ

2.1. Прямая на плоскости

Прежде, чем приступать к рассмотрению задач данного параграфа, рассмотрите предлагаемые Вам теоретические вопросы курса лекций по аналитической геометрии параграфа 2.1.

Задача 2.1.1. Составьте уравнение прямой на плоскости, если известно, что прямая проходит через две точки А(-1;2) и В(3;4).

Решение. Выполним рабочий рисунок к условию задачи (рис. 2.1.1). Известно, что уравнение прямой, проходящей через две заданные точки А($x_1; y_1$) и В($x_2; y_2$) (рис. 1.3.1) записывается в виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

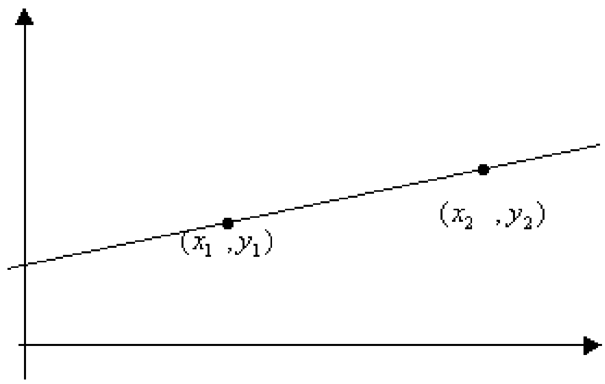

Рис. 2.1.1

Координаты точек А и В известны, поэтому можем составить уравнение прямой для данной задачи:

$$\frac{x-(-1)}{3-(-1)}=\frac{y-2}{4-2},$$

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{2}.$$

Полученное уравнение носит название канонического уравнения прямой. Данное уравнение можно переписать в общем виде:

$$2\cdot(x+1)=4\cdot(y-2),$$

$$2\cdot x+2=4\cdot y-8,$$

$$2\cdot x+2-4\cdot y+8=0,$$

$$2\cdot x-4\cdot y+10=0.$$

Таким образом, из канонического уравнения прямой, можно получить общее уравнение прямой.

Задача 2.1.2. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку с координатами А(-2;1).

Решение. Уравнение прямой составим, используя уравнение прямой, заданной двумя точками:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

В данной задаче прямая проходит через точку А с координатами А(-2;1) и через начало координат – точку О с координатами О(0;0).

$$\frac{x-(-2)}{0-(-2)}=\frac{y-1}{0-1},$$

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}.$$

Уравнение прямой можно в таком виде и оставить, а можно преобразовать и получить общее уравнение прямой:

$$-1\cdot(x+2)=2\cdot(y-1),$$

$$-x-2-2y+2=0,$$

$$-x-2y=0.$$

Задача 2.1.3. Составьте уравнение прямой, если известно, что угол, образованный этой прямой при пересечении с положительным направлением оси ОХ равен $\alpha=\frac{\pi}{4}$, а точка пересечения этой прямой с осью ОY имеет координаты А(0;4).

Решение. Выполним рабочий рисунок к задаче (рис. 2.1.2).

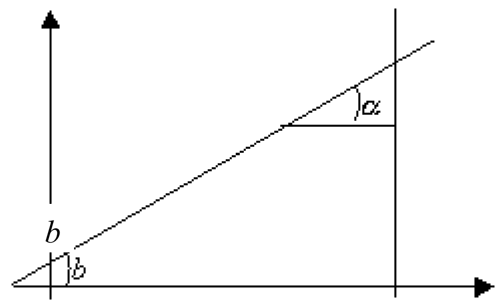

Рис. 2.1.2

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, равным тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси OX, записывается в следующем виде:

$$y = kx + b,$$

где b – ордината точки пересечения прямой с осью OY.

Для данной задачи b = 4 (ордината точки A), а $k = \text{tg}\alpha = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Таким образом, уравнение прямой примет вид:

$$y = 1 \cdot x + 4 \text{ или } y = x + 4.$$

Задача 2.1.4. Составьте уравнение прямой ℓ, если известно, что прямая проходит через точку M(-2;3) и перпендикулярна вектору $\vec{n}$(-3;4).

Решение. Выполним рабочий рисунок к задаче (рис. 2.1.3).

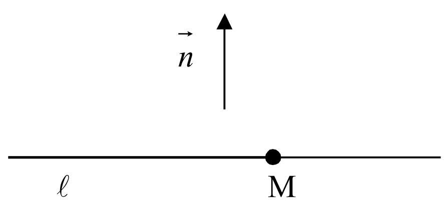

Рис. 2.1.3

Прямую ℓ можно задать точкой и нормальным (перпендикулярным к прямой) вектором. Если нормальный вектор имеет координаты $\vec{n}$ (A;*B*), а точка имеет координаты M($x_0; y_0$), то уравнение прямой можно записать в виде:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0.$$

Для данной задачи уравнение прямой ℓ можно записать в следующем виде:

$$-3\cdot(x-(-2))+4\cdot(y-3)=0,$$
$$-3\cdot(x+2)+4\cdot(y-3)=0,$$
$$-3x-6+4y-12=0,$$
$$-3x+4y-18=0.$$

Получили в результате общее уравнение прямой ℓ.

Задача 2.1.5. Составьте уравнение прямой ℓ, проходящей через точку M(-1;4) и перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, где A(0;2), B(-3;1).

Решение. Прямую ℓ можно задать точкой M и нормальным (перпендикулярным к прямой) вектором $\overrightarrow{AB}$.

Найдем координаты нормального вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}(-3-0;1-2)=(-3;-1).$$

Уравнение прямой ℓ примет вид:

$$-3\cdot(x-(-1))+(-1)\cdot(y-4)=0,$$
$$-3\cdot(x+1)-(y-4)=0,$$
$$-3x-3-y+4=0,$$
$$-3x-y+1=0.$$

Обе части последнего равенства можно умножить на (-1), и тогда уравнение прямой ℓ примет вид:

$$3x+y-1=0.$$

Задача 2.1.6. Составьте уравнение прямой ℓ, если известно, что прямая проходит через точку M(-2;0) и параллельно вектору $\vec{a}$ (-2;3).

Решение. Выполним рабочий рисунок к задаче (рис. 2.1.4).

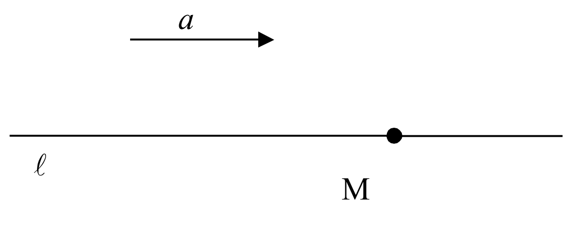

Рис. 2.1.4

Прямую ℓ можно задать точкой М и направляющим (параллельным прямой) вектором $\vec{a}$. Если точка М имеет координаты М($x_1; y_1$), а направляющий вектор $\vec{a}\,(m;n)$, то уравнение прямой записывается в виде:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}.$$

Подставим в это уравнение значения, указанные в задаче:

$$\frac{x-(-2)}{-2} = \frac{y-0}{3},$$

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y}{3}.$$

Получили каноническое уравнение прямой ℓ. Это уравнение можно преобразовать и получить общее уравнение прямой:

$$3\cdot(x+2) = -2\cdot y,$$

$$3x + 6 = -2y,$$

$$3x + 2y + 6 = 0.$$

Задача 2.1.7. Составьте уравнение прямой ℓ, проходящей через точку С(2;5) и параллельно вектору $\overrightarrow{AB}$, где А(1;1), В(2;4).

Решение. Воспользуемся каноническим уравнением прямой:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}.$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}\,(2\text{-}1;4\text{-}1)=(1;3).$$

Уравнение прямой ℓ примет вид:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{3} \text{ или}$$

$$3\cdot(x-2) = y-5,$$

$$3x - y - 1 = 0.$$

Задача 2.1.8. Дан треугольник АВС с вершинами А(0;0), В(-2;1), С(1;4). ВК – медиана, BD – высота. Составьте уравнения прямых АВ, ВК, BD и ℓ, которая проходит через точку В параллельно прямой АС (рис. 2.1.5).

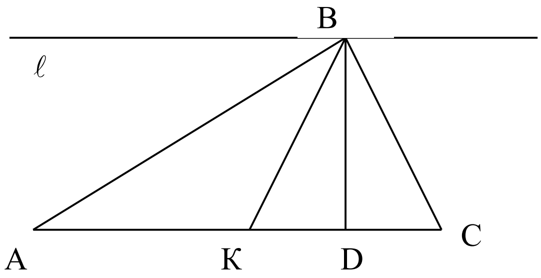

Рис. 2.1.5

Решение. 1) Прямую АВ можно задать двумя точками А и В. Уравнение прямой, заданной двумя точками, представимо в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставим в это уравнение координаты точек А и В:

$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y - 0}{1 - 0},$$

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{1}.$$

Получили каноническое уравнение прямой АВ.

2) Прямую ВК можно также задать двумя точками, однако прежде необходимо найти координаты точки К. Так как ВК – медиана треугольника, точка К – середина отрезка АС. Из школьного курса геометрии известны формулы, позволяющие находить координаты середины отрезка:

$$x_{cep} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y_{cep} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Найдем координаты точки К:

$$x_k = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0 + 1}{2} = 0{,}5;$$

$$y_k = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 4}{2} = 2.$$

Таким образом, точка К(0,5;2).

Для составления уравнения прямой ВК воспользуемся тем же уравнением, что и в первой части задачи:

$$\frac{x-(-2)}{0{,}5-(-2)}=\frac{y-1}{2-1},$$

$$\frac{x+2}{2{,}5}=\frac{y-1}{1}.$$

Последнее равенство есть каноническое уравнение прямой ВК.

3) Прямую *BD* можно задать точкой В и нормальным (перпендикулярным прямой) вектором $\overrightarrow{AC}$, так как BD – высота треугольника, а следовательно, *BD* перпендикулярна AC:

$$A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)=0.$$

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC}(1\text{-}0;4\text{-}0)=(1;4).$$

Уравнение прямой *BD* примет вид:

$$1\cdot(x-(-2))+4\cdot(y-1)=0,$$

$$x+2+4y-4=0,$$

$$x+4y-2=0.$$

4) Прямую ℓ можно задать точкой В и направляющим вектором (параллельным прямой) $\overrightarrow{AC}$:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, точки В известны, подставим их в уравнение:

$$\frac{x-(-2)}{1}=\frac{y-1}{4},$$

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{4}.$$

Получили каноническое уравнение прямой ℓ.

Задача 2.1.9. Даны точки A(1;2), B(-1;3), C(4;5). Найдите расстояние от точки В до прямой АС.

Решение. Формула отыскания расстояния от точки до прямой записывается в виде:

$$d=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

где $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ есть уравнение прямой, до которой ищется расстояние, $(x_0; y_0)$ – координаты точки.

Для того, чтобы отыскать расстояние от точки до прямой, необходимо составить уравнение прямой AC. Прямую AC можно задать двумя точками A и C:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставим координаты точек A и C:

$$\frac{x-1}{4-5} = \frac{y-2}{5-2},$$

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3},$$

$$3(x-1) = -(y-2),$$

$$3x + y - 5 = 0 \text{ – уравнение прямой AC.}$$

Подставим найденное уравнение и координаты точки B в формулу расстояния:

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) + 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}.$$

Задача 2.1.10. Даны четыре уравнения прямых:

$$\ell_1: 2 \cdot x - 3 \cdot y + 4 = 0,$$

$$\ell_2: 4 \cdot x - 6 \cdot y + 7 = 0,$$

$$\ell_3: 3 \cdot x + 2 \cdot y - 6 = 0,$$

$$\ell_4: 3 \cdot x + y - 1 = 0.$$

Выясните взаимное расположение прямых 1) ℓ_1 и ℓ_2; 2) ℓ_1 и ℓ_3; 3) ℓ_2 и ℓ_4.

Решение. 1) В задаче известны общие уравнения прямых ℓ_1, ℓ_2 *и* ℓ_3, ℓ_4. Из этих уравнений мы можем выяснить координаты нормальных (то есть перпендикулярных к прямой) векторов:

$$\overrightarrow{n_1}(2; -3),$$

$$\overrightarrow{n_2}(4; -6),$$

$$\overrightarrow{n_3}(3;2),$$

$$\overrightarrow{n_4}(3;1).$$

Проверим координаты векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ на пропорциональность. Если соответствующие координаты этих векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны (параллельны), а следовательно, прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны (рис. 2.1.6).

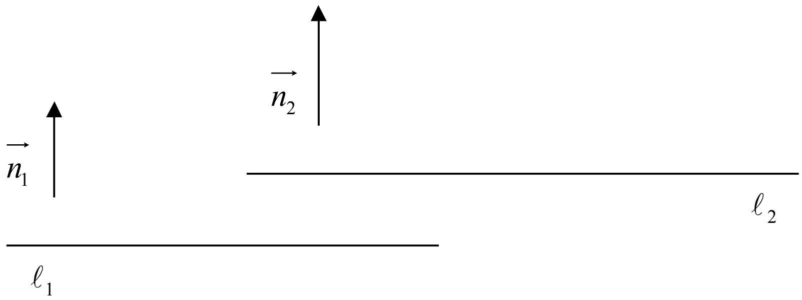

Рис. 2.1.6

Найдём отношение соответствующих координат векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}.$$

Таким образом, так как соответствующие координаты векторов $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ пропорциональны, то эти векторы коллинеарны, а следовательно прямые ℓ_1 *и* ℓ_2 параллельны.

2) Рассмотрим теперь нормальные векторы $\overrightarrow{n_1}(2;-3)$, $\overrightarrow{n_3}(3;2)$ прямых ℓ_1 *и* ℓ_3. Соответствующие координаты этих векторов не пропорциональны ($\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{2}$), а следовательно, данные прямые ℓ_1 *и* ℓ_3 не параллельны. Проверим, являются ли данные прямые перпендикулярными. Для этого найдём скалярное произведение векторов $\overrightarrow{n_1}(2;-3)$, $\overrightarrow{n_3}(3;2)$. Если оно будет равным нулю, то векторы перпендикулярны, а следовательно, и прямые ℓ_1 *и* ℓ_3 будут перпендикулярными (рис. 2.1.7).

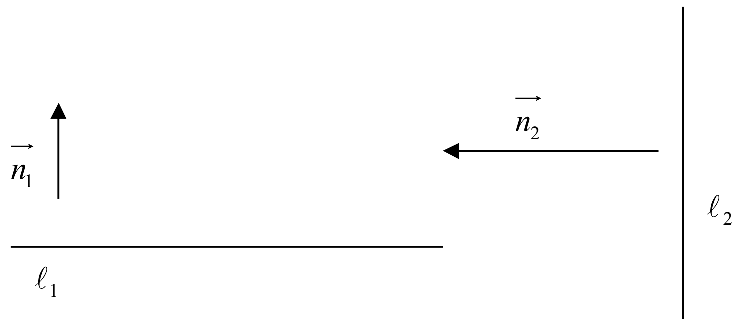

Рис. 2.1.7

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2} = 2\cdot 3 + (-3)\cdot 2 = 6 + (-6) = 0,$$

Скалярное произведение равно нулю, векторы $\overrightarrow{n_1}(2;-3)$ и $\overrightarrow{n_3}(3;2)$ – перпендикулярны, а следовательно, и прямые ℓ_1 *и* ℓ_3 перпендикулярны.

3) Определим взаимное расположение прямых ℓ_2 *и* ℓ_4. Рассмотрим нормальные векторы этих прямых $\overrightarrow{n_2}(4;-6)$, $\overrightarrow{n_4}(3;1)$. Соответствующие координаты этих векторов не пропорциональны ($\frac{4}{3} \neq \frac{-6}{1}$), следовательно, векторы не коллинеарны и прямые не параллельны. Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{n_2}(4;-6)$и $\overrightarrow{n_4}(3;1)$ не равно нулю ($4\cdot 3 + (-6)\cdot 1 = 6 \neq 0$), следовательно, векторы не перпендикулярны и прямые не являются перпендикулярными. Если прямые на плоскости не параллельны и не перпендикулярны, то прямые являются пересекающимися (рис. 2.1.8).

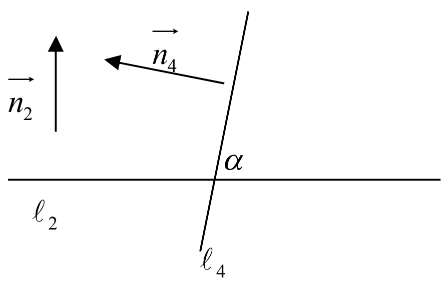

Рис. 2.1.8

Угол между прямыми можно отыскать используя скалярное произведение векторов $\overrightarrow{n_2}(4;-6)$ и $\overrightarrow{n_4}(3;1)$:

$$\cos(\ell_2,\ \ell_4)=\left|\cos(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_4})\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{n_4}\right|}{\left|\overrightarrow{n_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_4}\right|}.$$

$$\cos(\ell_2,\ \ell_4)=\left|\cos(\overrightarrow{n_2},\overrightarrow{n_4})\right| = \frac{\left|4\cdot 3+(-6)\cdot 1\right|}{\sqrt{4^2+(-6)^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{520}}.$$

2.2. Плоскость

Прежде, чем приступить к решению задач этого параграфа обратитесь к теоретическому материалу курса лекций параграфа 2.3.

