Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС»
Новотроицкий филиал

Т. П. Филоненко, А. В. Швалева

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
для практических занятий

Новотроицк 2015

УДК 516
ББК 22.151.5
Ф 55

Рецензенты:

Попов А.С., *кандидат педагогических наук, доцент кафедры математического анализа, информатики, теории и методики обучения информатике Орского гуманитарно-технологического университета (филиала ФГБОУ ВПО «Оренбургский государственный университет»*

Изаак Д.Д., *ст. преподаватель кафедры МиЕ Новотроицкого филиала Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»*

Филоненко, Т. П. Аналитическая геометрия и алгебра: учебно-методическое пособие для практических занятий / Т. П. Филоненко, А. В. Швалева. – Новотроицк, НФ НИТУ «МИСиС», 2015. – 77 с.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения для успешного приобретения ими практических навыков по решению задач учебного курса «Аналитическая геометрия и алгебра».

Предназначено пособие для использования в учебном процессе студентами, обучающимися по направлениям подготовки бакалавров «Металлургия», «Технологические машины и оборудование», «Теплотехника и теплоэнергетика», «Химическая технология», «Электротехника и электроэнергетика».

Рекомендовано Методическим советом НФ НИТУ "МИСиС".

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения для успешного приобретения ими практических навыков по решению задач учебного курса «Аналитическая геометрия и алгебра». Предлагаемое пособие представляет собой систематическое изложение основ данного учебного курса.

Материал изложен в доступной для студентов форме, с привлечением геометрической и физической интерпретаций, с соблюдением должной математической строгости.

содержит четыре главы: I – матрицы и системы линейных уравнений; II – векторная алгебра; III – прямая на плоскости и в пространстве, плоскость; IV – алгебраические кривые и поверхности второго порядка. В начале каждой главы предлагается краткий теоретический материал по данной теме, приводятся примеры, что способствует лучшему пониманию и усвоению учебного материала.

Предлагаемое практическое пособие по решению задач и курс лекций (тех же авторов) образуют единый учебно-методический комплекс. Авторы считают, что предлагаемый комплекс существенно поможет студентам в изучении основ курса «Аналитическая геометрия и алгебра».

Пособие «Аналитическая геометрия и алгебра» может быть использовано в учебном процессе как студентами так и преподавателями вуза.

Авторы благодарят за помощь в написании пособия Д. Д. Изаака.

1 Матрицы. Системы линейных уравнений

Матрицы. Операции над матрицами

Определение 1. Матрицей размерности $m \times n$ называется таблица чисел или буквенных выражений, содержащая mn элементов, расположенных в m строк и n столбцов.

Матрицы принято обозначать большими буквами латинского алфавита *A, B, C*...

Основные, наиболее часто встречающиеся матрицы:

Определение 2. Если в матрице число строк не равно числу столбцов, то такая матрица называется прямоугольной матрицей размерности ($m \times n$).

Определение 3. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то такая матрица называется квадратной матрицей n-го порядка.

В этом случае число строк матрицы называется порядком матрицы и служит для определения размерности матрицы.

Определение 4. Матрица, имеющая одну строку, называется матрицей-строкой или вектор-строкой.

Определение 5. Матрица, имеющая один столбец, называется матрицей-столбцом или вектор-столбцом.

Определение 6. Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нулевой матрицей и обозначается θ или *O*.

Определение 7. Квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные элементы матрицы равны нулю, называется единичной матрицей и обозначается *E*:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Одним из важных понятий теории матриц является понятие равных матриц.

Определение 8. Две матрицы *A* и *B* называются равными, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны между собой, то есть $a_{ij} = b_{ij}$.

Рассмотрим те действия, которые можно выполнять с матрицами.

I. Сложение матриц

Определение 9. Суммой двух матриц *A* и *B* одинаковой размерности называется матрица *C*, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц *A* и *B*.

$$A+B=C, \text{ где } A=\|a_{ij}\|,\ B=\|b_{ij}\|,\ C=\|c_{ij}\|=\|a_{ij}+b_{ij}\|,$$

где $i=1,2,\ ...,\ m;\quad j=1,2,...,n$.

II. Умножение матрицы на число

Определение 10. Произведением матрицы на число λ называется матрица λA, элементы которой равны произведению числа λ на соответствующие элементы матрицы *A*, то есть:

$$A \cdot \lambda = \lambda \cdot A = \left\| \lambda \cdot a_{ij} \right\|.$$

III. Умножение матриц

Определение 11. Произведением матрицы *A* на матрицу *B* называется матрица $C = A \cdot B$, каждый элемент которой – c_{ij} – представляет собой сумму парных произведений *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B*.

Из определения следует, что умножение матриц возможно только при одном условии: число столбцов матрицы *A* будет равно числу строк матрицы *B*. Пользуясь определением, найдем произведение прямоугольных матриц:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix} = C.$$

В результате умножения матриц *A* и *B* получается матрица *C*, имеющая столько строк, сколько строк имеет матрица *A* и столько столбцов, сколько столбцов имеет матрица *B*. Это правило умножения матриц сохраняется и для умножения квадратных матриц одинаковой размерности.

IV. Транспонирование матриц

Замена всех строк матрицы *A* соответствующими столбцами называется транспонированием матрицы. Транспонированную матрицу будем обозначать A^T.

Пример 1 Найдите линейную комбинацию $3A - 2B$, если матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$:

$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Решение.

$$3A - 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 6 \\ 0 & 15 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -13 & 4 \\ -8 & 9 & 22 \end{pmatrix}$$

Пример 2 Найдите произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$

Решение.

1. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$;

2. $B\cdot A=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot1+6\cdot3&5\cdot2+6\cdot4\\7\cdot1+8\cdot3&7\cdot2+8\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&34\\31&46\end{pmatrix}.$

Вычислите линейные комбинации матриц A и B:

1.1 $3\cdot A+2\cdot B$, если $A=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-3\\2&4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-3&1\\4&-1\\2&1\end{pmatrix}$.

1.2 $-2\cdot A-B$, если $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&4\\1&-2&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5&1&-2\\-3&2&7\\4&0&-1\end{pmatrix}$.

1.3 $5\cdot A-2\cdot B+3\cdot C$, если $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&4\\1&-2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&1&-2\\-3&2&7\\4&0&-1\end{pmatrix}$,
$C=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&1&1\\-2&0&3\end{pmatrix}$

1.4 $A-2\cdot E$, если $A=\begin{pmatrix}2&-3\\0&7\end{pmatrix}$

1.5 Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если матрица $A=\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}$ и $f(x)=2x-7$

1.6 Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если матрица $A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\1&-2&0\\-3&11&4\end{pmatrix}$ и $f(x)=-3x+4$.

Вычислите:

1.7 $\begin{pmatrix}1&-3\\0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&1&4\end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix}-5&-2&-9\\4&4&16\end{pmatrix}$

1.8 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -8 & 2 \\ 8 & -1 \\ 3 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

1.9 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} -11 \\ -11 \end{pmatrix}$

1.10 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} 27 & -20 \\ -26 & 24 \end{pmatrix}$

1.11 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ *Ответ* $\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix}$

1.12 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$ *Ответ* $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$

1.13 Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $f(x) = x^2 - 3x + 1$ *Ответ* $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Определители и их свойства

Для всякой квадратной матрицы можно вычислить определитель или детерминант матрицы.

Определение 12. Определителем или детерминантом второго порядка, соответствующим данной матрице A, называется число: $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$.

Определитель второго порядка будем обозначать символом

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Свойства определителей:

1. Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, то есть $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

Замена строк столбцами определителя называется транспонированием определителя. Это свойство говорит о равноправии строк и столбцов определителя, то есть все свойства, сформулированные для строк, будут справедливы и для столбцов и наоборот.

2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину, то есть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю, то есть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) определителя можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

5. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

6. Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины, то есть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Вычислим для нее определитель третьего порядка.

Определение 13. Определителем (или детерминантом) третьего порядка, соответствующим данной матрице A, называется число, полученное следующим образом:

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{32}a_{21}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Все свойства определителей второго порядка остаются справедливыми для определителей третьего порядка.

Приведенное в определении 13 правило вычисления определителя называется правилом треугольника или правилом Саррюса. Существует и другое правило вычисления определителя. Чтобы его сформулировать, введем понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.

Определение 14. Минором, соответствующим данному элементу определителя третьего порядка, называется определитель второго порядка, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, на пресечении которых находится данный элемент.

Миноры будем обозначать большой буквой M_{ij} с двумя индексами, соответствующими индексу элемента.

Определение 15. Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, в которых находится элемент, четная и со знаком минус, если сумма номеров – нечетная. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будем обозначать A_{ij} и вычислять по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Правило разложения определителя по элементам строки или столбца можно сформулировать следующим образом: определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения. С помощью этого правила можно вычислять определители любого порядка.

Укажем еще одно важное свойство определителей:

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Определение 16. Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля (равен нулю), называется невырожденной (вырожденной) матрицей.

Пример 1 Вычислите определитель третьего порядка двумя способами: используя правило Саррюса (правило треугольников) и разложив его по элементам первой строки: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся правилом треугольников: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$

$1\cdot 0\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 3 + (-2)\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 0\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 1 - 4\cdot(-2)\cdot 1 = 0 + 36 - 4 - 0 - 3 + 8 = 37$

Выполним разложение определителя по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(0-3) + 2\cdot(4-2) + 3\cdot(12-0) = -3 + 4 + 36 = 37$$

Пример 2 Вычислите определитель четвертого порядка разложением по строке или столбцу: $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Наиболее удобно пользоваться разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+0\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\cdot 9 + 3\cdot 31 + 0 - 2\cdot 6 = 63.$$

Так как наличилие нулей встроке или столбце упрощает вычисление определителя, то можно, пользуясь свойством 6 определителей, можно получить максимальное число нулей в строке или столбце. Получим нули в первом столбце. Для этого умножим вторую строку на 2 и прибавим к первой строке; затем умножим второй стоки на (-3) и прибавим к элементам к третьей строки. Получим:

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычислим получившийся определитель, разложив его по элементам первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -8 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(-63) = 63$$

Вычислите определители с помощью правила треугольников и разложения по какой-нибудь строке или столбцу:

1.14 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ *Ответ: 40*

1.15 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ *Ответ: -12*

1.16 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ *Ответ: 1*

Решите уравнения и неравенства:

1.17 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & \mathrm{x}-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$ *Ответ: x=5*

1.18 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2x+3 \\ 3-x & 1 & 1 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ *Ответ: x=-3; x=-2,5*

1.19 $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \ge 0$ *Ответ:* $\left[-\frac{41}{21};\infty\right)$

1.20 $\begin{vmatrix} 2 & \mathrm{x}+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$ *Ответ:* $(-6;-4)$

Упростите и вычислите определители:

1.21 $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$ **1.22** $\begin{vmatrix} ax & a^2+x^2 & 1 \\ ay & a^2+y^2 & 1 \\ az & a^2+z^2 & 1 \end{vmatrix}$.