Задача 2.2.1. Составьте уравнение плоскости α, если известно, что она проходит через три точки с координатами: A(1;2;4), B(-1;2;0), C(1;-5;1).

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через три точки A($x_1;y_1;z_1$), B($x_2;y_2;z_2$), C($x_3;y_3;z_3$), записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим в определитель координаты точек A, B, C:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-4 \\ -1-1 & 2-2 & 0-4 \\ 1-1 & -5-2 & 1-4 \end{vmatrix} = 0.$$

Упростим и вычислим определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-4 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-28\cdot(x-1)-6\cdot(y-2)+14\cdot(z-4)=0,$$

$$-28x-6y+14z-16=0.$$

Задача 2.2.2. Составьте уравнение плоскости α, проходящей через точку A(-1;0;4) и перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$, если B(-1;2;1), C(-3;4;0).

Решение. Плоскость α можно задать точкой A и нормальным (перпендикулярным плоскости) вектором $\overrightarrow{BC}$ уравнением:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)=0,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки, принадлежащей плоскости; (A;B;C) – координаты нормального вектора.

Найдем координаты нормального вектора $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BC}(-3-(-1);4-2;0-1)=(-2;2;-1).$$

Составим уравнение плоскости α:

$$-2\cdot(x-(-1))+2\cdot(y-0)-1\cdot(z-4)=0,$$

$$-2\cdot(x+1)+2\cdot y-(z-4)=0,$$

$$-2\cdot x+2\cdot y-z+2=0.$$

Задача 2.2.3. Составьте уравнение плоскости α, проходящей через точку A(-2;3;1) и параллельно векторам $\vec{p}$(-2;4;2) и $\vec{q}$(0;2;1).

Решение. Плоскость α можно задать точкой и двумя направляющими (параллельными плоскости) векторами $\vec{p}$ *и* $\vec{q}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}=0,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки, принадлежащей плоскости; $(p_1; p_2; p_3)$ – координаты направляющего вектора, $(q_1; q_2; q_3)$ – координаты второго направляющего вектора.

Составим уравнение плоскости α:

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & y-3 & z-1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$0\cdot(x+2)+2\cdot(y-3)-4\cdot(z-1)=0,$$

$$2y-4z-2=0.$$

Задача 2.2.4. Составьте уравнение плоскости α, проходящей через точку M(2;3;1) и параллельно другой плоскости β с уравнением: β*: -3x-4y+5z-2=0 (рис. 2.2.1).*

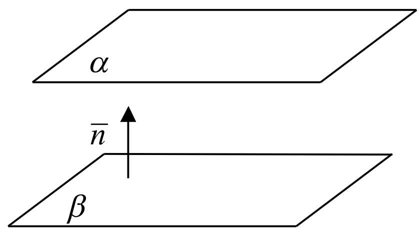

Рис. 2.2.1

Решение. Так как плоскости α *и* β параллельны, то нормальный (перпендикулярный к плоскости) вектор плоскости β будет являться нормальным вектором и к плоскости α. В этой связи плоскость α можно задать точкой M и нормальным вектором $\vec{n}$. Координаты нормального вектора плоскости β есть коэффициенты при переменных x, y, z. В результате координаты нормального вектора есть числа вида:

$$\vec{n}(-3;-4;5).$$

Уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором в общем виде записывается:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)=0,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$– координаты точки, принадлежащей плоскости; (A;B;C) – координаты нормального вектора.

Подставим значения в уравнение:

$$-3\cdot(x-2)-4\cdot(y-3)+5\cdot(z-1)=0,$$

$$-3x-4y+5z+13=0.$$

Задача 2.2.5. Составьте уравнение плоскости α, которая проходит через точки A(-3;2;1), B(-1;0;2) и перпендикулярно плоскости β с уравнением: 4x-3y+7z-1=0 (рис. 2.2.2).

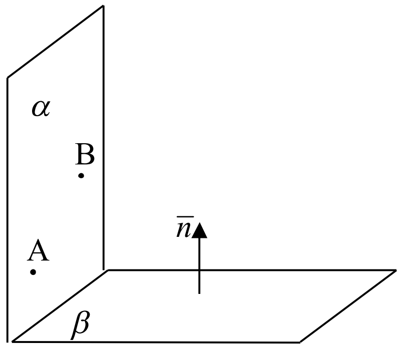

Рис. 2.2.2

Решение. Так как по условию задачи плоскость α перпендикулярна плоскости β, то нормальный (перпендикулярный) вектор плоскости β будет являться направляющим (параллельным) вектором плоскости α. Вторым направляющим вектором плоскости α можно считать вектор $\overrightarrow{AB}$, так как вектор, лежащий в плоскости α также считается направляющим (параллельным) вектором этой плоскости. Таким образом, плоскость α можно задать точкой (в качестве точки, принадлежащей плоскости, можно выбрать любую из двух: A или B) и двумя направляющими векторами ($\overrightarrow{n_\beta}$ и $\overrightarrow{AB}$). Координаты вектора $\overrightarrow{n_\beta}$ есть коэффициенты при переменных x, y, z в уравнении плоскости β. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя направляющими векторами, в общем виде записывается:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$– координаты точки, принадлежащей плоскости; $(p_1; p_2; p_3)$ – координаты направляющего вектора, $(q_1; q_2; q_3)$ – координаты второго направляющего вектора.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}(-1-(-3);0-2;2-1)=(2;-2;1),$$

$$\overrightarrow{n_\beta}(4;-3;7).$$

В качестве точки, принадлежащей плоскости, выберем точку А.

Подставим эти значения в уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-(-3) & y-2 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-11\cdot(x+3)-10\cdot(y-2)+2(z-1)=0,$$

$$-11x-10y+2z-15=0.$$

Задача 2.2.6. Найдите расстояние от точки A(-2;1;1) до плоскости α с уравнением: $2x-3y+4z-1=0$.

Решение. Расстояние от точки до плоскости можно вычислить по формуле:

$$d_{A,\alpha} = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где $Ax+By+Cz+D=0$ – уравнение плоскости α, $(x_0;y_0;z_0)$ – координаты точки, от которой ищем расстояние до плоскости.

Подставим в последнюю формулу данные в задаче значения:

$$d_{A,\alpha} = \frac{|2\cdot(-2)-3\cdot 1+4\cdot 1-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}.$$

Таким образом, расстояние от точки А до плоскости α составляет $\dfrac{4}{\sqrt{29}}$.

Задача 2.2.7. Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями, заданными своими уравнениями:

$$\alpha: 2x-3y+4z+2=0,$$

$$\beta: 4x-6y+8z+5=0.$$

Решение. Расстояние между плоскостями можно отыскать в случае их параллельности. Условием параллельности двух плоскостей является пропорциональность соответствующих коэффициентов, стоящих при x, y, z. Проверим выполнимость этого условия:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}.$$

Так как равенство выполняется, следовательно, плоскости α и β параллельны. Чтобы отыскать расстояние между плоскостями, нужно найти точку, принадлежащую одной плоскости и расстояние от этой точки до второй плоскости по формуле, используемой в предыдущей задаче.

Найдем координаты точки, принадлежащей плоскости α. В качестве таковой можно выбрать точку с координатами A(1;0;-1). Действительно, если подставить эти значения в уравнение плоскости α, то получится верное равенство. Координаты точки A были найдены методом подбора. Так, например, точка с координатами $(0;0;-\frac{1}{2})$ также принадлежит плоскости α и может быть взята как точка A.

Расстояние от точки A до плоскости β найдём по формуле:

$d_{A,\beta} = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где $Ax + By + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости β, $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки A.

$$d_{\alpha,\beta} = d_{A,\beta} = \frac{|4 \cdot 1 - 6 \cdot 0 + 8 \cdot (-1) + 5|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 8^2}} = \frac{1}{\sqrt{116}}.$$

Задача 2.2.8. Найдите угол между плоскостями α и β, если плоскости α и β заданы уравнениями:

$$\alpha: 2x-y+7z-2=0,$$
$$\beta: -x-2y+3z-4=0.$$

Решение. Две плоскости, пересекаясь, образуют четыре двугранных угла, попарно равных между собой. Один из них равен углу между нормальными векторами плоскостей. За угол между плоскостями принимается острый угол, то есть $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Пусть плоскости α *и* β заданы уравнениями:

$$\alpha: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\beta: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Нормальный вектор плоскости α имеет координаты: $\overrightarrow{n_\alpha}(A_1;B_1;C_1)$, плоскости β имеет координаты: $\overrightarrow{n_\beta}(A_2;B_2;C_2)$. Тогда косинус угла между плоскостями будет равен модулю косинуса угла между нормальными векторами данных плоскостей:

$$\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{n_\alpha} \wedge \overrightarrow{n_\beta})\right|.$$

Косинус угла между векторами можно найти с помощью скалярного произведения векторов:

$$\cos\varphi = \left|\cos(\overrightarrow{n_\alpha} \wedge \overrightarrow{n_\beta})\right| = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Найдём координаты нормальных векторов для нашей задачи:

$$\overrightarrow{n_\alpha}(2;-1;7),$$

$$\overrightarrow{n_\beta}(-1;-2;3).$$

Найдем косинус угла между плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{|2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+7\cdot 3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+7^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{|-2+2+21|}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{14}} = \frac{21}{6\cdot\sqrt{21}} = \frac{7}{2\cdot\sqrt{21}}.$$

Таким образом, угол между плоскостями составляет

$$\varphi = \arccos\frac{7}{2\cdot\sqrt{21}}.$$

2.3. Прямая в пространстве

Прежде, чем приступать к рассмотрению задач данного параграфа, обратитесь к теоретическому материалу курса лекций параграфа 2.2.

Задача 2.3.1. Составьте уравнение прямой, проходящей через две точки: A(-2;0;3) и B(1;4;-3).

Решение. Данную прямую можно задать двумя точками А и В, уравнение которой записывается в виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

где $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$ – координаты точек, принадлежащих прямой. Подставляя в уравнение координаты точек А и В, получим:

$$\frac{x-(-2)}{1-(-2)}=\frac{y-0}{4-0}=\frac{z-3}{-3-3},$$

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{-6}.$$

Задача 2.3.2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки M(5;0;1) и N(5;6;4).

Решение. Данную прямую можно задать двумя точками M и N. Уравнение прямой в пространстве, заданной двумя точками, записывается в виде:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

где $(x_1;y_1;z_1)$ и $(x_2;y_2;z_2)$ – координаты точек, принадлежащих прямой.

Подставим в уравнение данные задачи:

$$\frac{x-5}{5-5}=\frac{y-0}{6-0}=\frac{z-1}{4-1},$$

$$\frac{x-5}{0}=\frac{y}{6}=\frac{z-1}{3}.$$

Получили каноническое уравнение прямой. Выражение – $\frac{x-5}{0}$ условно, оно означает, что $x-5=0$ и координаты направляющего вектора прямой: $\vec{a}$ (0; 6; 3).

Задача 2.3.3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку А(-3;1;2) и параллельно вектору $\vec{a}$(-3;4;2).

Решение. Прямую можно задать точкой А и направляющим (параллельным) вектором $\vec{a}$. Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором, в общем виде записывается:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки, принадлежащей плоскости; $(m; n; p)$ – координаты направляющего вектора.

Такое уравнение называется каноническим уравнением прямой.

Подставим данные задачи в уравнение:

$$\frac{x-(-3)}{-3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{2},$$

$$\frac{x+3}{-3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{2}.$$

Задача 2.3.4. Составьте уравнение прямой ℓ, проходящей через точку A(-1;2;3) и параллельно другой прямой a, с уравнением:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{2} \text{ (рис. 2.3.1).}$$

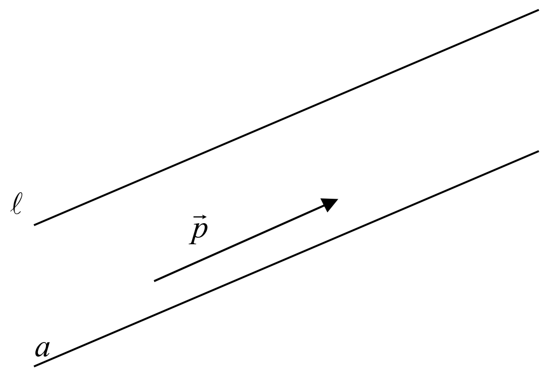

Рис. 2.3.1

Решение. Прямая ℓ параллельна данной прямой *a*, поэтому направляющий (параллельный) вектор прямой *a* будет являться направляющим вектором и прямой ℓ. В этой связи прямую ℓ можно задать точкой A и направляющим вектором $\vec{p}$ с координатами $\vec{p}$(-1;3;2).

Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором, в общем виде записывается:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки, принадлежащей плоскости; $(m; n; p)$ – координаты направляющего вектора.

Составим уравнение прямой ℓ:

$$\frac{x-(-1)}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2},$$

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{2}.$$

2.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.4.1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки P(-3;2) и O(0;0).

Ответ: $2\cdot x+3\cdot y=0$.

Задача 2.4.2. Дан треугольник KPC, где точки имеют координаты K(2;1), P(-3;4), C(0;-3). Составьте уравнение прямых KP, PC, KM, где M – середина отрезка PC.

Ответ: *1) KP:* $3\cdot x+5\cdot y-11=0$;

2) PC: $7\cdot x+3\cdot y+9=0$;

3) KM: $-0{,}5\cdot x+3{,}5\cdot y-2?5=0$.

Задача 2.4.3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A(5;4) и параллельно вектору $\overrightarrow{BC}$, где B(-1;3), C(-2;1).

Ответ: $-2\cdot x+y+6=0$.

Задача 2.4.4. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку O(-1;2) и перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, где A(-3;1), B(-4;1).

Ответ: $x+1=0$.

Задача 2.4.5. Даны три точки A(1;1), C(4;5), K(-3;1). Найдите расстояние от точки K до прямой AC.

Ответ: d=3,2.

Задача 2.4.6. Даны две прямые с уравнениями:

$$2\cdot x-3\cdot y+4=0,$$

$$3\cdot x+4\cdot y-1=0.$$

Определите величину угла между ними.

Ответ: $cos\,\alpha = \dfrac{6}{5\cdot\sqrt{13}}$

Задача 2.4.7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки A(-3;1;2), B(-2;1;0) и C(-1;5;7).

Ответ: $8\cdot x - 9\cdot y + 4\cdot z + 25 = 0$.

Задача 2.4.8. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку C(-3;1;1) и параллельно векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{KM}$, где A(1;1;2), B(-2;1;1), K(-4;1;0), M(1;-1;7).

Ответ: $-2\cdot x + 16\cdot y + 6\cdot z - 28 = 0$.

Задача 2.4.9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку C(1;2;1) и перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, где A(1;2;-4), B(-3;1;1). Найдите расстояние от точки A до данной плоскости.

Ответ: 1) $-4\cdot x - y + 5\cdot z + 1 = 0$;

2) $d = \dfrac{25}{\sqrt{42}}$.

Задача 2.4.10. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки A(1;2;-4), B(-3;1;1).

Ответ: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+4}{5}$.

Задача 2.4.11. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M(1;2;1) и параллельно вектору $\overrightarrow{AB}$, где A(1;-2;3), B(-1;2;0).

Ответ: $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-1}{-3}$.

Задача 2.4.12. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку P(1;1;-2) и параллельно другой прямой с уравнением: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+1}{-2}$.

Ответ: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{-2}$.

ГЛАВА 3. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1. Кривые второго порядка

Прежде чем приступить к рассмотрению задач данного параграфа, обратите внимание на теоретические вопросы курса лекций по аналитической геометрии параграфа 3.1 и 3.2.

Задача 3.1.1. Установите тип кривой, постройте её и определите все характеристики для данной кривой: $4x^2+16y^2-64=0$.

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A\cdot B=4\cdot 16$ положительно, то это уравнение эллиптического типа (см. таблицу классификации кривых), следовательно, оно может определять или эллипс, или мнимый эллипс, или точку.