Используя свойства определителя, докажите справедливость следующих тождеств:

1.23 $\begin{vmatrix} a_1-xb_1 & a_1+xb_1 & c_1 \\ a_2-xb_2 & a_2+xb_2 & c_2 \\ a_3-xb_3 & a_3+xb_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2x\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

1.24 $\begin{vmatrix} a_1+xb_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+xb_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+xb_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

1.25 $\begin{vmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{x_1-x_2}{2} & \frac{y_1-y_2}{2} & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

Вычислите определитель, используя его свойства:

1.26 $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\lambda) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\lambda) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\lambda) \end{vmatrix}$ *Ответ: 0* **1.27** $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$ *Ответ: 0*

Вычислите определители, используя разложение по столбцу или строке:

1.28 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ *Ответ: 100* **1.29** $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ *Ответ: 17*

1.30 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ *Ответ: 8a+15b+12c-19d*

1.31 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$ *Ответ: 52*

1.32 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ *Ответ: 0* **1.33** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ *Ответ: 48*

Обратная матрица. Матричные уравнения. Ранг матрицы

Сформулируем еще одно важное понятие для квадратной матрицы: понятие обратной матрицы.

Определение 1. Квадратная матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A, если справедливо равенство:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E .$$

Условием существования обратной матрицы является:

Теорема 1. Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу A^{-1}, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, то есть $detA \neq 0$.

Формула отыскания обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^V\right)^T$$

Рассмотрим алгоритм построения обратной матрицы. Пусть задана невырожденная квадратная матрица второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

1. Найдем определитель матрицы A и проверим условие существования обратной матрицы.

2. Определим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и составим из них так называемую присоединенную матрицу, которую обозначают A^V:

$$A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

3. Транспонируем присоединенную матрицу, заменив все строки соответствующими столбцами, и получим транспонированную присоединенную матрицу:

$$\left(A^V\right)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

4. Найдем обратную матрицу A^{-1} с помощью формулы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^V\right)^T$

Пример 1 Найдите обратную матрицу для матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся алгоритмом, предложенным выше. Сначала необходимо убедиться, что данная матрица имеет обратную. Для этого найдем определитель исходной матрицы A:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

следовательно, матрица имеет обратную (смотрите теорему 1).

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы по формуле $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4;$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2;$ $\quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11;$ $\quad \mathrm{A}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4;$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$

Составим присоединенную матрицу:

$$A^{V} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 11 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Транспонированная присоединенная матрица будет иметь вид:

$$(\mathrm{A}^{\mathrm{V}})^{T} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 11 \\ 4 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Составим обратную матрицу по предложенной выше формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 11 \\ 4 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица A невырожденная. Рассмотрим уравнение вида:

$$A \cdot X = B$$

Решением данного матричного уравнения будет служить выражение вида:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Для матричного уравнения вида

$$Y \cdot A = B$$

решением служит равенство:

$$Y = B \cdot A^{-1}$$

Пример 2 Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

Решение: Обозначим через $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда исходное уравнение примет вид: $A \cdot X = B$. Решение данного уравнения найдем по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Для этого найдем обратную матрицу A^{-1}, используя выше описанный алгоритм.

$$detA = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

то есть матрица A невырожденная, следовательно имеет обратную. Составим присоединенную матрицу A^V и $(A^V)^T$:

$$A^V=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ и } (A^V)^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}:$$

Составим обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1}=(-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение матричного уравнения:

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для исследования решения ряда математических задач, важное значение имеет понятие ранга матрицы. Пусть задана прямоугольная матрица размерностью $(m\times n)$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В данной матрице выделим произвольным образом k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка.

Определение 2. Минором k-го порядка матрицы A называется определитель квадратной матрицы, полученной из данной матрицы выделением произвольным образом k строк и k столбцов.

Пусть задана матрица $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ размерностью (3×4).

Для нее минорами третьего порядка являются, например, определители $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ и другие. Минорами второго порядка для этой же матрицы служат, например, определители $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ и другие. Элементы матриц можно рассматривать как миноры первого порядка. При этом следует отметить, что миноры матриц могут быть как равными нулю, так и отличными от нуля.

Определение 3. Рангом матрицы A называется наивысший порядок минора, отличного от нуля.

Определение 4. Любой минор порядка r, отличный от нуля, матрицы ранга r называется базисным минором, а столбцы и строки, составляющие его, называются базисными.

Матрица может иметь один или несколько базисных миноров.

Из определения 3 следует:

1) ранг матрицы A размерностью $m \times n$ не превосходит меньшего из ее размеров, то есть $r(A) \leq min(m,n)$;

2) $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы A равны нулю;

3) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используют преобразования, сохраняющие ранг, называемые элементарными преобразованиями. К ним относятся отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы; умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля; изменение порядка строк (столбцов) матрицы; прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число; транспонирование матрицы.

Определение 5. Матрицы, полученные одна из другой с помощью элементарных преобразований, называются эквивалентными.

Эквивалентные матрицы, вообще говоря, не равны между собой. Но можно доказать справедливость следующей теоремы:

Теорема 2. Ранги эквивалентных матриц равны.

С помощью элементарных преобразований матрицу A можно привести к ступенчатому виду, то есть к виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы A равен r. Для определения ранга ступенчатой матрицы будем пользоваться следующей теоремой 3.

Теорема 3. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Пример 3 Вычислите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -12 & 7 & 7 & 37 \end{pmatrix}$.

Решение: С помощью элементарных преобразований матрицы A приведем ее к ступенчатому виду. Для этого сделаем все элементы первого столбца, кроме a_{11}, равными нулю. Чтобы этого достичь, к элементам второй строки прибавим соответствующие элементы первой строки, умноженные на (–3), и запишем результат во вторую строку. Затем элементы третьей строки сложим с соответствующими элементами первой строки, умноженными на (–1), и результат запишем в третью строку. После таких элементарных преобразований получим матрицу A_1, эквивалентную матрице A:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -12 & 7 & 7 & 37 \end{pmatrix} \sim \mathrm{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20 \\ 0 & -14 & 8 & 6 & 40 \end{pmatrix}.$$

Далее сделаем все элементы второго столбца, кроме a_{12}, a_{22}, матрицы A_1 равными нулю. Для этого к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на (–2), и запишем результат в третью строку. Получим матрицу A_2, эквивалентную матрице A_1.

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20 \\ 0 & -14 & 8 & 6 & 40 \end{pmatrix} \sim A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отбрасывая в матрице A_2 нулевую третью строку, получим матрицу A_3, эквивалентную матрице A_2. При этом матрица A_3 является ступенчатой:

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Используя теоремы 2 и 3 можно сделать вывод, что ранг матрицы A равен рангу эквивалентной матрицы A_3 и равен числу ненулевых строк этой матрицы. Таким образом, $r(A)=2$.

Найдите обратные матрицы:

1.34 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

1.35 $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1.36 $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Решите матричные уравнения:

1.37 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1.38 $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

1.39 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1.40 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1.41 $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ *Ответ:* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Системы линейных уравнений

Систему из *m* линейных уравнений с *n* неизвестными можно записать в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где числа $a_{11}, a_{12}, \dots a_{mn}$ называются коэффициентами системы, числа $b_1, b_2, \dots b_m$ называются свободными членами системы, $x_1, x_2, \dots x_n$ – неизвестные системы.

Определение 1. Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система линейных уравнений называется однородной; если хотя бы одно из чисел $b_1, b_2, \dots b_m$ отлично от нуля, то система называется неоднородной.

Определение 2. Решением системы линейных уравнений называется совокупность чисел $c_1, c_2, \dots c_n$, при подстановке которых вместо соответствующих неизвестных, каждое уравнение системы обращается в тождество.

Определение 3. Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Определение 4. Совместная система линейных уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет бесчисленное множество решений.

Определение 5. Две совместные системы уравнений называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй системы и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой.

Прежде чем решить систему линейных уравнений, её необходимо исследовать на совместность с помощью теоремы Кронекера-Капелли.

Теорема Кронекера-Капелли: Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленной для данной системы, был равен рангу её расширенной матрицы *B*, то есть *r(A)=r(B)*, где:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

1) если $r(A) \neq r(B)$, то система несовместна;
2) если $r(A)=r(B)=n$, то система совместна и определена (n – число неизвестных);
3) если $r(A)=r(B)<n$, то система совместна и неопределена.

Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера

Рассмотрим решение систем линейных уравнений, у которых число уравнений равно числу неизвестных, то есть $m=n$. Их решение рассмотрим на примере системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

Такую систему можно решить, используя определители по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}\ ;\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$$

Где Δ – главный определитель системы уравнений, составленный из коэффициентов при неизвестных системы. Определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$, которые получаются из главного определителя системы, если в нём коэффициенты при соответствующем неизвестном x_1 или x_2 заменить свободными членами, называются определителями при неизвестном соответственно x_1 или x_2.

Пример 1 Решите систему уравнений: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -4 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$.

Решение. Для решения системы воспользуемся формулами Крамера. Для этого сначала вычислим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4-(-3)=7 \neq 0.$$

Таким образом, система совместна и определена. Найдем определители при неизвестных:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -8-(-15)=7,\ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10-(-4)=14.$$

Подставляя полученные значения в формулы Крамера, найдем решение системы:

$$x_1 = \frac{7}{7} = 1;\ x_2 = \frac{14}{7} = 2.$$

Решением системы служит пара чисел (1; 2).

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы

Пусть задана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и назовем её матрицей системы; матрицу-столбец неизвестных $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и матрицу-столбец свободных членов $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, систему можно записать в матричной форме, то есть в виде матричного уравнения:

$$A \cdot X = B$$

Пусть матрица A невырожденная. Тогда будет существовать обратная матрица A^{-1} и решение матричного уравнения, следовательно, решение системы можно записать в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример 2 Решите систему уравнений матричным способом:

$$\begin{cases} x+2y+3z=13 \\ -y+4z=11 \\ x+z=5 \end{cases}.$$

Решение. В матричной форме данную систему линейных уравнений можно записать в виде $A \cdot X = B$, где:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы можно найти по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$. Для решения системы необходимо найти обратную матрицу. Воспользуемся тем, что такая матрица была найдена в примере 1 (пункт 3, страница 15):

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 11 \\ 4 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы будет иметь вид:

$$X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 11 \\ 4 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -13-22+55 \\ 52-22-20 \\ 13+22-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы нашли решение системы *x=2, y=1, z=3,* то есть тройка чисел *(2;1;3)* – является единственным решением системы. Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденные значения неизвестных удовлетворяют данной системе уравнений.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Рассмотрим решение систем линейных уравнений методом Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Этот метод решения заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого или треугольного вида. Из этой системы последовательно, начиная с последних номеров, находятся все неизвестные. Причем, методом Гаусса можно решать системы линейных уравнений, в которых число уравнений равно числу неизвестных ($m=n$), а также и те, в которых число уравнений не совпадает с числом неизвестных ($m\neq n$).

Пример 3 Решите систему уравнений: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$.