2) Приведем данное уравнение к каноническому виду. Для этого перенесем свободное слагаемое в правую часть равенства и поделим на него обе части равенства:

$$4x^2+16y^2=64;$$

$$\frac{4x^2}{64}+\frac{16y^2}{64}=\frac{64}{64};$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

Получили каноническое уравнение эллипса вида: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

3) Найдём основные числовые характеристики эллипса:

a) a = 4 – большая полуось эллипса; b = 2 – малая полуось эллипса;

b) расстояние от центра до фокуса $c=\sqrt{a^2-b^2}$, то есть $c=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$;

c) эксцентриситет эллипса: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых:

a) центр кривой есть точка с координатами O(0;0);

b) уравнения осей симметрии кривой: ось OX с уравнением $y=0$– большая ось, ось OY с уравнением $x=0$– меньшая ось;

c) вершины эллипса: $A_1(-a;0)=(-4;0)$; $A_2(a;0)=(4;0)$; $B_1(0;-b)=(0;-2)$; $B_2(0;b)=(0;2)$;

d) фокусы: $F_1(-c;0)=(-2\sqrt{3};0)$; $F_2(c;0)=(2\sqrt{3};0)$

e) директрисы эллипса:

$$\ell_1 : x=-\frac{a}{\varepsilon}; x=-\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}};\ x=-\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

$$\ell_2 : x=\frac{a}{\varepsilon};\ x=\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}};\ x=\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

5) Выполним построение кривой (рис. 3.1.1):

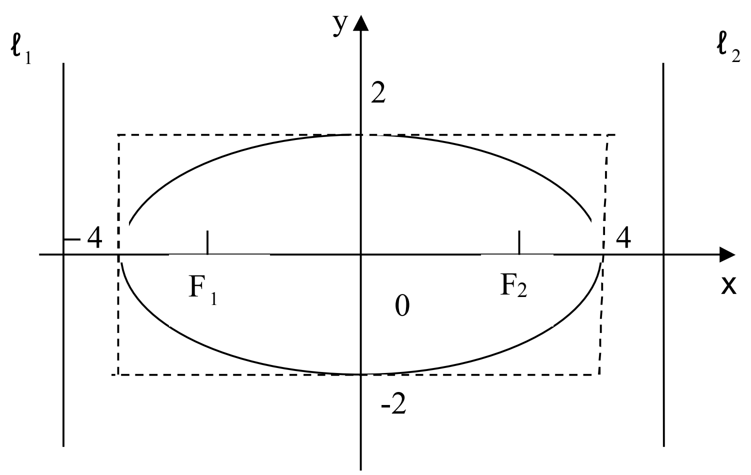

Рис. 3.1.1

Задача 3.1.2. Установите тип кривой, постройте её. Определите все характеристики для данной кривой: $25x^2+9y^2-225=0$.

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A\cdot B=25\cdot 9$ положительно, то это уравнение эллиптического типа (см. таблицу классификации кривых), следовательно, оно может определять или эллипс, или мнимый эллипс, или точку.

2) Приведем данное уравнение к каноническому виду. Для этого перенесем свободное слагаемое в правую часть равенства и поделим на него обе части равенства на 225:

$$25x^2 + 9y^2 = 225$$

$$\frac{25x^2}{225} + \frac{9y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Получили каноническое уравнение эллипса вида: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3) Определим основные числовые характеристики эллипса:

a) a = 3 – малая полуось эллипса; b = 5 – большая полуось эллипса;

b) расстояние от центра до фокуса $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, то есть $c = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$;

c) эксцентриситет эллипса: $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых:

a) центр кривой есть точка с координатами O(0;0);

b) уравнения осей симметрии кривой: ось OX с уравнением $y = 0$ – меньшая ось, ось OY с уравнением $x = 0$ – большая ось;

c) вершины эллипса: $A_1(-a;0) = (-3;0)$; $A_2(a;0) = (3;0)$; $B_1(0;-b) = (0;-5)$; $B_2(0;b) = (0;5)$;

d) фокусы: $F_1(0;-c)=(0;-4)$; $F_2(0;c)=(0;4)$;

e) директрисы эллипса: $\ell_1 : y = -\frac{b}{\varepsilon}$; $y = -\frac{25}{4}$

$$\ell_2 : y = \frac{b}{\varepsilon};\ y = \frac{25}{4}.$$

5) Выполним построение кривой (рис. 3.1.2):

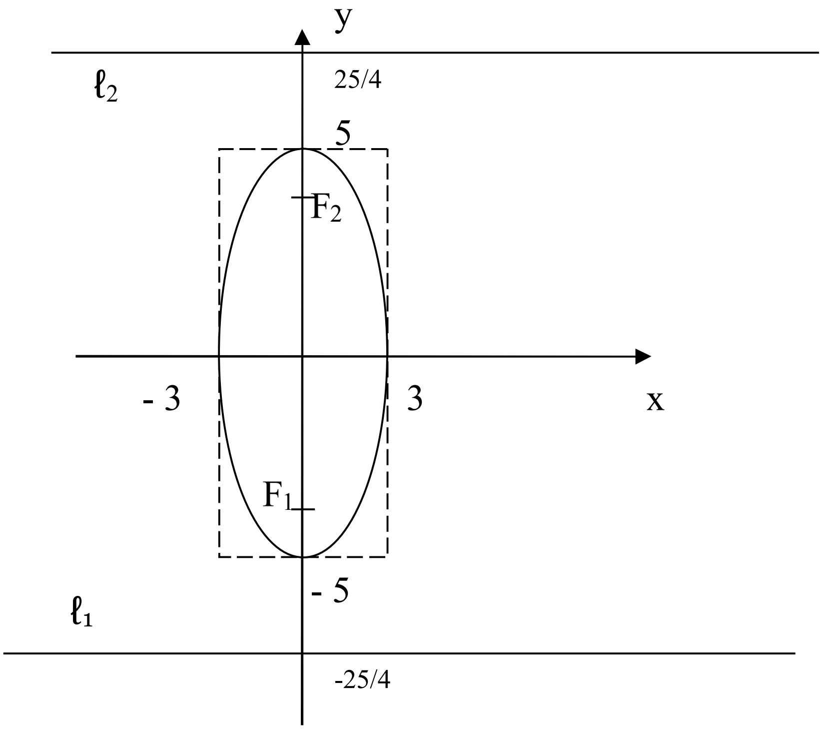

Рис. 3.1.2

Задача 3.1.3. Установите тип кривой, определите все характеристики для неё и выполните построение: $9x^2-16y^2-144=0$.

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A\cdot B=9\cdot(-16)$ отрицательно, то это уравнение гиперболического типа (см. таблицу классификации кривых), следовательно, оно может определять или гиперболу, или пару пересекающихся прямых.

2) Приведем данное уравнение к каноническому виду. Для этого свободное слагаемое перенесем в правую часть равенства, а затем поделим обе части равенства на 144:

$$9x^2-16y^2=144;$$

$$\frac{9x^2}{144}-\frac{16y^2}{144}=1;$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы вида $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

3) Определим основные числовые характеристики гиперболы:

a) a = 4 – действительная полуось гиперболы; b = 3 – мнимая полуось гиперболы;

b) расстояние от центра до фокуса $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$;

c) эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых:

a) центр кривой – точка с координатами O(0;0);

b) уравнения осей симметрии гиперболы: прямая с уравнением y = 0 – действительная ось, а прямая с уравнением x = 0 – мнимая ось симметрии кривой;

c) вершины гиперболы: A_1(-a;0) = (-4;0); A_2 (a;0) = (4;0);

d) координаты фокусов $F_1(-c;0)$, то есть $F_1(-5;0)$; $F_2(c;0)$, то есть $F_2(5;0)$.

e) составим уравнения директрис гиперболы:

$$\ell_1 : x=-\frac{a}{\varepsilon} \text{ или } \ell_1 : x=-\frac{4}{\frac{5}{4}}\ ;\ x=-\frac{16}{5}.$$

$$\ell_2 : x=\frac{a}{\varepsilon} \text{ или } \ell_2 : x=\frac{4}{\frac{5}{4}};\ x=\frac{16}{5}.$$

f) составим уравнения асимптот гиперболы:

$$y_1=-\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y_2=\frac{b}{a}x.$$

Для нашей гиперболы: $y_1=-\frac{3}{4}x$ и $y_2=\frac{3}{4}x$.

5) Выполним построение кривой (рис. 3.1.3):

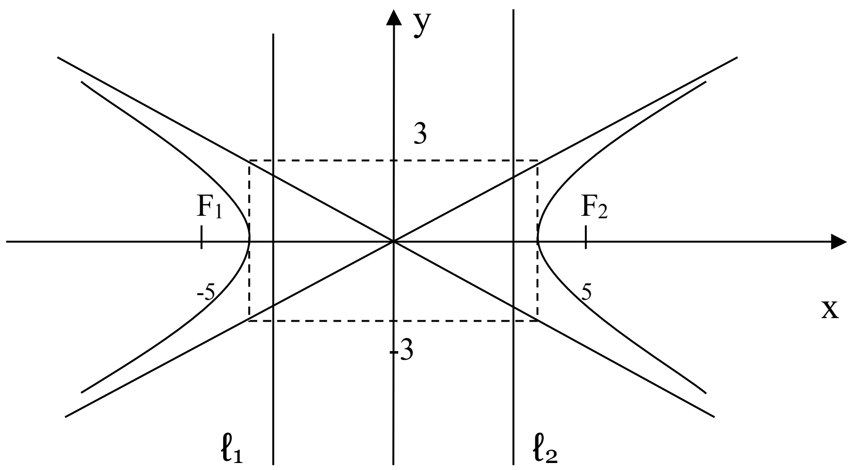

Рис. 3.1.3

Задача 3.1.4. Установите тип кривой, определите все характеристики для неё и выполните построение:

$$-36y^2+16x^2+576=0.$$

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A\cdot B=16\cdot(-36)$ отрицательно, то это уравнение гиперболического типа (см. таблицу классификации кривых), следовательно, оно может определять или гиперболу, или пару пересекающихся прямых.

2) Приведем данное уравнение к каноническому виду. Для этого свободное слагаемое перенесем в правую часть равенства и поделим обе части равенства на 576.

$$-36y^2+16x^2=-576;$$

$$\frac{-36y^2}{-576}+\frac{16x^2}{-576}=1;$$

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{36}=1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы вида $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ (или, что то же самое, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$).

3) Определим основные числовые характеристики гиперболы: а) a = 6 – мнимая полуось; b = 4 – действительная полуось;

b) расстояние от центра до фокуса: $c=\sqrt{b^2+a^2}$, $c=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$;

c) эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{52}}{4}$.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых:

a) центр кривой – точка с координатами O(0;0);

b) уравнения осей симметрии гиперболы: прямая с уравнением x = 0 – мнимая ось, прямая y = 0 – действительная ось;

c) вершины гиперболы: B_1(0;-b) = (0;-4) и B_2(0;b) = (0;4);

d) координаты фокусов: $F_1(0;-c)$; $F_2(0;c)$, таким образом: $F_1(0;-\sqrt{52})$; $F_2(0;\sqrt{52})$;

e) составим уравнения директрис гиперболы:

$\ell_1 : y=-\dfrac{b}{\varepsilon}$, $\ell_2 : y=\dfrac{b}{\varepsilon}$. Для нашей гиперболы

$$\ell_1 : y=-\frac{4}{\frac{\sqrt{52}}{4}} \text{ или } y=-\frac{16}{\sqrt{52}};$$

$$\ell_2 : y=\frac{4}{\frac{\sqrt{52}}{4}} \text{ или } y=\frac{16}{\sqrt{52}};$$

f) составим уравнения асимптот гиперболы:

$$y_1=-\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y_2=\frac{b}{a}x.$$

Для данной гиперболы:

$$y_1=-\frac{4}{6}x; \qquad y_2=\frac{4}{6}x.$$

5) Выполним построение кривой (рис. 3.1.4):

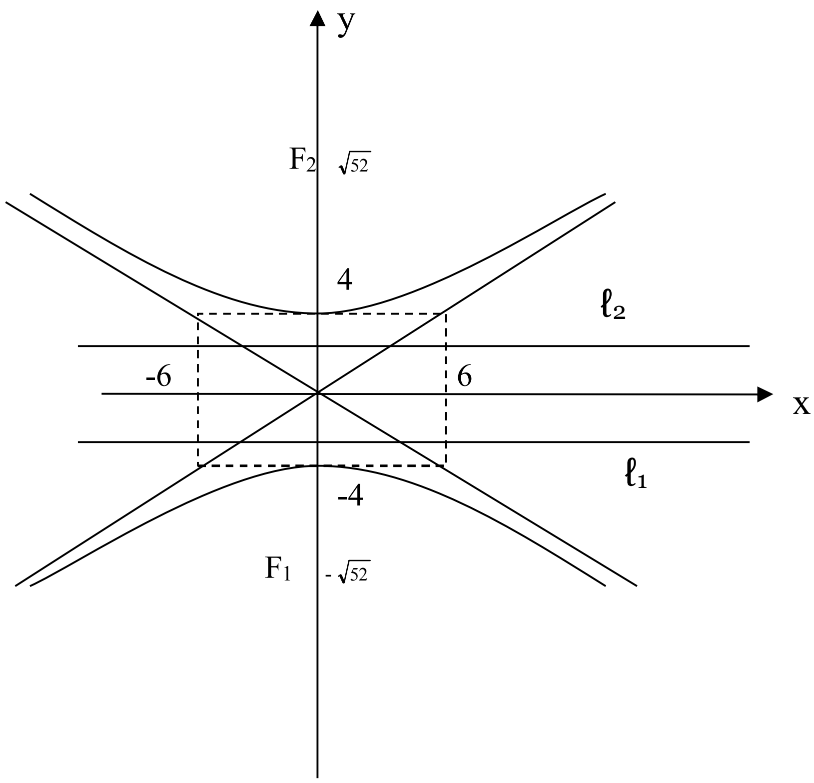

Рис. 3.1.4

Задача 3.1.5. Определить тип кривой, все характеристики для неё и построить её: $y^2 = 8x$.

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A \cdot B = 0 \cdot 1$ равно нулю, то это уравнение параболического типа (см. таблицу классификации кривых), следовательно, оно может определять или параболу, или пару параллельных прямых, или пару мнимых параллельных прямых, или пару совпадающих параллельных прямых.

2) Данное уравнение есть каноническое уравнение параболы вида: $y^2 = 2px$.

3) Определим числовую характеристику параболы: $2p = 8 \Rightarrow$ $p = 4$ – параметр параболы.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых параболы:

a) парабола не имеет центра симметрии;

b) осью симметрии параболы является прямая y = 0;

c) вершиной параболы является точка O(0;0);

d) фокусом параболы является точка F($\frac{p}{2}$;0) = (2;0);

e) директрисой является прямая с уравнением ℓ: x = $-\frac{p}{2}$ или x = -2.

5) Выполним построение (рис. 3.1.5):

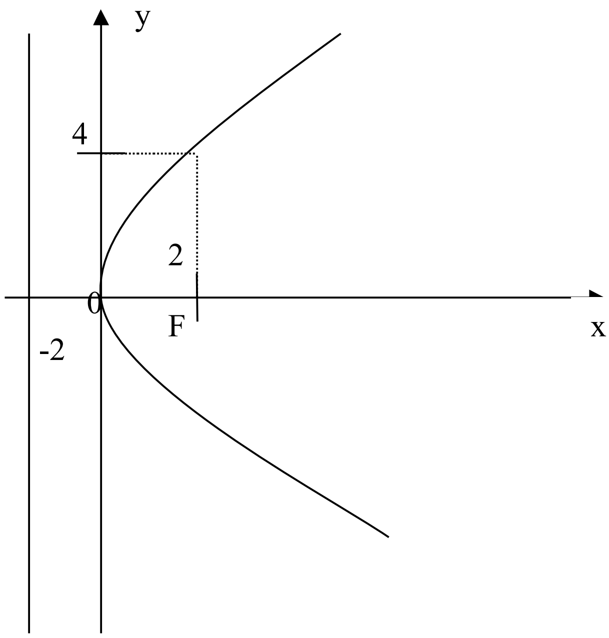

Рис. 3.1.5

Задача 3.1.6. Определите тип кривой, постройте её и найдите все характеристики:

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0.$$

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A \cdot B = 9 \cdot 4$ положительно, то это уравнение эллиптического типа, следовательно, оно может определять или эллипс, или мнимый эллипс, или точку.

2) Определим каноническое уравнение кривой. Для этого выделим полные квадраты:

$$(9x^2 - 18x) + (4y^2 + 16y) - 11 = 0,$$

$$9(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) - 11 = 0,$$

$$9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 11 = 0,$$

$$9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 4y + 4) - 16 - 11 = 0,$$

$$9(x-1)^2+4(y+2)^2-36=0,$$

$$9(x-1)^2+4(y+2)^2=36.$$

Поделим обе части последнего равенства на 36:

$$\frac{9(x-1)^2}{36}+\frac{4(y+2)^2}{36}=1,$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$$

Последнее равенство есть каноническое уравнение эллипса вида:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

где точка с координатами $(x_0;y_0)$ – центр эллипса.

Перейдем к новой системе координат $X'O'Y'$:

$$\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+2, \end{cases}$$

Тогда наше уравнение примет вид:

$$\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{9}=1.$$

Теперь хорошо видно, что данное уравнение определяет эллипс.