Решение. Найдем ранги матрицы системы A и расширенной матрицы системы B, выполняя элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 4 & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -3 & | & -4 \\ 1 & 4 & 2 & | & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathrm{I}\cdot(-1)+\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -3 & | & -4 \\ 0 & 3 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \mathrm{II}\cdot(3)+\mathrm{III} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & -1 & -3 & | & -4 \\ 0 & 0 & -8 & | & -8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, *r(A)=r(B)=3=n.* Тогда по теореме Кронекера-Капелли система совместна и определена, то есть имеет единственное решение. Последней матрице соответствует система линейных уравнений, приведенная к треугольному виду и равносильная данной:

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \mathrm{x}_2 + 3x_3 = 4 \\ 8x_3 = 8 \end{cases}.$$

Из этой системы последовательно находим неизвестные:

$$x_3 = 1;$$

$$x_2 = 4 - 3x_3 = 4 - 3 = 1;$$

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1$$

Таким образом, тройка чисел (1;1;1) является единственным решением системы.

Пример 4 Исследуйте систему уравнений и найдите её общее и частное решения:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Решение. Исследуем систему линейных уравнений. Для этого составим расширенную матрицу системы *B*, внутри которой выделим матрицу системы *A*. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу к ступенчатому виду и определим ранги матриц.

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{array}\right)^{\mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{II}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{array}\right)^{\mathrm{I}\cdot(-1)+\mathrm{III}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \mathrm{II}+\mathrm{III} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, $r(A)=r(B)=2<n\ (n=3)$. По теореме Кронекера-Капелли, система совместна и неопределена, следовательно, имеет бесчисленное множество решений.

Выделим в последней матрице базисный минор. Неизвестные x_1 и x_2 – зависимые, а неизвестное x_3 – свободное. Полученной матрице соответствует система линейных уравнений, приведенная к ступенчатому виду и равносильная данной:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Перенесем свободное неизвестное x_3 вправо и получим систему, равносильную данной:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - x_3 \\ 3x_2 = 4 - x_3 \end{cases}.$$

Выражая последовательно зависимые неизвестные через свободное, будем иметь:
$$x_2 = \frac{4-x_3}{3}; \qquad x_1 = 3 - x_3 - x_2.$$

Подставляя x_2, получим следующие соотношения:
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5-2x_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{4-x_3}{3} \end{cases}, \text{ где } x_3 \in R.$$

Эти соотношения являются общим решением системы.

Из общего решения (ОР) системы можно получить бесчисленное множество частных решений (ЧР), придавая свободному неизвестному x_3 любые значения. Например, при

$x_3 = 1$, получим частное решение системы (1;1;1), а при $x_3 = 2$ частным решением системы будет служить тройка чисел $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 2\right)$.

Однородные системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему *m* линейных уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система всегда совместна, так как имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Такое решение называется тривиальным решением системы. Существование тривиального решения однородной системы следует из того, что ранг матрицы системы *A* всегда будет равен рангу расширенной матрицы *B*. Если $r(A)=r(B)=n$, то такая система будет совместна и определена, то есть будет иметь только тривиальное решение. В случае если $r(A)=r(B)<n$, однородная система будет совместна и неопределена. То есть кроме тривиального решения будет иметь бесчисленное множество нетривиальных решений.

Положим $r(A)=r$ и пусть $x_1 \ldots. x_r$ – главные переменные, $t_1 \ldots. t_{n-r}$ – значения свободных переменных $x_{r+1}, \ldots x_n$. Выберем $(n-r)$ частных решений системы, полученных из общего решения следующим образом: одно из значений свободных переменных полагается равным одному, а остальные равны нулю. Эти решения образуют фундаментальную систему решений (ФСР) однородной системы.

Пример 5 Найдите фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

Решение. Составим матрицу из коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{pmatrix}$$

Данная матрица имеет ранг $r(A)=2$ (проверьте самостоятельно).

Выберем в качестве базисного минора, например, $\mathrm{M}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

Тогда укороченная система имеет вид: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5 \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5 \end{cases}$

Положим $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$.

Тогда

$$x_1 = -\frac{19}{8}\cdot t_1 - \frac{3}{8}\cdot t_2 + \frac{1}{2}\cdot t_3$$

$$x_2 = -\frac{7}{8}\cdot t_1 + \frac{25}{8}\cdot t_2 - \frac{1}{2}\cdot t_3$$

Общее решение системы примет вид:

$$X(t_1,t_2,t_3) = \begin{pmatrix} -\frac{19}{8}\cdot t_1 - \frac{3}{8}\cdot t_2 + \frac{1}{2}\cdot t_3 \\ -\frac{7}{8}\cdot t_1 + \frac{25}{8}\cdot t_2 - \frac{1}{2}\cdot t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решения:

$$E_1 = X(1{,}0{,}0) = \begin{pmatrix} -\frac{19}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = X(0{,}1{,}0) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = X(0{,}0{,}1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

С использованием фундаментальной системы, общее решение может быть записано в виде:

$$X(t_1,t_2,t_3) = t_1\cdot E_1 + t_2\cdot E_2 + t_3\cdot E_3$$

Найдите решения систем линейных уравнений, используя обратную матрицу и формулы Крамера:

1.41 $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$ *Ответ: (-3,1)*

1.42 $\begin{cases} \sqrt{3}x_1 + 2x_2 = 11 \\ 4x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0 \end{cases}$ *Ответ:* $(\sqrt{3},4)$

1.43 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 8 \\ 7x_1 + 8x_2 = 2 \end{cases}$ *Ответ: (-2,2,1)*

1.44 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$ *Ответ: (1,2,-3)*

1.45 $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}$ *Ответ: (-2,0,1,-1)*

1.46 $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 28 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 36 \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$ *Ответ: (2,-3,2,-1)*

Исследуйте системы линейных уравнений, для совместных систем найдите общее и одно частное решение:

1.47 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$ *Ответ: (1,2)* **1.48** $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ Ответ: несовместна

1.49 $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$ Ответ: (t+1;t)

1.50 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ *Ответ: несовместна*

1.51 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$ *Ответ: (2,3,5)*

1.52 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ *Ответ: (-3t,t,5t)*

1.53 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$ *Ответ: (t1;t2;5-8t1+4t2;-3;1+2t1-t2)*

1.54 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 7 \end{cases}$ *Ответ: (1+2t1+t2-3t3; t1; 1;t2; t3)*

Найдите фундаментальную систему решений и общее решение систем:

1.55 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$ *Ответ:* $(t_1E_1+t_2E_2)$ $E_1=(2,1,0)^T$, $E_2=(3,0,1)^T$

1.56 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ *Ответ: (0,0,0)*

2 Векторная алгебра

Встречаются скалярные и векторные величины.

Определение 1. Отрезок, имеющий определенные длину и направление в пространстве, то есть направленный отрезок, называется геометрическим вектором или просто вектором. Обозначение: $\overline{\mathrm{AB}}$, $\bar{a}$ или $\overrightarrow{AB}$; $\vec{a}$ (рисунок 1).

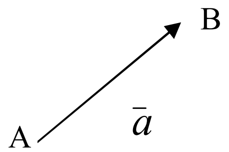


Рисунок 1 – Изображение вектора

Определение 2. Расстояние между точками *A* и *B*, то есть длина вектора, называется модулем вектора и обозначается $|\bar{a}|,|\overline{AB}|$.

Определение 3. Векторы $\vec{a}$ и $\bar{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными.

$\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ – коллинеарные, при этом векторы $\bar{a},\bar{m}$ – не являются коллинеарными ($\bar{a}II\bar{b}$; $\bar{a}II\bar{c}$; $\bar{a}$ и $\bar{m}$ не коллинеарны).

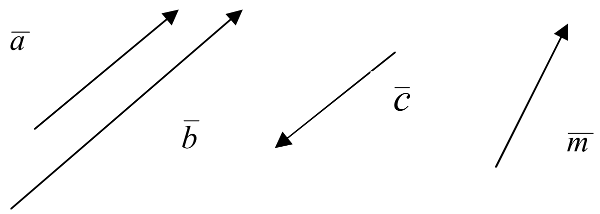


Рисунок 2 – Изображение коллинеарных и неколлинеарных векторов

Определение 4. Два вектора $\vec{a}$ и $\bar{b}$ называются равными, если они: 1) сонаправлены, то есть $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$; 2) имеют равные длины (модули) то есть $|\bar{a}|=|\bar{b}|$.

Равные векторы будем обозначать: $\bar{a}=\bar{b}$ (рисунок 3).

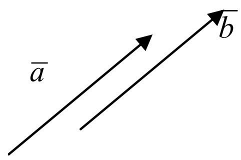


Рисунок 3 – Изображение равных векторов

Определение 5. Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейные операции над векторами и их свойства

Определение 1. Линейными операциями над векторами называются операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число.

Пусть $\vec{a}$ и $\bar{b}$ – два произвольных вектора.

Определение 2. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор ($\bar{a}+\bar{b}$), идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\bar{b}$, при условии, что конец вектора $\vec{a}$ и начало вектора $\bar{b}$ совпадают. Это правило сложения векторов называется правилом треугольника ($\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ (рисунок 4)).

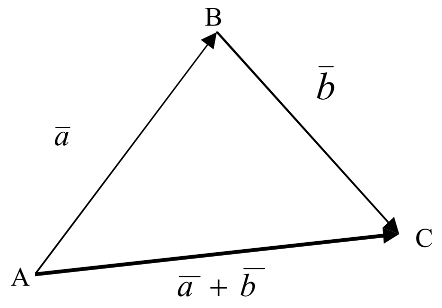


Рисунок 4 – Изображение суммы векторов (правило треугольников)

Правило параллелограмма сложения векторов. Отложим от точки *O* векторы $\overline{OA}=\bar{a}$ и $\overline{OB}=\bar{b}$. Построим на этих векторах, как на сторонах, параллелограмм *OACB*. Суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ служит вектор $\overline{OC}$, являющийся диагональю параллелограмма *OACB*, проведенной из вершины *O*. Таким образом, $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$ (рисунок 5).

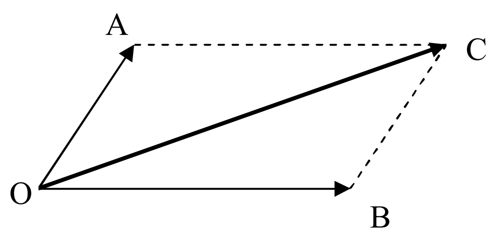


Рисунок 5 – Изображение суммы векторов (правило параллелограмма)

Понятие суммы векторов, сформулированное для двух слагаемых, можно обобщить на случай любого конечного числа слагаемых (правило многоугольника (рисунок 6)).

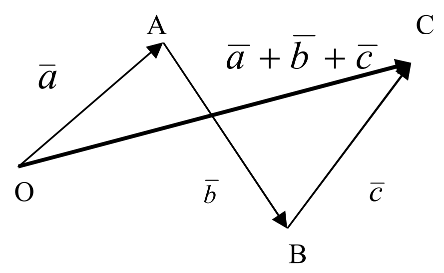


Рисунок 6 – Изображение суммы векторов (правило многоугольника)

Определение 3. Вектор ($-\bar{a}$) называется противоположным ненулевому вектору $\bar{a}$, если $\bar{a}+(-\bar{a})=0$ (рисунок 7).

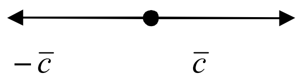


Рисунок 7 – Изображение противоположных векторов

Признак коллинеарности векторов в векторной форме: если $\bar{a}=\lambda\bar{b}$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. Верно и обратное утверждение, то есть если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то существует число λ такое, что $\bar{a}=\lambda\bar{b}$.