3) Найдем основные числовые характеристики эллипса:

a) a = 2 – меньшая полуось эллипса, b = 3 – большая полуось эллипса;

b) расстояние от центра до фокуса: $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$;

c) эксцентриситет эллипса: $\varepsilon=\frac{c}{b}$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых сначала в системе координат $X'O'Y'$, а затем, пользуясь формулами перехода $\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+2 \end{cases}$, в данной системе координат XOY.

a) центр кривой: $O'(0;0)$: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$. Таким образом, координаты центра эллипса O' в данной системе координат XOY будут: $O'(1;-2)$.

b) уравнения осей симметрии: эллипс имеет большую ось симметрии с уравнением в системе координат $X'O'Y'$: $y'=0$ и меньшую ось симметрии: $x'=0$. С учетом формул перехода: $y=-2$ – уравнение большей оси симметрии эллипса в данной системе координат XOY, а $x=1$ – уравнение меньшей оси симметрии;

c) вершины эллипса:

$A_1(-a;0)$: $\begin{cases} x' = -2 \\ y' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x-1=-2 \\ y+2=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$, то есть $A_1(-1;-2)$;

$A_2(a;0)$: $\begin{cases} x' = 2 \\ y' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x-1=2 \\ y+2=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$, $A_2(3;-2)$;

$B_1(0;-b)$: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -3 \end{cases}$, $\begin{cases} x-1=0 \\ y+2=-3 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=-5 \end{cases}$, $B_1(1;-5)$;

$B_2(0;b)$: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 3 \end{cases}$, $\begin{cases} x-1=0 \\ y+2=3 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$, $B_2(1;1)$.

d) фокусы эллипса:

$F_1(0;-c)$: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -\sqrt{5} \end{cases}$, $\begin{cases} x-1=0 \\ y+2=-\sqrt{5} \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=-2-\sqrt{5} \end{cases}$, то есть $F_1(1;-2-\sqrt{5})$;

$F_2(0;c)$: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = \sqrt{5} \end{cases}$, $\begin{cases} x-1=0 \\ y+2=\sqrt{5} \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=-2+\sqrt{5} \end{cases}$, то есть $F_2(1;-2+\sqrt{5})$.

e) уравнения директрис: $\ell_{1,2}:$ $y' = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ или $y' = \pm\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$, то есть $y' = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}$. В данной системе координат XOY уравнения директрис примут вид: $y+2=-\frac{9}{\sqrt{5}}$, или $y=-\frac{9}{\sqrt{5}}-2$. Вторая директриса в системе координат будет иметь вид: $y+2=\frac{9}{\sqrt{5}}$ или $y=\frac{9}{\sqrt{5}}-2$.

5) Осуществим сводку полученных результатов в таблице 3.1.1:

Таблица 3.1.1

Характеристики кривой	**Система координат** $x'o'y'$	**Система координат** xoy
Уравнение кривой	$\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{9}=1$	$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$
Полуоси	a = 2 – меньшая полуось; b = 3 – большая полуось	
Расстояние от центра до фокуса	$c=\sqrt{5}$	
Эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{3}$	
Центр кривой	o' (0; 0)	o' (1;-2)
Вершины	$A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(0;-3)$, $B_2(0;3)$	$A_1(-1;-2)$, $A_2(3;-2)$, $B_1(1;-5)$, $B_2(1;1)$
Фокусы	$F_1(0;-\sqrt{5})$; $F_2(0;\sqrt{5})$	$F_1(1;-\sqrt{5}-2)$; $F_2(1;\sqrt{5}-2)$
Директрисы	$\ell_{1,2}: y'=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}$	$\ell_{1,2}: y=\pm\frac{9}{\sqrt{5}}-2$

6) Выполним построение кривой (рис. 3.1.6):

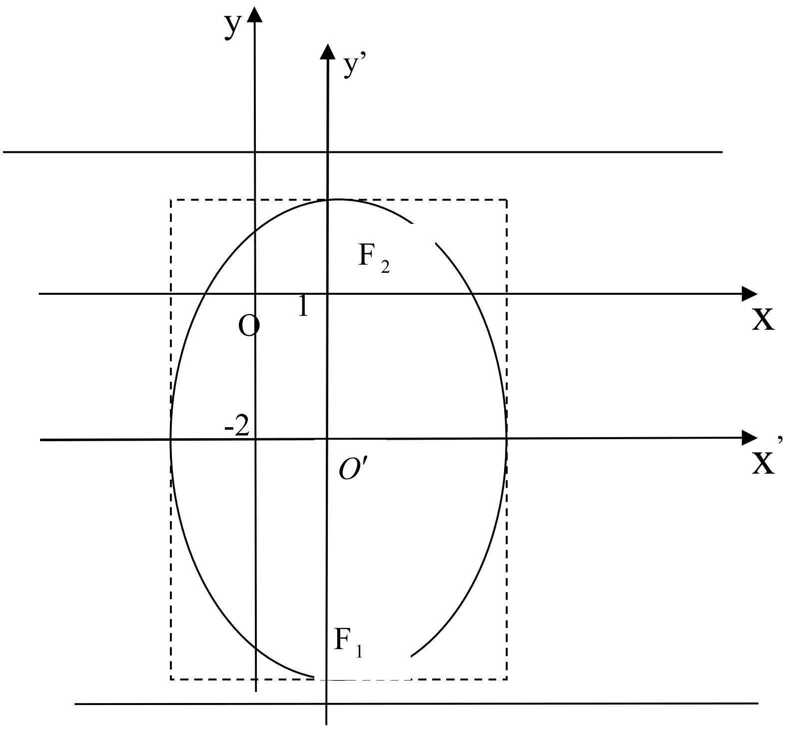

Рис. 3.1.6

Задача 3.1.7. Определите тип кривой, постройте её и найдите все характеристики:

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0.$$

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A \cdot B = 9 \cdot (-16)$ отрицательно, то это уравнение гиперболического типа, следовательно, оно может определять или гиперболу, или пару пересекающихся прямых.

2) Определим каноническое уравнение кривой. Для этого выделим полные квадраты:

$$(9x^2 - 36x) + (-16y^2 - 32y) - 124 = 0$$

$$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) - 124 = 0$$

$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 16(y^2 + 2y + 1 - 1) - 124 = 0$$

$$9(x^2 - 4x + 4) - 36 - 16(y^2 + 2y + 1) + 16 - 124 = 0$$

$$9(x-2)^2 - 36 - 16(y+1)^2 + 16 - 124 = 0$$

$$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 - 144 = 0$$

$$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144.$$

Поделим обе части равенства на 144:

$$\frac{9(x-2)^2}{144}-\frac{16(y+1)^2}{144}=1;$$

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1.$$

Последнее равенство есть каноническое уравнение гиперболы вида:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

где точка с координатами $(x_0;y_0)$ – центр гиперболы.

Перейдём к новой системе координат $X'O'Y'$:

$$\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y+1 \end{cases}.$$

Тогда уравнение кривой примет вид:

$$\frac{(x')^2}{16}-\frac{(y')^2}{9}=1.$$

3) Найдем числовые характеристики кривой.

a) a = 4 – действительная полуось гиперболы, b = 3 – мнимая полуось гиперболы;

b) расстояние от центра до фокуса: $c=\sqrt{b^2+a^2}$, $c=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$;

c) эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\frac{c}{a}$; $\varepsilon=\frac{5}{4}$.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых сначала в системе координат $X'O'Y'$, а затем, пользуясь формулами перехода $\begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y+1 \end{cases}$, в данной системе координат XOY.

a) центр кривой – точка $O'(0;0)$ – в системе координат $X'O'Y'$. Найдем координаты центра в системе координат XOY: $\begin{cases} x-2=0 \\ y+1=0 \end{cases}$, или $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$. Таким образом, центр имеет координаты $O'(2;\text{-}1)$ в системе координат XOY;

b) уравнения осей симметрии: данная гипербола имеет действительную ось симметрии с уравнением в системе координат $X'O'Y'$: $y' = 0$ и мнимую ось симметрии с уравнением: $x' = 0$. С учетом формул перехода: $y = -1$ – уравнение действительной оси симметрии кривой в данной системе координат XOY, а $x = 2$ – уравнение мнимой оси симметрии;

c) вершины гиперболы:

$A_1(-a;0)$: $\begin{cases} x' = -4 \\ y' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2 = -4 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$, то есть $A_1(-2;-1)$ – координаты первой вершины в системе координат XOY;

$A_2(a;0)$: $\begin{cases} x' = 4 \\ y' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2 = 4 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$, $A_2(6;-1)$– координаты второй вершины в системе координат XOY;

d) фокусы эллипса:

$F_1(-c;0)$: $\begin{cases} x' = -5 \\ y' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2 = -5 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$, то есть $F_1(-3;-1)$– координаты фокуса в системе координат XOY;

$F_2(c;0)$: $\begin{cases} x' = 5 \\ y' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x - 2 = 5 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases}$, то есть $F_2(7;-1)$– координаты фокуса в системе координат XOY;

e) уравнения директрис: $\ell_{1,2}:\ x' = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ или $x' = \pm\dfrac{4}{\frac{5}{4}}$, то есть $x' = \pm\dfrac{16}{5}$. В данной системе координат XOY уравнения директрис примут вид: $x - 2 = -\dfrac{16}{5}$, или $x = -\dfrac{16}{5} + 2$. Вторая директриса в системе координат будет иметь вид: $x - 2 = \dfrac{16}{5}$ или $x = \dfrac{16}{5} + 2$;

f) уравнения асимптот:

$$y_1' = -\frac{b}{a}x' \quad \text{и} \quad y_2' = \frac{b}{a}x'$$

Для данной гиперболы:

$$y_1' = -\frac{4}{3}x'; \qquad y_2' = \frac{4}{6}x'.$$

Найдём уравнения асимптот гиперболы в системе координат XOY.

$$y+1 = -\frac{4}{3}\cdot(x-2) \text{ или } y = -\frac{4}{3}\cdot x + \frac{5}{3}.$$

Вторая асимптота: $y+1 = \frac{4}{3}\cdot(x-2)$ или $y = \frac{4}{3}\cdot x - \frac{11}{3}$.

5) Осуществим сводку полученных результатов в таблице 3.1.2:

Таблица 3.1.2

Характеристики кривой	**Система координат** $x'o'y'$	**Система координат** xoy
Уравнение кривой	$\frac{(x')^2}{16} - \frac{(y')^2}{9} = 1$	$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
Полуоси	a = 4– действительная полуось; b = 3 – мнимая полуось	
Расстояние от центра до фокуса	$c = 5$	
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{5}{4}$	
Центр кривой	o' (0; 0)	o' (2;-1)
Вершины	$A_1(-4;0)$, $A_2(4;0)$	$A_1(-2;-1)$, $A_2(6;-1)$
Фокусы	$F_1(-5;0)$; $F_2(5;0)$	$F_1(-3;-1)$, $F_2(7;-1)$
Директрисы	$x' = \pm\frac{16}{5}$	$x = -\frac{16}{5}+2$; $x = \frac{16}{5}+2$
Асимптоты	$y_1' = -\frac{4}{3}x'$; $y_2' = \frac{4}{6}x'$.	$y = -\frac{4}{3}\cdot x + \frac{5}{3}$; $y = \frac{4}{3}\cdot x - \frac{11}{3}$

6) Выполним построение кривой (рис. 3.1.7):

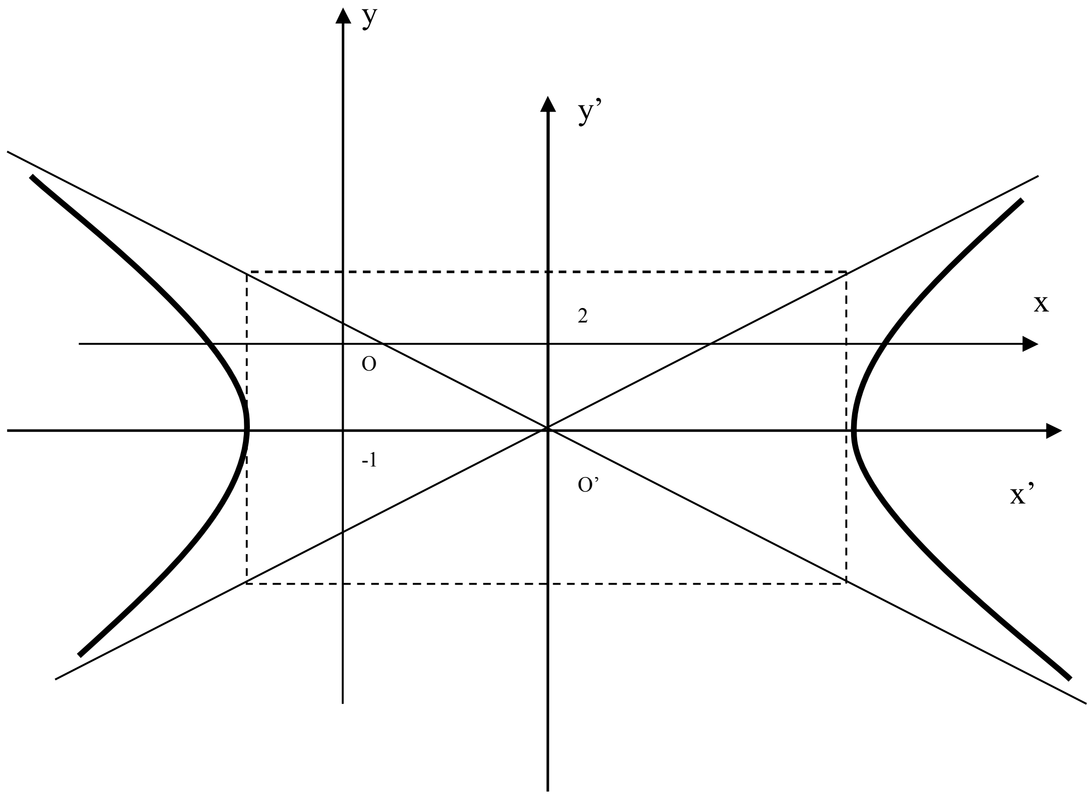

Рис. 3.1.7

Задача 3.1.8. Определите тип кривой, постройте её и найдите все характеристики:

$$y^2 - 4y - 3x + 1 = 0.$$

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A \cdot B = 0 \cdot 1$ равно нулю, то это уравнение параболического типа, следовательно, оно может определять или параболу, или пару параллельных прямых, или пару мнимых параллельных прямых, или пару совпадающих параллельных прямых;

2) Определим каноническое уравнение кривой. Для этого сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$(y^2 - 4y) - 3x + 1 = 0$$

$$(y^2 - 4y + 4) - 4 - 3x + 1 = 0$$

$$(y-2)^2 - 3x - 3 = 0$$

$$(y-2)^2 = 3x + 3$$

$$(y-2)^2 = 3(x+1).$$

Перейдём к новой системе координат $X'O'Y'$, сделаем замену вида:

$\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y-2 \end{cases}$, тогда уравнение примет вид:

$$(y')^2 = 3 \cdot x'.$$

Теперь хорошо видно, что данное уравнение определяет параболу.

3) Определим числовую характеристику параболы: $2p = 3 \Rightarrow$ $p = \dfrac{3}{2}$ – параметр параболы.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых параболы:

а) парабола не имеет центра симметрии;

b) осью симметрии параболы является прямая $x' = 0$. Найдем уравнение оси симметрии в системе координат XOY: $x - 2 = 0$ или $x = 2$;

c) вершиной параболы является точка с координатами $O'(0;0)$ в системе координат $X'O'Y'$. Найдем координаты вершины в системе координат XOY: $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1 = 0 \\ y-2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$. Таким образом, координаты центра: O'(-1;2) – в системе координат XOY;

d) фокусом параболы является точка F($\dfrac{p}{2}$;0)=($\dfrac{3}{4}$;0) – в системе координат $X'O'Y'$. $\begin{cases} x' = \dfrac{3}{4}, \\ y' = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+1 = \dfrac{3}{4}, \\ y-2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}, \\ y = 2 \end{cases}$ то есть F($-\dfrac{1}{4}$;2) – в XOY;

e) директрисой является прямая с уравнением ℓ: $x' = -\dfrac{p}{2}$ или $x' = -\dfrac{3}{4}$. В системе XOY: $x+1 = -\dfrac{3}{4}$, или $x = -\dfrac{7}{4}$.

5) Выполним построение параболы (рис. 3.1.8)

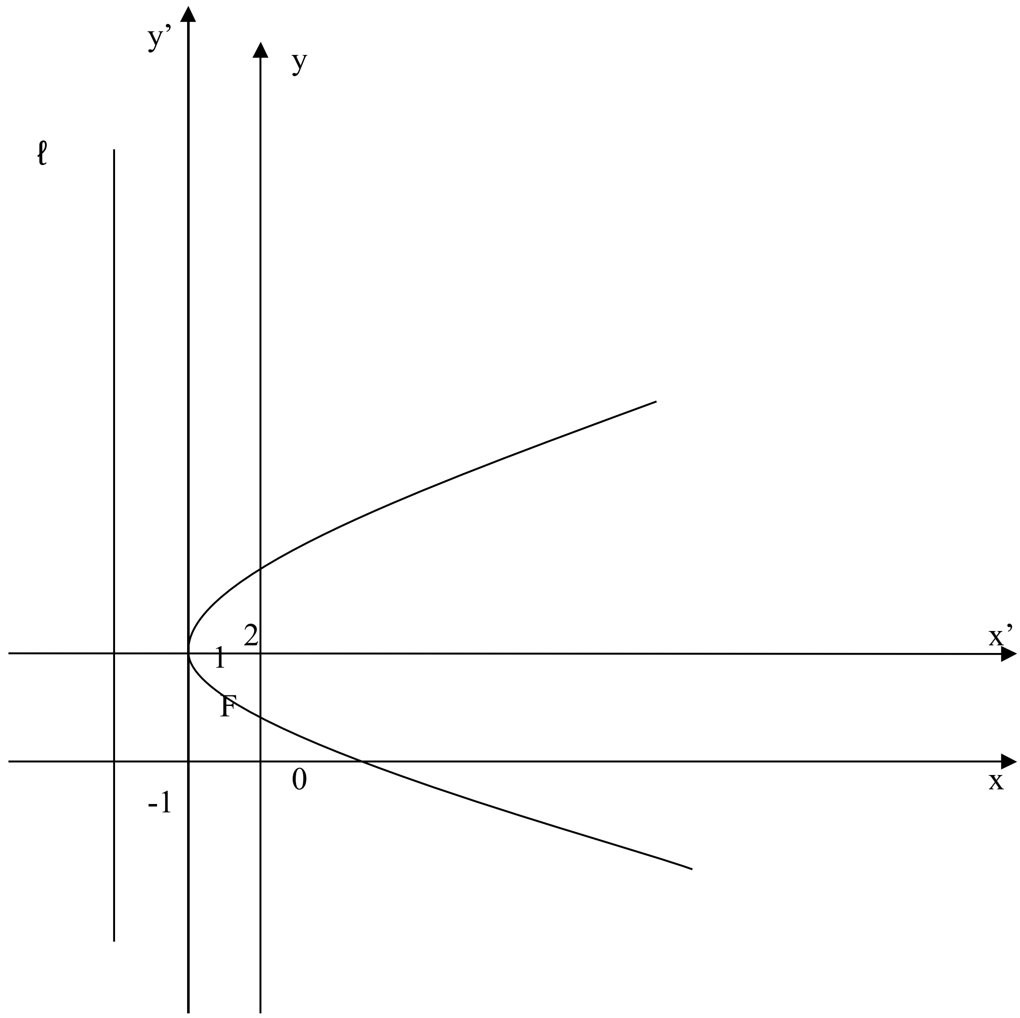

Рис. 3.1.8

3.2. Поверхности второго порядка

Прежде, чем приступить к выполнению задач данного параграфа, необходимо рассмотреть теоретический материал параграфа 3.3 курса лекций по аналитической геометрии.

Задача 3.2.1. Определите тип поверхности и постройте её:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1.$$

Решение. Данное уравнение представляет собой каноническое уравнение поверхности (П) второго порядка – эллипсоида. Для его построения воспользуемся методом параллельных сечений, то есть рассмотрим сечения данной поверхности координатными плоскостями (или плоскостями параллельными координатным). По виду сечений восстановим вид самой поверхности.

1) Рассмотрим сечение данной поверхности П плоскостью XOY:

Уравнение плоскости XOY: z = 0. Подставим это значение в уравнение поверхности: $\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1 \end{cases}$,

получим:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Данное уравнение определяет в плоскости XOY кривую второго порядка – эллипс.

2) Рассмотрим сечение данной поверхности П плоскостью YOZ.

Её уравнение x = 0: $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1 \end{cases}$,

получим

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

Данное уравнение определяет в плоскости YOZ кривую второго порядка – эллипс.

3) Рассмотрим сечение данной поверхности П плоскостью XOZ.

Её уравнение y = 0: $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1 \end{cases}$,

получим:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

Данное уравнение определяет в плоскости XOZ кривую второго порядка – эллипс.

Выполним построение данной поверхности (рис. 3.2.1):

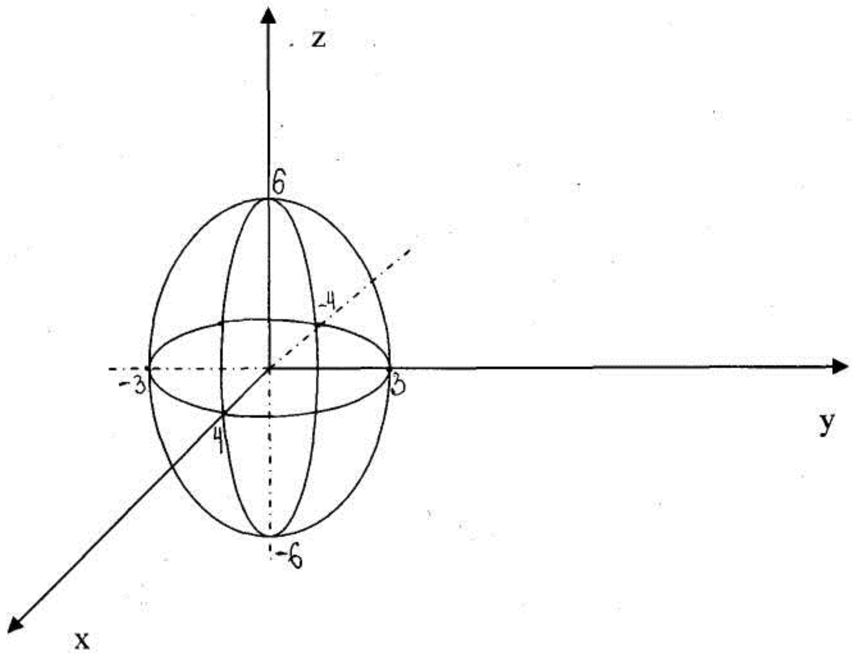

Рис. 3.2.1

Задача 3.2.2. Определите тип поверхности и постройте её:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=-1.$$

Решение. Данное уравнение представляет собой каноническое уравнение поверхности (П) второго порядка – двуполостного гиперболоида. Выполним построение данной поверхности методом параллельных сечений.

1) $П\bigcap XOY:\quad \begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{16}=-1 \end{cases},$

получим:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=-1 \text{ или } \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1.$$

Получили в плоскости XOY каноническое уравнение кривой второго порядка – гиперболы.

2) $П \bigcap XOZ: \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = -1 \end{cases}$,

получим:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = -1 -$$

данному уравнению не удовлетворяет ни одна точка плоскости, то есть с плоскостью XOZ данная поверхность не пересекается.

3) $П \bigcap YOZ: \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = -1 \end{cases}$,

Получим:

$$-\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = -1 \text{ или } \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

Получили в плоскости YOZ каноническое уравнение кривой второго порядка – гиперболы.

4) Рассмотрим сечение данной поверхности вспомогательными плоскостями, параллельными плоскости XOZ. Уравнениями таких плоскостей будут уравнения вида: y=h и y=-h (где $|h|$>5). Пусть h=$\pm$7. Тогда:

$$\begin{cases} y = \pm 7 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = -1 \end{cases},$$

получим:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{49}{25} + \frac{z^2}{16} = -1 \text{ или } \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = \frac{24}{25}.$$

Поделив обе части последнего равенства на $\dfrac{24}{25}$, получим каноническое уравнение кривой второго порядка – эллипса. Таким образом, при пересечении поверхности плоскостями, параллельными плоскости XOZ, в сечениях будем получать эллипсы.

Выполним построение данной поверхности (рис. 3.2.2):

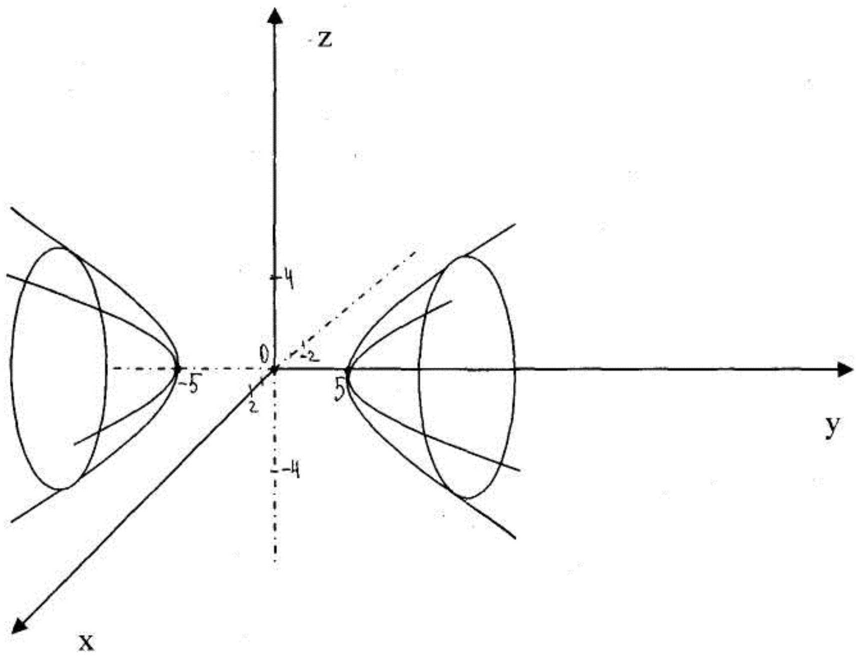

Рис. 3.2.2

Задача 3.2.3. Определите тип поверхности и постройте её:

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

Решение. Данное уравнение представляет собой каноническое уравнение поверхности (П) второго порядка – эллиптического параболоида. Выполним построение данной поверхности методом параллельных сечений.

1) $П \cap XOY: \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}, \end{cases}$

получим:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0.$$

Данное уравнение в плоскости XOY определяет одну точку с координатами O(0;0).

2) $П \cap XOZ: \begin{cases} y = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \end{cases},$

получим:

$$z = \frac{x^2}{4} \text{ или } x^2 = 4z$$

Вывели в плоскости XOZ каноническое уравнение кривой второго порядка – параболы, симметричной относительно оси OZ.

3) $\Pi \cap YOZ: \begin{cases} x = 0 \\ z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \end{cases},$

получим

$$z = \frac{y^2}{9} \text{ или } y^2 = 9z -$$

в плоскости YOZ каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси OZ.

4) Рассмотрим сечение данной поверхности вспомогательной плоскостью, параллельной плоскости XOY. Уравнением такой плоскости будет z = h (причем h > 0).

$$\begin{cases} z = 2 \\ z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \end{cases},$$

получим:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2.$$

Поделив обе части последнего равенства на 2, вывели каноническое уравнение кривой второго порядка – эллипса. Таким образом, при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными плоскости XOY, в сечениях будут получаться эллипсы.

Выполним построение поверхности (рис. 3.2.3):

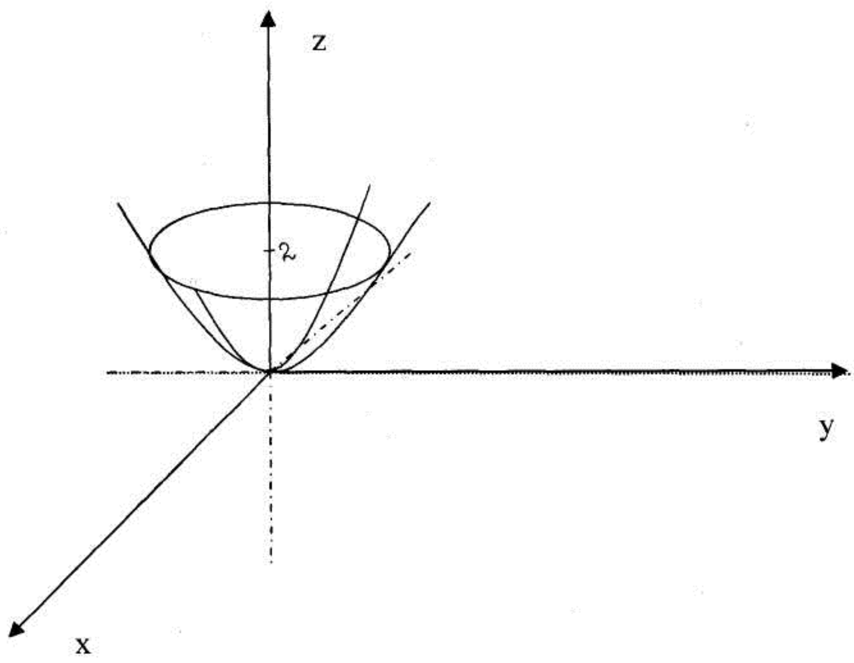

Рис. 3.2.3

Задача 3.2.4. Определите тип поверхности и постройте её:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1.$$

Решение. Данное уравнение представляет собой каноническое уравнение поверхности (П) второго порядка – эллиптического цилиндра. Выполним построение данной поверхности методом параллельных сечений.

1) $\Pi \cap XOZ: \quad \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1 \end{cases},$

получим:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1 -$$

каноническое уравнение кривой второго порядка – эллипса – в плоскости XOZ.

2) $\Pi \cap XOY: \quad \begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1 \end{cases},$

получим:

$$\frac{x^2}{9}=1,\ \text{или}\ x^2=9,\ \text{или}\ x=\pm 3.$$

В плоскости XOY вывели уравнения двух параллельных прямых.

3) $\Pi \bigcap YOZ: \begin{cases} x=0 \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1 \end{cases},$

получим:

$$\frac{z^2}{16}=1,\ \text{или}\ z^2=16,\ \text{или}\ z=\pm 4.$$

В плоскости YOZ получили уравнения двух параллельных прямых.

4) Рассмотрим сечение данной поверхности вспомогательными плоскостями, параллельными плоскости XOZ. Уравнениями таких плоскостей будут вида: y = h и y = -h (причем h – любое). Пусть h = 4.

$$\begin{cases} y=\pm 4 \\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1 \end{cases},$$

получим:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1\ -$$

каноническое уравнение эллипса в плоскостях $y=\pm 4$, параллельных плоскости XOZ.

Выполним построение поверхности (рис. 3.2.4):

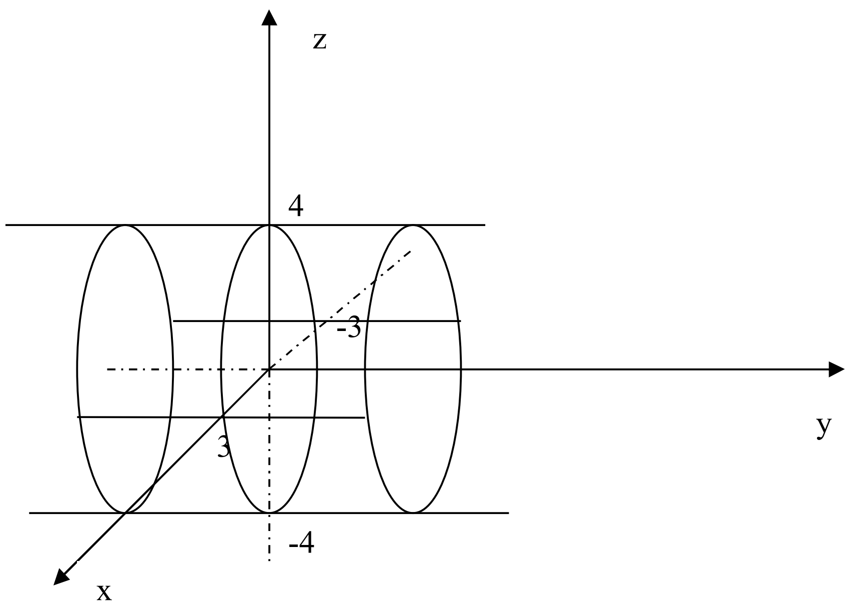

Рис. 3.2.4

Задача 3.2.5. Определите тип поверхности и постройте её:

$$z = 2 \cdot y^2.$$

Решение. Данное уравнение представляет собой каноническое уравнение поверхности (П) второго порядка – параболического цилиндра. Выполним построение данной поверхности методом параллельных сечений.

1) $П \cap XOY$: $\begin{cases} z = 0 \\ z = 2y^2 \end{cases}$,

получим:

$$2y^2 = 0, \text{ или } y = 0.$$

Вывели в плоскости XOY уравнение прямой, совпадающей с осью OX. Таким образом, ось OX принадлежит нашей поверхности.

2) $П \cap XOZ$: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2y^2 \end{cases}$,

получим:

$$z = 0.$$

Вывели в плоскости XOZ уравнение прямой, совпадающей с осью OX.

3) $\Pi \bigcap YOZ: \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y^2 \end{cases},$

получим:

$$z = 2 \cdot y^2 -$$

каноническое уравнение параболы в плоскости YOZ.

4) Рассмотрим вспомогательное сечение данной поверхности плоскостью, параллельной плоскости YOZ. Уравнение такой плоскости x = h (h – любое).

$$\begin{cases} x = 8 \\ z = 2y^2 \end{cases},$$

получим:

$$z = 2 \cdot y^2 -$$

каноническое уравнение параболы в плоскости x = 8, параллельной плоскости YOZ.