Определение 4. Вектор, модуль которого равен единице, называется единичным вектором.

Определение 5. Вектор, сонаправленный вектору $\bar{a}$, модуль которого равен единице, называется ортом вектора $\bar{a}$ и обозначается $\bar{a}_0$ (2.1)

$$\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\bar{a}_0 \tag{2.1}$$

Из равенства (2.1) следует, что $\bar{a}_0=\dfrac{1}{|\bar{a}|}\cdot\bar{a}$ или $\bar{a}_0=\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$.

Угол между векторами. Проекция вектора на ось

Определение 6. Углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший угол φ ($0\le\varphi\le\pi$), на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым (рисунок 8).

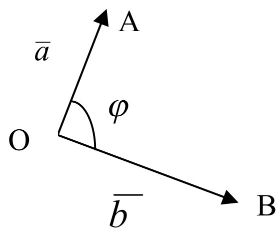


Рисунок 8 – Угол между векторами

Определение 7. Если угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ составляет 90^0, то векторы называются ортогональными.

Определение 8. Прямая с заданными на ней точкой и единичным базисным вектором $\bar{e}$ называется осью.

Определение 9. Ортогональной проекцией точки A на ось называется точка пересечения оси с перпендикулярной к ней плоскостью, проходящей через точку A.

Теорема 1. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось ℓ равна модулю вектора $\vec{a}$, умноженному на косинус угла φ между вектором и осью:

$$Пр_e\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\cos\varphi \tag{2.2}$$

Линейная зависимость векторов. Базис

Определение 10. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ...\overline{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство:

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + ... + \lambda_n \overline{a}_n = \overline{0} \tag{2.2}$$

Определение 11. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ...\overline{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство (2.2) справедливо только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Определение 12. Базисом во множестве геометрических векторов пространства R_n называют упорядоченную систему векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$, удовлетворяющую условиям:

1) векторы $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$ линейно независимы;

2) любой вектор $\overline{a}$ можно представить единственным образом в виде линейной комбинации векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$, то есть:

$$\overline{a} = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2 + ... + x_n \overline{e}_n \tag{2.3}$$

Обозначение базиса: $B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$. Равенство (2.3) называется разложением вектора $\overline{a}$ в базисе $B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n)$.

Определение 13. Коэффициенты линейной комбинации ($x_1, x_2, ..., x_n$), с помощью которой вектор $\overline{a}$ выражается через базисные векторы, называются координатами вектора.

Задать вектор с помощью координат можно следующим образом: $\overline{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$.

Определение 14. Базис $B = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, ... \overline{e}_n)$ называется ортогональным, если векторы базиса попарно перпендикулярны (рисунок 9).

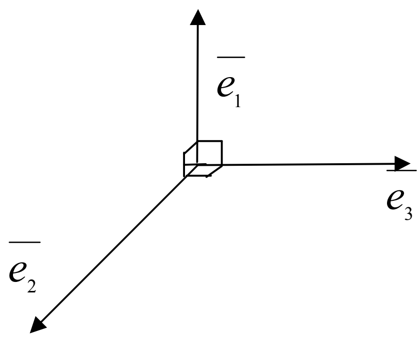


Рисунок 9 – Изображение ортогонального базиса

Определение 15. Если в ортогональном базисе длины базисных векторов равны единице, то есть $|\overline{e}_1| = |\overline{e}_2| = |\overline{e}_3| = 1$, то базис называется ортонормированным.

Обозначение ортонормированного базиса: $B = (\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$.

Определение 16. Конструкция, состоящая из произвольной точки О и приложенного к ней ортонормированного базиса $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, называется прямоугольной декартовой системой координат (ПДСК) (рисунок 10).

Оси, связанные с векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, получили специальные названия: ось OX – ось абсцисс; ось OY – ось ординат; ось OZ – ось аппликат. Точка O называется началом системы координат.

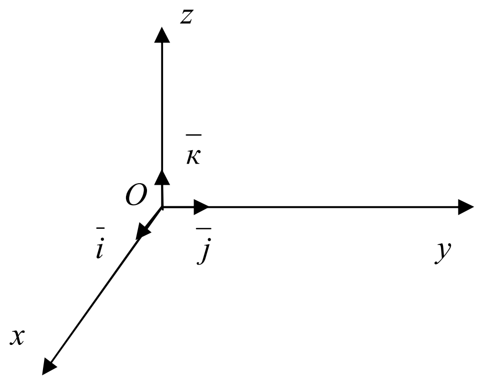


Рисунок 10 – Изображение прямоугольной декартовой системы координат

Действия над векторами в координатной форме

Пусть заданы два вектора $\bar{a}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ и $\bar{a}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ или $\bar{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{a}_2(x_2, y_2, z_2)$.

1) Найдем координаты вектора суммы ($\bar{a}_1 + \bar{a}_2$):

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k} \tag{2.4}$$

2) Аналогично координаты вектора разности ($\bar{a}_1 - \bar{a}_2$):

$$\bar{a}_1 - \bar{a}_2 = (x_1 - x_2)\bar{i} + (y_1 - y_2)\bar{j} + (z_1 - z_2)\bar{k} \tag{2.5}$$

3) Координаты вектора $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$, умноженного на число λ, найдутся следующим образом:

$$\lambda\bar{a} = \lambda x_1\bar{i} + \lambda y_1\bar{j} + \lambda z_1\bar{k} \tag{2.6}$$

Признак коллинеарности векторов в координатной форме: для того чтобы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны, то есть $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Рассмотрим вектор $\overline{AB}$, начало которого точка $A(x_1,y_1,z_1)$, а конец точка $B(x_2,y_2,z_2)$. Его длина (модуль вектора) определяется по формуле:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (2.7)$$

Пример 1 Дан треугольник ABC, MN – средняя линия треугольника, параллельная основанию AC, BK – медиана, O – точка пересечения MN и BK. Найдите разложение векторов $\overline{OB}$, $\overline{OM}$, $\overline{OA}$, $\overline{BC}$ в базисе, состоящем из векторов $B=\{\overline{ON},\overline{OC}\}$, запишите координаты этих векторов в предложенном базисе.