Выполним построение поверхности (рис. 3.2.5):

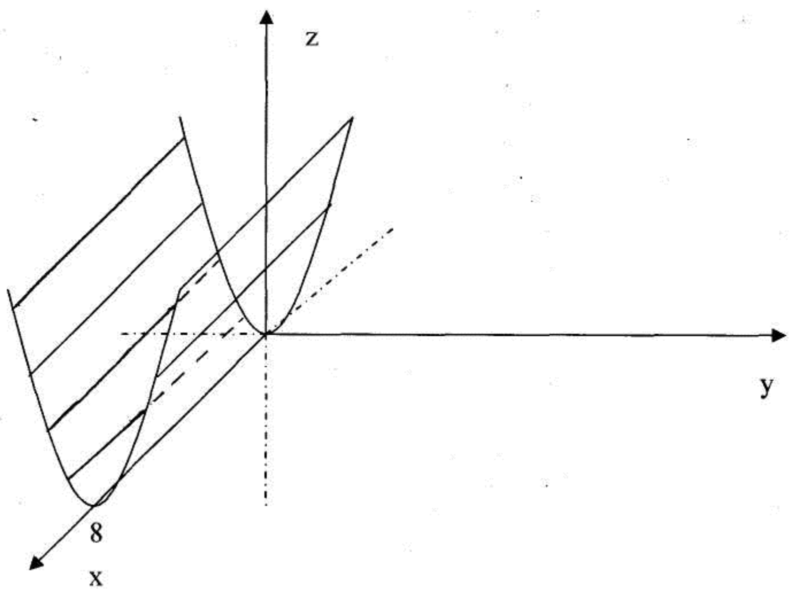

Рис. 3.2.5

Задача 3.2.6. Определите тип поверхности и постройте её:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Решение. Данное уравнение представляет собой каноническое уравнение поверхности (П) второго порядка – гиперболического цилиндра. Выполним построение данной поверхности методом параллельных сечений.

1) $П \bigcap XOZ: \quad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1 \end{cases},$

получим:

$$-\frac{x^2}{9} = 1, \; x^2 = -9.$$

Данному уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости XOZ. Таким образом, с плоскостью XOZ данная поверхность не пересекается.

2) $П \bigcap XOY: \quad \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1 \end{cases},$

получим:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \; –$$

в плоскости XOY каноническое уравнение кривой второго порядка – гиперболы.

3) $П \bigcap YOZ: \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1 \end{cases},$

получим

$$\frac{y^2}{16} = 1, \text{ или } y^2 = 16, \text{ или } y = \pm 4.$$

В плоскости YOZ вывели уравнения двух параллельных прямых.

4) Рассмотрим сечение данной поверхности вспомогательными плоскостями, параллельными плоскости YOX. Уравнениями таких плоскостей будут вида: z = h и z = -h (причем h – любое). Пусть h = 4.

$$\begin{cases} z = \pm 4 \\ \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1 \end{cases},$$

получим:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \;-$$

каноническое уравнение гиперболы в плоскостях $z = \pm 4$, параллельных плоскости YOX.

Выполним построение поверхности (рис. 3.2.6):

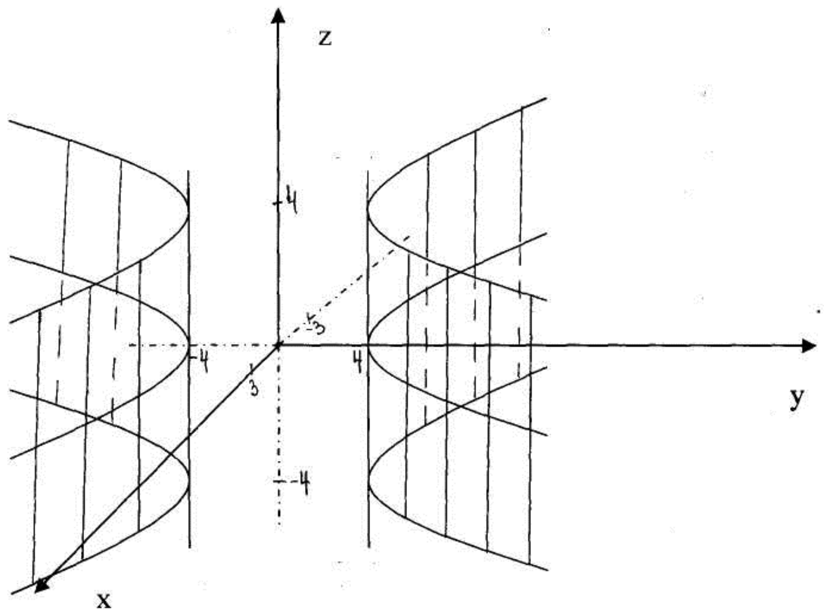

Рис. 3.2.6

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3.1. Определите тип кривой, все её характеристики и выполните построение кривой:

$$25 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 - 100 = 0.$$

Ответ: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$ – гипербола, a = 2, b = 5, $F_1(-\sqrt{29};0), F_2(\sqrt{29};0)$,

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{29}}{2},\ \ell_{1,2}:\ x=\frac{4}{\sqrt{29}} \text{ и } x=-\frac{4}{\sqrt{29}},\ y=\pm\frac{5}{2}\ \cdot x.$$

Задача 3.3.2. Определите тип кривой, все её характеристики и выполните построение:

$$81\cdot x^2+9\cdot y^2-729=0.$$

Ответ: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{81}=1$ – эллипс, a = 3, b = 9, $F_1(0;-\sqrt{72}), F_2(0;\sqrt{72})$,

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{72}}{9},\ \ell_{1,2}:\ y=\pm\frac{81}{\sqrt{72}}.$$

Задача 3.3.3. Определите тип кривой, все её характеристики и постройте её:

$$4\cdot x^2+64\cdot y^2-256=0.$$

Ответ: $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{4}=1$ – эллипс, a = 8, b = 2, $F_1(-\sqrt{60};0), F_2(\sqrt{60};0)$,

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{60}}{8},\ \ell_{1,2}:\ x=\frac{64}{\sqrt{60}} \text{ и } x=-\frac{64}{\sqrt{60}}$$

Задача 3.3.4. Определите тип кривой, её характеристики и постройте её:

$$-49\cdot x^2+9\cdot x^2-441=0.$$

Ответ: $\frac{y^2}{49}-\frac{x^2}{9}=1$ – гипербола, a = 3, b = 7, $F_1(0;-\sqrt{58}), F_2(0;\sqrt{58})$,

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{58}}{7},\ \ell_{1,2}:\ y=\frac{49}{\sqrt{58}} \text{ и } y=-\frac{49}{\sqrt{58}},\ y=\pm\frac{7}{3}\ \cdot x.$$

Задача 3.3.5. Определите тип кривой, её характеристики и постройте её:

$$x^2=10\cdot y.$$

Ответ: парабола с осью симметрии – осью OY, p = 5,

$$F(0;\frac{5}{2}),\ y=-\frac{5}{2}.$$

Задача 3.3.6. Определите тип кривой, её характеристики и постройте её:

$$y^2 = 6 \cdot x.$$

Ответ: парабола с осью симметрии – осью OX, p = 3,

$$F(\frac{3}{2};0), x = -\frac{3}{2}$$

Задача 3.3.7. Определите тип кривой, её характеристики и постройте её:

$$16 \cdot x^2 + 4 \cdot y^2 - 32 \cdot x + 40 \cdot y + 52 = 0.$$

Ответ: $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{16} = 1$ – эллипс, a = 2, b = 4,

$F_1(1;-\sqrt{12}-5); F_2(1;\sqrt{12}-5)$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{12}}{4}$, $\ell_{1,2}:\ y = \pm\frac{16}{\sqrt{12}} - 5$.

Задача 3.3.7. Определите тип кривой, её характеристики и постройте её:

$$9 \cdot x^2 - 16 \cdot y^2 - 90 \cdot x - 32 \cdot y + 65 = 0.$$

Ответ: $\frac{(x-5)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ – гипербола, a = 4, b = 3,

$F_1(0;-1), F_2(10;-1), \varepsilon = \frac{5}{4}$, $\ell_{1,2}:\ x = \frac{9}{5}$ и $x = \frac{41}{5}$; $y = \pm\frac{3}{4}(x-5) - 1$.

Задача 3.3.8. Определите тип кривой, её характеристики и постройте её:

$$y^2 - 4 \cdot y - 4 \cdot x = 0.$$

Ответ: $(y-2)^2 = 4 \cdot (x+1)$ – парабола, p = 2, F(0;2), x = -2.

Задача 3.3.9. Определите тип поверхности и постройте её:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1.$$

Ответ: двуполостный гиперболоид.

Задача 3.3.10. Определите тип поверхности и постройте её:

$$y = \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{16}.$$

Ответ: эллиптический параболоид.

Задача 3.3.11. Определите тип поверхности и постройте её:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Ответ: эллиптический цилиндр.

Задача 3.3.12. Определите тип поверхности и постройте её:

$$y^2=6\cdot x\,.$$

Ответ: параболический цилиндр.

ГЛАВА 4. НУЛЕВОЙ ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

4.1. Нулевой вариант контрольной работы

Задача 4.1.1. Вычислите определитель третьего порядка двумя способами: используя правило Саррюса (правило треугольников) и разложив его по элементам первой строки: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. I способ (правило Саррюса):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot 0\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 3 + (-2)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 1 - 4\cdot(-2)\cdot 1 = 0 + 36 - 4 - 0 - 3 + 8 = 37$$

II способ (разложение определителя по элементам первой строки):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(0-3) + 2\cdot(4-2) + 3\cdot(12-0) = -3 + 4 + 36 = 37$$

Задача 4.1.2. Дан треугольник ABC, BK – медиана треугольника, MN – средняя линия треугольника (MN II AC). Точка O – точка пересечения MN и AC. Найдите разложения векторов $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{AN}$ через базисные векторы B = $\{\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OM}\}$ (рис. 4.1.1).

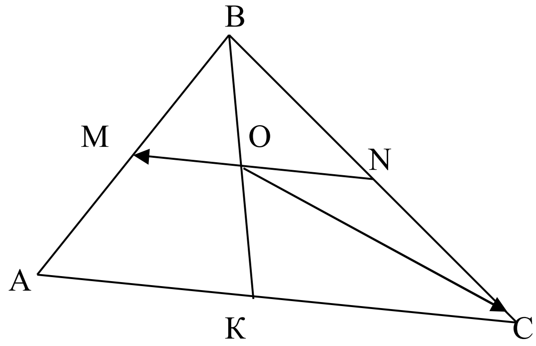

Рис. 4.1.1

Решение. 1) Рассмотрим треугольник MOC. Разложим вектор $\overrightarrow{CM}$ через линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{CO}$ и $\overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM}.$$

Таким образом, координаты вектора $\overrightarrow{CM}$ (-1;1).

2) Рассмотрим треугольник ONC. Разложим вектор $\overrightarrow{NC}$ через линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{NO}$ и $\overrightarrow{OC}$:

$$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OC}.$$

Векторы $\overrightarrow{NO}$ и $\overrightarrow{OM}$ имеют одинаковое направление и одинаковую длину (так как отрезки OM и ON равны между собой). В этой связи можно утверждать, что векторы $\overrightarrow{NO} = \overrightarrow{OM}$. Тогда разложение вектора $\overrightarrow{NC}$ примет вид:

$$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}.$$

Вектор $\overrightarrow{NC}$ имеет координаты: $\overrightarrow{NC}$ *(1;1).*

3) Найдем разложение вектора $\overrightarrow{CB}$. Вектор $\overrightarrow{CB}$ по длине в два раза больше вектора $\overrightarrow{NC}$, векторы $\overrightarrow{NC}$ и $\overrightarrow{CB}$ противоположно направлены. Поэтому можно записать следующее равенство:

$$\overrightarrow{CB} = -2 \cdot \overrightarrow{NC},$$

$$\overrightarrow{CB} = -2 \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}) = -2 \cdot \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Таким образом, координаты вектора $\overrightarrow{CB}$ (-2;-2).

4) Найдём разложение вектора $\overrightarrow{OB}$. Рассмотрим треугольник OBC. Из данного треугольника:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}.$$

Вектор $\overrightarrow{CB}$ представлен в виде линейной комбинации базисных векторов в третьей части задачи. Подставим его:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + (-2 \cdot \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{OC}) = -\overrightarrow{OC} - 2 \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{OB}$ (-1;-2).

5) Вектор $\overrightarrow{KM}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{KO}$ и $\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OM}.$$

Вектор $\overrightarrow{OM}$ является базисным, вектор $\overrightarrow{KO}$ равен вектору $\overrightarrow{OB}$, так как векторы имеют одно направление и длины этих векторов равны. Вектор $\overrightarrow{OB}$ был разложен через базисные векторы в 4-й части задачи, воспользуемся им:

$$\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{OC} - 2 \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{KM}$ (-1;-1).

6) Вектор $\overrightarrow{AN}$ представим в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CM}$:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{NC}.$$

Разложение вектора $\overrightarrow{NC}$ было получено во второй части задачи. Вектор $\overrightarrow{AC}$ равен вектору $2 \cdot \overrightarrow{MN}$, так как векторы имеют одинаковое направление, а длина вектора $\overrightarrow{AC}$ в два раза больше длины вектора $\overrightarrow{MN}$, так как из школьного курса геометрии известно, что длина средней линии треугольника в два раза меньше длины основания. Учитывая это, разложение вектора $\overrightarrow{AN}$ примет вид:

$$\overrightarrow{AN} = 2 \cdot \overrightarrow{MN} - (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC}) = 2 \cdot 2 \cdot (-\overrightarrow{OM}) - \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = -5 \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}.$$

Таким образом, координаты вектора $\overrightarrow{AN}$ (-1;-5).

Задача 4.1.3. Дан треугольник ABC. BK – медиана, BD – высота. Составьте уравнения прямых : 1) BD; 2) BK; 3) ℓ, такой что B∈ ℓ и ℓ II AC. Найдите расстояние от точки B до прямой AC, если точки A, B и C имеют координаты: A(-1;2), B(0;4), C(4;3).

Решение. 1) Прямую BD можно задать точкой B и нормальным вектором $\overrightarrow{AC}$, так как BD – высота, а следовательно, перпендикулярна AC. Уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором, где нормальный вектор имеет координаты $\vec{n}$ $(A;B)$, а точка M $(x_0; y_0)$, можно записать в виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Найдём координаты вектора $\overrightarrow{AC}$(4-(-1);3-2) = (5;1). Точка B имеет координаты B(0;4). Подставим данные задачи в уравнение:

$$5 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 4) = 0,$$

$$5 \cdot x + y - 4 = 0.$$

2) Прямую BK можно задать двумя точками: B и K. Координаты точки B известны, а координаты точки K можно найти. Точка K является серединой отрезка AC. Воспользуемся формулами отыскания середины отрезка:

$$x_{сер} = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_{сер} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Найдем координаты точки K:

$$x_k = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1 + 4}{2} = 1{,}5;$$

$$y_k = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2{,}5.$$

Таким образом, точка K имеет координаты: K(1,5;2,5).

Уравнение прямой, заданной двумя точками, представимо в виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставим в уравнение координаты точек B и K:

$$\frac{x - 0}{1{,}5 - 0} = \frac{y - 4}{2{,}5 - 4},$$

$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{y-4}{-1{,}5},$$

$$-1{,}5 \cdot x = 1{,}5 \cdot y - 6,$$

$$1{,}5x + 1{,}5y - 6 = 0.$$

3) Прямую ℓ можно задать точкой и направляющим вектором $\overrightarrow{AC}$. Координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ были найдены в первой части задачи: $\overrightarrow{AC}$ (5;1). Точка В имеет координаты (0;4). Если точка В имеет координаты М($x_1; y_1$), а направляющий вектор $\overrightarrow{AC}$ *(m;n),* то уравнение прямой записывается в виде:

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}.$$

Подставим данные задачи в уравнение:

$$\frac{x-0}{5} = \frac{y-4}{1},$$

$$x - 5y + 20 = 0.$$

4) Для отыскания расстояния от точки В до прямой АС необходимо составить уравнение прямой АС. Прямую АС можно задать двумя точками: А и С:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Подставим координаты точек А и С в уравнение:

$$\frac{x-(-1)}{4-(-1)} = \frac{y-2}{3-2},$$

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{1},$$

$$x - 5y + 11 = 0.$$

Воспользуемся формулой отыскания расстояния от точки до прямой:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ есть уравнение прямой, до которой ищется расстояние, $(x_0; y_0)$ – координаты точки. Подставим данные задачи:

$$d_{B,AC} = \frac{|0 - 5 \cdot 4 + 11|}{\sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{26}} = \frac{9}{\sqrt{26}}.$$

Задача 4.1.4. Даны вершины пирамиды A(1;2;3), B(3;5;4), C(1;5;2), D(3;4;8). Найдите: 1) V тетраэдра;

2) площадь грани ABC;

3) высоту, опущенную из вершины D;

4) угол между ребрами AB и BC;

5) составьте уравнение плоскости α, такой что A $\in \alpha$ и AB$\perp \alpha$;

6) составьте уравнение плоскости β, такой, что точки A, B, C $\in \beta$;

7) составьте уравнение плоскости γ, такой, что BC$\in \gamma$, и γ II AD;

8) составьте уравнение прямой ℓ, такой, что A$\in \ell$, ℓ II BC.

Решение. 1) Объём тетраэдра ABCD можно найти с использованием смешанного произведения векторов, на которых построен тетраэдр, например: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Определим координаты этих векторов:

$\overrightarrow{AB}$(3-1;5-2;4-3)=(2;3;1),

$\overrightarrow{AC}$(1-1;5-2;2-3)=(0;3;-1),

$\overrightarrow{AD}$(3-1;4-2;8-3)=(2;2;5).

Найдем смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 0 + (-6) - 6 - (-4) - 0 = 22.$$

В результате объем тетраэдра, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, будет равен:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |22| = \frac{1}{6} \cdot 22 = \frac{11}{3}.$$

2) Грань ABC является треугольником. Площадь треугольника можно отыскать с помощью векторного произведения векторов, на

которых построен треугольник. Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=-6\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}.$$

Векторным произведением векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ является вектор с координатами $\vec{c}$ (-6;2;6). Найдем длину вектора $\vec{c}$:

$$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{(-6)^2+2^2+6^2}=\sqrt{76}=2\cdot\sqrt{19}.$$

Площадь треугольника равна половине длины векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{c}\right|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{19}=\sqrt{19}.$$

3) Для отыскания высоты, опущенной из вершины D, воспользуемся формулой объёма тетраэдра:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H.$$

Из последней формулы выразим H, это и будет искомой длиной высоты тетраэдра, опущенной из вершины D:

$$H=\frac{3\cdot V_{ABCD}}{S_{осн}},$$

где V_{ABCD} найден в первой части задачи, $S_{осн}=S_{ABC}$ найдена во второй части задачи. Подставим эти значения в формулу:

$$H=\frac{3\cdot\frac{11}{3}}{\sqrt{19}}=\frac{11}{\sqrt{19}}.$$

4) Угол между ребрами AB и BC можно отыскать как угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ с использованием скалярного произведения векторов, где $\overrightarrow{BA}$(-2;-3;-1) и $\overrightarrow{BC}$(-2;0;-2):

$$cos\,\varphi = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-2\cdot(-2)-3\cdot 0-1\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+0^2+(-2)^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{8}} = \frac{6}{4\cdot\sqrt{7}} = \frac{3}{2\cdot\sqrt{7}}$$

.

Таким образом, угол между ребрами АВ и ВС составит:

$$\varphi = arccos(\frac{3}{2\cdot\sqrt{7}}).$$

5) Составим уравнение плоскости α, задав её точкой А и нормальным вектором $\overrightarrow{AB}$. Уравнение плоскости α в общем виде имеет представлено:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)=0,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$– координаты точки, принадлежащей плоскости; (A;B;C) – координаты нормального вектора. Подставим известные значения в это уравнение:

$$2\cdot(x-1)+3\cdot(y-2)+1\cdot(z-3)=0,$$

$$2x+3y+z-11=0.$$

6) Плоскость β можно задать тремя точками А, В, С. Уравнение плоскости, заданной тремя точками А($x_1; y_1; z_1$), В($x_2; y_2; z_2$), С($x_3; y_3; z_3$) записывается в общем виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Подставим координаты точек в общее уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

,

$$-6\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)+6\cdot(z-3)=0,$$

$$-6x+2y+6z-16=0.$$

7) Плоскость γ можно задать точкой и двумя направляющими векторами. Известно, что точки В и С лежат в плоскости, а значит, в качестве точки, принадлежащей плоскости можно выбрать как точку В, так и точку С. Одним из направляющих векторов является вектор $\overrightarrow{AD}$, так как он параллелен плоскости γ. В качестве второго направ-

ляющего вектора можно взять вектор $\overrightarrow{BC}$, так как он лежит в плоскости γ, а значит, тоже является направляющим вектором. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя направляющими векторами, в общем виде выглядит:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$– координаты точки, принадлежащей плоскости; $(p_1; p_2; p_3)$ – координаты направляющего вектора, $(q_1; q_2; q_3)$ – координаты второго направляющего вектора.

Координаты векторов $\overrightarrow{AD}$(2;2;5) и $\overrightarrow{BC}$(-2;0;-2) известны; точкой, принадлежащей плоскости, пусть будет точка B(3;5;4). Подставим эти данные в уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-4 \\ 2 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-4\cdot(x-3)-6\cdot(y-5)+4\cdot(z-4)=0,$$

$$-4x-6y+4z+26=0.$$

8) Прямую ℓ можно задать точкой A и направляющим вектором $\overrightarrow{BC}$. Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором, в общем виде записывается:

$$\frac{x-x_0}{p_1} = \frac{y-y_0}{p_2} = \frac{z-z_0}{p_3},$$

где $(x_0; y_0; z_0)$– координаты точки, принадлежащей плоскости; $(p_1; p_2; p_3)$ – координаты направляющего вектора.

Подставим данные задачи в уравнение:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-2}.$$

Задача 4.1.5. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду; найдите все её характеристики. Постройте эту кривую, если она задана следующим уравнением:

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 12y - 33 = 0.$$

Решение. 1) Произведение коэффициентов $A \cdot B = 1 \cdot 2$ положительно, в этой связи данное уравнение может определять либо эллипс, либо мнимый эллипс, либо точку.

2) Приведем уравнение к каноническому виду:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + 2y^2 - 12y - 17 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 + 2(y^2 - 6y) - 17 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 + 2(y^2 - 6y + 3^2 - 3^2) - 17 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 + 2(y^2 - 6y + 3^2) - 18 - 17 = 0$$

$$(x + 1)^2 + 2(y - 3)^2 - 36 = 0$$

$$(x + 1)^2 + 2(y - 3)^2 = 36.$$

Обе части равенства поделим на 36 и в результате получим:

$$\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{18} = 1.$$

В последнем равенстве сделаем замену переменных вида (то есть перейдем к новой системе координат $X'O'Y'$):

$$\begin{cases} x+1 = x' \\ y-3 = y' \end{cases}.$$

В результате получим уравнение кривой вида:

$$\frac{(x')^2}{6^2} + \frac{(y')^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1.$$

Последнее равенство определяет эллипс.

3) Найдем основные числовые характеристики эллипса:

a) a = 6 – большая полуось эллипса, b = $3 \cdot \sqrt{2}$ – меньшая полуось эллипса;

b) расстояние от центра до фокуса: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36-18} = 3 \cdot \sqrt{2}$;

c) эксцентриситет эллипса: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$; $\varepsilon = \dfrac{3 \cdot \sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых сначала в системе координат $X'O'Y'$, а затем,

пользуясь формулами перехода $\begin{cases} x+1=x' \\ y-3=y' \end{cases}$, в данной системе координат XOY.

a) центр кривой: $O'(0;0)$: $\begin{cases} x'=0 \\ y'=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+1=0 \\ y-3=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$. Таким образом, координаты центра эллипса O' в данной системе координат XOY будут: O'(-1;3);

b) уравнения осей симметрии: эллипс имеет большую ось симметрии с уравнением в системе координат $X'O'Y'$: $x'=0$ и меньшую ось симметрии: $y'=0$. С учетом формул перехода: $x=-1$ – уравнение большей оси симметрии эллипса в данной системе координат XOY, а $y=3$ – уравнение меньшей оси симметрии;

c) вершины эллипса:

$A_1(-a;0)$: $\begin{cases} x'=-6 \\ y'=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1=-6 \\ y-3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-7 \\ y=3 \end{cases}$, то есть $A_1(-7;3)$;

$A_2(a;0)$: $\begin{cases} x'=6 \\ y'=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1=6 \\ y-3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$, $A_2(5;3)$;

$B_1(0;-b)$: $\begin{cases} x'=0 \\ y'=-3\cdot\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x+1=0 \\ y-3=-3\cdot\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3\cdot\sqrt{2}+3\approx-1{,}2 \end{cases}$, $B_1(-1;-1{,}2)$;

$B_2(0;b)$: $\begin{cases} x'=0 \\ y'=3\cdot\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x+1=0 \\ y-3=3\cdot\sqrt{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ y=3\cdot\sqrt{2}+3\approx 7{,}2 \end{cases}$, $B_2(-1;7{,}2)$.

d) фокусы эллипса:

$F_1(-c;0)$: $\begin{cases} x'=-3\cdot\sqrt{2} \\ y'=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1=-3\cdot\sqrt{2} \\ y-3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1-3\cdot\sqrt{2}\approx-5{,}2 \\ y=3 \end{cases}$, то есть $F_1(-5{,}2;3)$;

$F_2(c;0)$: $\begin{cases} x'=3\cdot\sqrt{2} \\ y'=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+1=3\cdot\sqrt{2} \\ y-3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1+3\cdot\sqrt{2}\approx 3{,}2 \\ y=3 \end{cases}$, то есть $F_2(3{,}2;3)$;

е) уравнения директрис: $\ell_{1,2}:\ x' = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ или $x' = \pm\frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, то есть $x' = \pm\frac{12}{\sqrt{2}}$.

В данной системе координат XOY уравнения директрис примут вид: $x+1 = -\frac{12}{\sqrt{2}}$, или $x = -\frac{12}{\sqrt{2}} - 1$. Вторая директриса в системе координат будет иметь вид: $x+1 = \frac{12}{\sqrt{2}}$ или $x = \frac{12}{\sqrt{2}} - 1$.

5) Осуществим сводку полученных результатов в таблице 4.1.1:

Таблица 4.1.1

Характеристики кривой	**Система координат** $x'o'y'$	**Система координат** xoy
Уравнение кривой	$\frac{(x')^2}{6^2} + \frac{(y')^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$	$\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{18} = 1$
Полуоси	a = 6 – большая полуось; b = $3\cdot\sqrt{2}$ – меньшая полуось	
Расстояние от центра до фокуса	$c = 3\cdot\sqrt{2}$	
Эксцентриситет	$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$	
Центр кривой	o' (0; 0)	o' (-1;3)
Вершины	$A_1(-6;0)$, $A_2(6;0)$, $B_1(0;-3\cdot\sqrt{2})$, $B_2(0;3\cdot\sqrt{2})$	$A_1(-7;3)$, $A_2(5;3)$, $B_1(-1;-1{,}2)$, $B_2(-1;7{,}2)$
Фокусы	$F_1(-3\cdot\sqrt{2};0)$; $F_2(3\cdot\sqrt{2};0)$	$F_1(-5{,}2;3)$; $F_2(3{,}2;3)$
Директрисы	$\ell_{1,2}:\ x' = \pm\frac{12}{\sqrt{2}}$	$\ell_{1,2}:\ x = -\frac{12}{\sqrt{2}} - 1$ $x = \frac{12}{\sqrt{2}} - 1$

6) Выполним построение кривой (рис. 4.1.2):

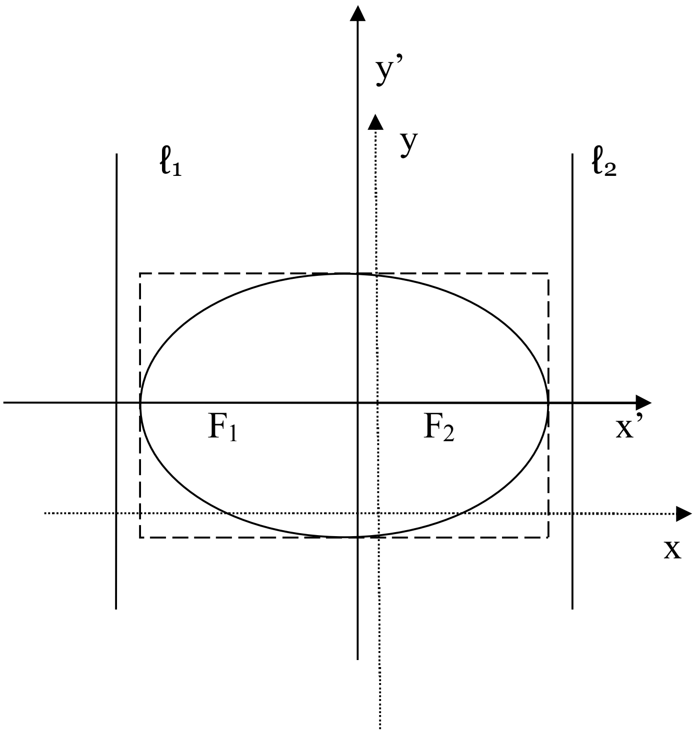

Рис. 4.1.2

Задача 4.1.6. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду; найдите её центр, полуоси, эксцентриситет. Постройте эту кривую, если она задана следующим уравнением:

$$9x^2 - 25y^2 - 225 = 0.$$

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A \cdot B = 9 \cdot (-25)$ отрицательно, то это уравнение гиперболического типа, следовательно, оно может определять или гиперболу, или пару пересекающихся прямых.

2) Приведем данное уравнение к каноническому виду. Для этого свободное слагаемое перенесем в правую часть равенства, а затем поделим обе части равенства на 225:

$$9x^2 - 25y^2 = 225;$$

$$\frac{9x^2}{225} - \frac{25y^2}{225} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

3) Определим основные числовые характеристики гиперболы:

a) a = 5 – действительная полуось гиперболы; b = 3 – мнимая полуось гиперболы;

b) расстояние от центра до фокуса

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}\approx 5{,}9;$$

c) эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{34}}{5}$.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых:

a) центр кривой – точка с координатами O(0;0);

b) уравнения осей симметрии гиперболы: прямая с уравнением y = 0 – действительная ось, а прямая с уравнением x = 0 – мнимая ось симметрии кривой;

c) вершины гиперболы: A_1(-a;0) = (-5;0); A_2(a;0) = (5;0);

d) координаты фокусов $F_1(-c;0)$, то есть $F_1(-\sqrt{34};0)$; $F_2(c;0)$, то есть $F_2(\sqrt{34};0)$.

e) составим уравнения директрис гиперболы:

$$\ell_1: x=-\frac{a}{\varepsilon} \text{ или } \ell_1: x=-\frac{5}{\frac{\sqrt{34}}{5}};\ x=-\frac{25}{\sqrt{34}};$$

$$\ell_2: x=\frac{a}{\varepsilon} \text{ или } \ell_2: x=\frac{5}{\frac{\sqrt{34}}{5}};\quad x=\frac{25}{\sqrt{34}}.$$

f) составим уравнения асимптот гиперболы:

$$y_1=-\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y_2=\frac{b}{a}x$$

Для нашей гиперболы: $y_1=-\frac{3}{5}x$ и $y_2=\frac{3}{5}x$.

7) Выполним построение кривой (рис. 4.1.3):

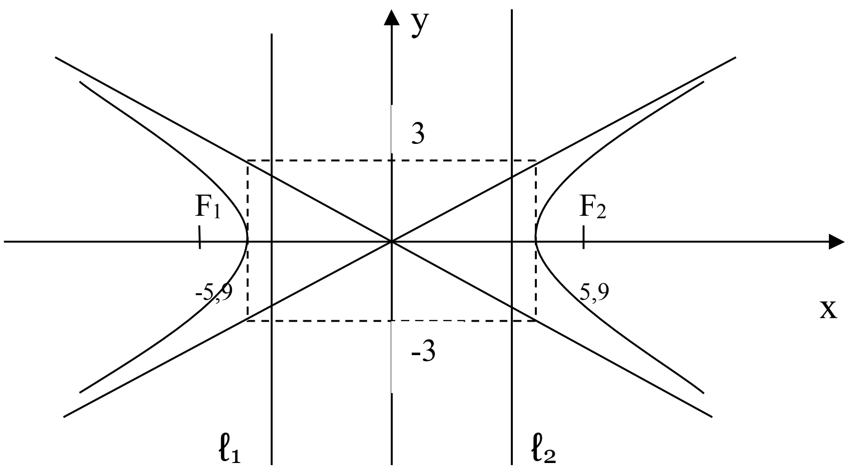

Рис. 4.1.3

Задача 4.1.7. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду; найдите её центр, полуоси, эксцентриситет. Постройте эту кривую, если она задана следующим уравнением:

$$x^2 - 10y = 0.$$

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A \cdot B = 1 \cdot 0$ равно нулю, то это уравнение параболического типа, следовательно, оно может определять или параболу, или пару параллельных прямых, или пару мнимых параллельных прямых, или пару совпадающих параллельных прямых.

2) Перепишем данное уравнение в виде:

$$x^2 = 10y.$$

Данное уравнение есть каноническое уравнение параболы вида: $x^2 = 2py$.

3) Определим числовую характеристику параболы: $2p = 10 \Rightarrow$ $p = 5$ – параметр параболы.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых параболы:

a) парабола не имеет центра симметрии;

b) осью симметрии параболы является прямая x = 0;

c) вершиной параболы является точка O(0;0);

d) фокусом параболы является точка F$(0;\frac{p}{2})$ = (0;2,5);

e) директрисой является прямая с уравнением $\ell: y = -\frac{p}{2}$ или y = -2,5.

5) Выполним построение (рис. 4.1.4):

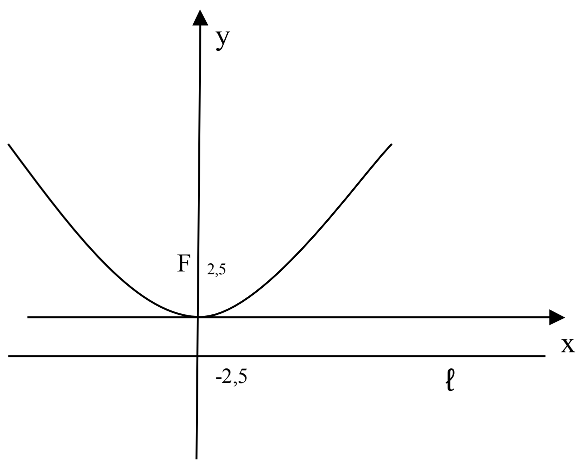

Рис. 4.1.4

Задача 4.1.8. Определите тип поверхности и постройте её:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1.$$

Решение. Данное уравнение представляет собой каноническое уравнение поверхности (П) второго порядка – однополостного гиперболоида. Выполним построение данной поверхности методом параллельных сечений.

1) $\Pi \cap XOY: \quad \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1 \end{cases},$

получим:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Данное уравнение в плоскости XOY определяет кривую второго порядка – эллипс.

2) $П \cap XOZ: \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1 \end{cases}$,

получим:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1 -$$

в плоскости XOZ каноническое уравнение кривой второго порядка – гиперболы.

3) $П \cap YOZ: \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1 \end{cases}$,

получим:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1 -$$

в плоскости YOZ каноническое уравнение кривой второго порядка – гиперболы.

4) Рассмотрим сечение данной поверхности вспомогательными плоскостями, параллельными плоскости XOY. Уравнениями таких плоскостей будут $z = \pm h$.

$$\begin{cases} z = \pm 6 \\ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{36} = 1 \end{cases},$$

получим:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2.$$

Поделив обе части последнего равенства на 2, вывели каноническое уравнение кривой второго порядка – эллипса. Таким образом, при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными плоскости XOY, в сечениях будут получаться эллипсы.

Выполним построение поверхности (рис. 4.1.5):

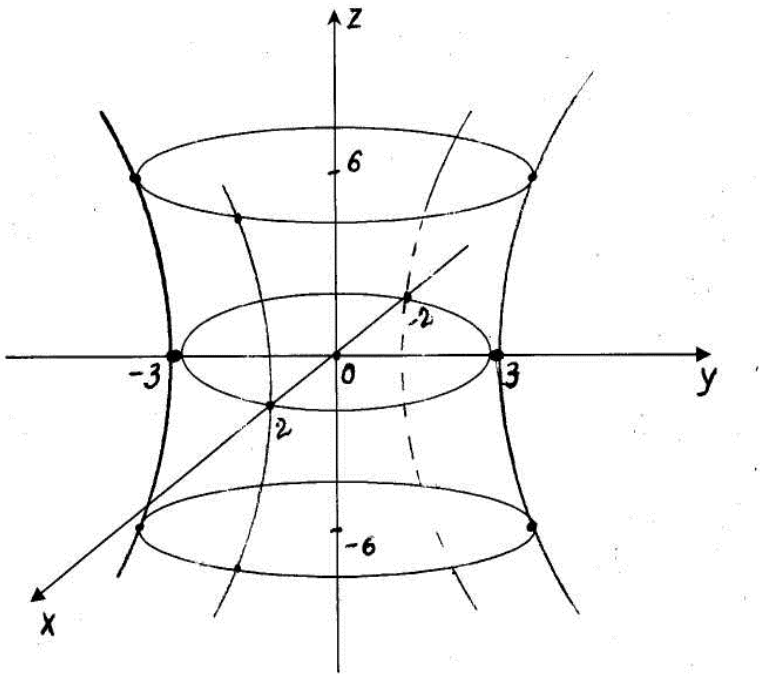

Рис. 4.1.5

Задача 4.1.9. Определите тип поверхности и постройте её:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=0.$$

Решение. Данное уравнение представляет собой каноническое уравнение поверхности (П) – конуса второго порядка. Выполним построение данной поверхности методом параллельных сечений.

1) $П\bigcap XOY:\quad \begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=0 \end{cases},$

получим:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=0,\ (\frac{x}{3}-\frac{y}{4})\cdot(\frac{x}{3}+\frac{y}{4})=0,$$

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=0 \text{ или } \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=0-$$

уравнения двух прямых в плоскости XOY. Для построения каждой прямой достаточно определить по две точки.

2) $П \cap XOZ: \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 0 \end{cases},$

получим:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 0 \ -$$

в плоскости XOZ уравнение, которому удовлетворяют координаты одной точки: O(0;0).

3) $П \cap YOZ: \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 0 \end{cases},$

получим

$$-\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 0,\ (\frac{z}{5} - \frac{y}{4}) \cdot (\frac{z}{5} + \frac{y}{4}) = 0,$$

$$\frac{z}{5} - \frac{y}{4} = 0 \text{ или } \frac{z}{5} + \frac{y}{4} = 0 \ -$$

уравнения двух прямых в плоскости YOZ.

4) Рассмотрим сечение данной поверхности вспомогательными плоскостями, параллельными плоскости XOZ. Уравнениями таких плоскостей будут $y = \pm h$.

$$\begin{cases} y = \pm 4 \\ \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{25} = 0 \end{cases},$$

получим

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1,$$

каноническое уравнение кривой второго порядка – эллипса. Таким образом, при пересечении данной поверхности плоскостями, параллельными плоскости XOY, в сечениях будут получаться эллипсы.

Выполним построение поверхности (рис. 4.1.6):

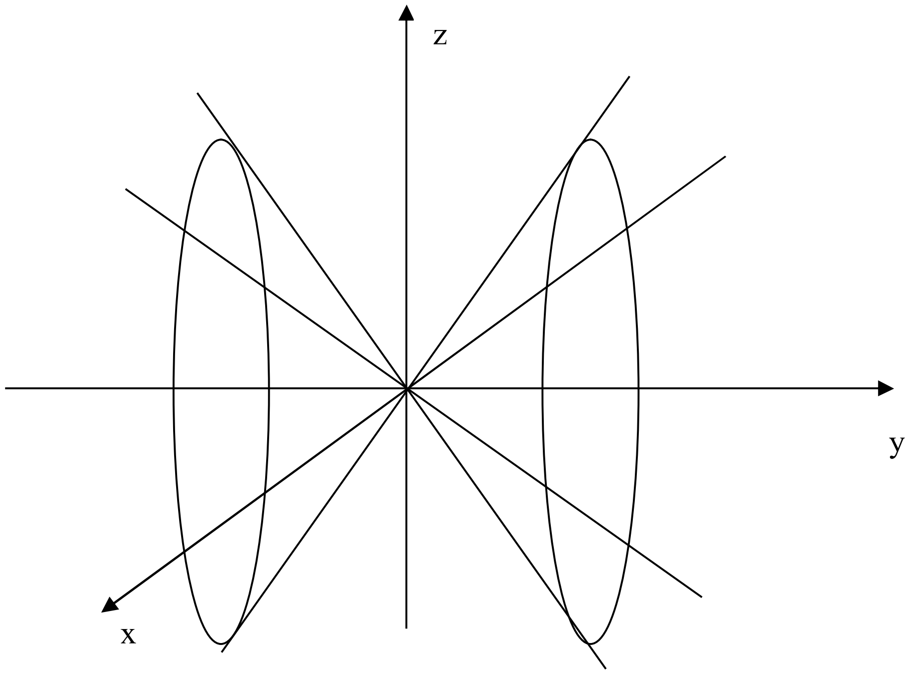

Рис. 4.1.6

4.2. Контрольная работа

(*Вариант контрольной работы определяется по последней цифре номера зачётной книжки)*

I. Вычислите определитель III-го порядка двумя способами: используя правило Саррюса (правило треугольников) и разложив его по элементам первой строки:

1.1 $\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$

1.6 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$

1.2 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

1.7 $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} =$

1.3 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$

1.4 $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$

1.5 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} =$

1.8 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$

1.9 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$

1.10 $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

II. Выполните разложение векторов через базисные векторы:

2.1. В Δ-ке ABC сторона AB точками M и N разделена на 3 равные части: AM = MN = NB.

Точка K – середина AC. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{CM};\ \overrightarrow{BK};\ \overrightarrow{NK}$, если базис задан векторами: $B = \left\{\overrightarrow{CA};\ \overrightarrow{CB}\right\}$.

2.2. В равнобедренном Δ ABC (AC – основание) проведена высота BK. D – середина BC. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{KD};\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{AD}$, если базис задан векторами B = $\left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AK}\right\}$.

2.3. Дан Δ ABC. NM – средняя линия Δ ABC (MN II AC). Найдите разложение векторов: $\overrightarrow{AN};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{CM}$, если базис задан векторами B = $\left\{\overrightarrow{BM};\ \overrightarrow{BN}\right\}$..

2.4. Дан Δ ABC. MN – средняя линия Δ ABC (MN II AC). BK – медиана. Точка O – точка пересечения MN и BK. Найдите разложение векторов: $\overrightarrow{AO};\ \overrightarrow{ON};\ \overrightarrow{OK};\ \overrightarrow{OC},$ в базисе $B = \left\{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}\right\}$.

2.5. Дан Δ ABC. MN – средняя линия Δ ABC (MN II AC). BK – медиана. Точка 0 – точка пересечения MN и BK. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BK}; \overrightarrow{AB},$ если базис задан: $B = \left\{\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OC}\right\}$.

2.6. Дан равносторонний Δ ABC. BK – высота, AD – медиана. Точка 0 = AD ∩ BK. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{BO}; \overrightarrow{AC}$ в базисе $B = \left\{\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BA}\right\}$..

2.7. Дан равносторонний Δ ABC. BK – высота, AD – медиана. 0 = AD ∩ BK. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BK}; \overrightarrow{OK}$ в базисе B = $\left\{\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}\right\}$..

2.8. Дан Δ ABC. На стороне BC расположена точка M так, что BM : MC=1:3. Точка K лежит на AM, причем AK=KM. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{CK}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AK}$ в базисе B=$\left\{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right\}$.

2.9. Дан Δ ABC. На стороне AB расположена точка M так, что AM : MB = 2:1. BK – медиана. Найдите разложение векторов $\overrightarrow{MK}; \overrightarrow{KC}; \overrightarrow{CM}$ в базисе B = $\left\{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}\right\}$..

2.10. Дан Δ ABC. На стороне AC расположена точка M так, что AM : MC = 2:1. D – середина BC. Найдите разложение векторов: $\overrightarrow{MD}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{BM}$ в базисе $B = \left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right\}$.

III. Дан Δ ABC; BD – высота треугольника, BK – его медиана. Составьте уравнения прямых: 1) BD; 2) BK; 3) ℓ, такой, что B$\in \ell$, ℓ II AC. Найдите расстояние от точки B до прямой AC, если точки A, B, и C имеют координаты:

3.1 A (1; 1)	**3.2** A (2; 0)	**3.3** A (0; 4)
B (2; -3)	B (-1; -1)	B (-3; 3)
C (1; 0)	C (4; 5)	C (2; 2)

3.4 A (-2; 0)
B (4; 3)
C (-2; 2)

3.5 A (0; 0)
B (4; 2)
C (3; 4)

3.6 A (1; 1)
B (2; 3)
C (-4; 3)

3.7 A (4; 3)
B (7; 2)
C (4; 2)

3.8 A (0; 0)
B (3; -3)
C (7; 3)

3.9 A (3; -3)
B (2; -3)
C (-4; 3)

3.10 A (4; -3)
B (2; 0)
C (5; 4)

IV. Дан тетраэдр ABCD. Найдите:

1) V тетраэдра;

2) площадь грани ABC;

3) высоту, опущенную из D;

4) угол между ребрами AB и BC;

5) составить уравнение плоскости α, такой, что A $\in\alpha$ и AB$\perp\alpha$;

6) составить уравнение плоскости β, такой, что точки A, B, C $\in\beta$;

7) составить уравнение плоскости γ, такой, что BC$\in\gamma$, и γ II AD;

8) составить уравнение прямой ℓ, такой, что A$\in\ell$, ℓ II BC, если координаты точек A, B, C, D следующие:

4.1 A (1; 1; 1)
B (2; -3; 4)
C (1; 0; -2)
D (4; -3; 0)

4.2 A (2; 0; 0)
B (-1; -1;3)
C (4; 5; 2)
D (-3; 4; 2)

4.3. A (-2; 0; 1)
B (4; 3; 1)
C (-2; 2; 1)
D (4; 3; 0)

4.4 A (0; 4; 2)
B (-3; 3; 1)
C (2; 2; 4)
D (1; 1; 1;)

4.5 A (1; 1; -1)
B (2; 3; 1)
C (-4; 3; 0)
D (2; 4; 3)

4.6 A (0; 0; 3;)
B (4; 2; 1)
C (3; 4; -1)
D (2; 4; 0;)

4.7 A (0; 0; 0)
B (3; -3; 2;)
C (4; 2; 1)
D (3; 2; 0)

4.8 A (4; 3; 0)
B (7; 2; -3)
C (5; 4; 2;)
D (-3 -3 2)

4.9 A (4; -3 ;5)
B (2; 0; 3)
C (-4; 3; 5)
D (0; 0; 7)

4.10 A (3; -3; 2)
B (2; -3; 4)
C (7; 3; 4)
D (-4; 9; 5)

V. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду; найдите все её характеристики. Постройте эту кривую:

5.1 а) $y^2 - 16x = 0$
б) $49x^2+25y^2-686x-400y+2776=0$
в) $49x^2-16y^2-784=0$

5.2 а) $9x^2-4y^2+90x-48y+117=0$
б) $x^2+49y^2-49=0$
в) $-x^2+18y=0$

5.3 а) $6y^2+108x=0$
б) $81x^2+36y^2-1458x-504y+5409=0$
в) $36x^2-9y^2-324=0$

5.4 а) $-2y^2+8x=0$

б) $16x^2-25y^2+256x-400y-976=0$

в) $-196+4x^2+49y^2=0$

5.5 а) $9y^2-36x+90y+369=0$

б) $16y^2-49x^2-784=0$

в) $4x^2+81y^2-324=0$

5.6 а) $16x^2-y^2-16=0$

б) $2x^2-16y=0$

в) $9x^2+64y^2+126x-135=0$

5.7 а) $x^2+64y^2-64=0$

б) $x^2-36y^2-4x+504y-1724=0$

в) $9y^2+72x=0$

5.8 а) $9y^2-36x=0$

б) $9x^2-64y^2+18x-384y-1143=0$

в) $81x^2+4y^2-324=0$

5.9 а) $5x^2-70y=0$

б) $9x^2+25y^2-108x-450y+2124=0$

в) $9x^2-25y^2+225=0$

5.10 а) $-9x^2+90y=0$

б) $9x^2-64y^2+606=0$

в) $x^2+4y^2-2x+32y+64=0$

VI. Определите тип поверхности и постройте эту поверхность:

6.1 1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{64}=1$ 2) $Z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$

6.2 1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}-\frac{Z^2}{16}=1$ 2) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

6.3 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{81}+\frac{Z^2}{4}=1$ 2) $Z=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}$

6.4 1) $\frac{y^2}{4}+\frac{Z^2}{16}=1$ 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{Z^2}{9}=1$

6.5 1) $Z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}$ 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}-\frac{Z^2}{25}=1$

6.6 1) $Z^2=\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}$ 2) $Z=x^2+y^2$

6.7 1) $y^2=4x$ 2) $\frac{Z^2}{16}+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

6.8 1) $Z^2-x^2=1$ 2) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}-\frac{Z^2}{25}=0$

6.9 1) $x^2+y^2=Z^2$ 2) $x^2=4Z$

6.10 1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{Z^2}{4}=1$ 2) $Z=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] / Д. В. Беклемишев. – М. : Издательство «Наука», 1980. – 336 с.
2. Бугров, Я. С. Высшая математика [Текст] : сб. задач по высшей математике, уч. пособие для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 3-е изд., испр. и доп. – Ростов на Дону : Издательство «Феникс», 1997. – 352 с.
3. Высшая математика [Текст] : учебно-методическое пособие / под ред. Л. З. Румшинского. – М., 1990. – 102 с.
4. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для вузов / под ред. профессора Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 471 с.
5. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : уч. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : «Высшая школа», 1999. – Ч. 1. – 304 с.
6. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии [Текст] / Н. В. Ефимов. – 10-е изд. – М. : Издательство «Наука», 1969. – 272 с.
7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике [Текст] : типовые расчёты, учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – 4-е изд. – М. : Издательство «Лань», 2005. – 240 с.
8. Линейная алгебра и основы математического анализа [Текст] : сб. задач по математике / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Издательство «Наука», 1981. – 464 с.
9. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] / В. П. Минорский. – М. : Издательство «Наука», 1964. – 360 с.
10. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике [Текст] / А. Д. Мышкис. – М. : Издательство «Наука», 1967. – 640 с.
11. Общий курс высшей математики для экономистов [Текст] : учебник / под ред. В. И. Ермакова. – М. : «Инфра-М», 2002. – 656 с.
12. Шипачёв, В. С. Высшая математика [Текст] : учеб. для вузов / В. С. Шипачёв. – М. : Высш. школа, 2001. – 479 с.
13. Шипачёв, В. С. Задачник по высшей математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Шипачёв. – 3-е изд.– М. : Издательство «Высшая школа», 2003. – 304 с.

Учебное издание

Анна Викторовна Швалёва
Татьяна Павловна Филоненко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор
Е. В. Кондаева

Корректор
К. А. Писаренко

Технический редактор
Г. А. Чумак

Подписано в печать 25.10.2007 г.
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 5,1.
Тираж 100 экз. Заказ ___.

Издательство Орского гуманитарно-технологического института (филиала) Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

462403, г. Орск Оренбургской обл., пр. Мира, 15 А, тел. 23-56-54