Решение. Выполним построение (рисунок 11).

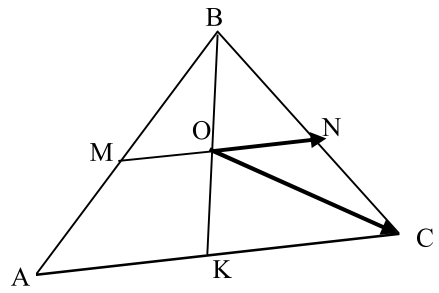


Рисунок 11 – Чертеж к задаче № 1

1) Найдем разложение вектора $\overline{OM}$. Точка O является серединой MN, то есть равны отрезки $OM=ON$. Однако направление вектора $\overline{OM}$ противоположно направлению вектора, $\overline{ON}$, таким образом, $\overline{OM} = -\overline{ON}$. Координаты вектора $\overline{OM}$ (-1,0).

2) Определим разложение вектора $\overline{OB}$.

$$\overline{OB} = \overline{ON} + \overline{NB} = \left[\overline{NB} = \overline{CN}\right] = \overline{ON} + \overline{CN} = \overline{ON} + (\overline{CO} + \overline{ON}) = 2 \cdot \overline{ON} - \overline{OC}.$$

Координаты вектора $\overline{OB}$ (2,-1).

3) Выполним разложение вектора $\overline{OA}$.

$$\overline{OA} = \overline{OK} + \overline{KA} = \begin{bmatrix} \overline{OK} = -\overline{OB} \\ \overline{KA} = -\overline{KC} \end{bmatrix} = -\overline{OB} - \overline{KC} = -(2 \cdot \overline{ON} - \overline{OC}) - (2 \cdot \overline{ON}) =$$

$$= -2 \cdot \overline{ON} + 2 \cdot \overline{OC} - 2 \cdot \overline{ON} = -4 \cdot \overline{ON} + 2 \cdot \overline{OC}.$$

Координаты вектора $\overline{OA}$ (-4,2).

4) Выполним разложение вектора $\overline{BC}$.

$$\overline{BC} = \overline{BO} + \overline{OC} = \left[\overline{BO} = -\overline{OB}\right] = -\overline{OB} + \overline{OC} = -(2 \cdot \overline{ON} - \overline{OC}) + \overline{OC} = -2 \cdot \overline{ON} + 2 \cdot \overline{OC} + \overline{OC} =$$

$$= -2 \cdot \overline{ON} + 3 \cdot \overline{OC}$$

Координаты вектора $\overline{BC}(-2,3)$.

Пример 2 Найдите вектор ($3\overline{a} + 4\overline{b}$), если $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}$; $\overline{b} = 7\overline{i} + \overline{j} - 5\overline{k}$.

Решение. Чтобы найти координаты вектора ($3\overline{a} + 4\overline{b}$), найдем сначала координаты векторов $3\overline{a}$ и $4\overline{b}$ по формуле (2.6): $3\overline{a} = 9\overline{i} - 12\overline{j} + 6\overline{k}$; $4\overline{b} = 28\overline{i} + 4\overline{j} - 20\overline{k}$. Тогда:

$$3\overline{a} + 4\overline{b} = (9 + 28)\overline{i} + (-12 + 4)\overline{j} + (6 - 20)\overline{k} = 37\overline{i} - 8\overline{j} - 14\overline{k}.$$

Пример 3 Найдите проекцию разности векторов $\overline{b}-\overline{a}$ на ось ℓ, если длины векторов $\left|\overline{a}\right|=2$, $\left|\overline{b}\right|=\sqrt{3}$, углы векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ с осью ℓ равны $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{6}$ соответственно.

Решение. Найдем проекцию векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на ось ℓ:

$$Пр_e\overline{a}=2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$Пр_e\overline{b}=\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

Тогда проекция разности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на ось ℓ определится равенством:

$$Пр_e\left(\overline{b}-\overline{a}\right)=Пр_\ell\overline{b}-Пр_\ell\overline{a}=1{,}5-1=0{,}5$$

2.1 По данным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ постройте векторы: $\frac{1}{3}\cdot\overline{a}-2\cdot\overline{b}$; $3\cdot\overline{a}+\overline{b}$; $3\cdot(\overline{a}-\overline{b})$; $\frac{3}{4}\cdot(\overline{a}+2\cdot\overline{b})-2\cdot(\overline{a}-2\cdot\overline{b})-\overline{a}+\overline{b}$.

2.2 На трех векторах $\overline{OA}=\overline{a}$, $\overline{OB}=\overline{b}$ и $\overline{OC}=\overline{c}$ построен параллелепипед. Укажите те его вектор-диагонали, которые соответственно равны $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$, $\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$, $\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$, $\overline{b}-\overline{a}-\overline{c}$.

2.3 В параллелограмме *ABCD* точка *O* – точка пересечения диагоналей. В базисе из векторов $B=\left\{\overline{AB};\overline{AD}\right\}$ найдите разложение векторов $\overline{CD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CO}$, $\overline{BD}$.

2.4 Дан треугольник *ABC, AK* и *BP* – медианы, точка *O* – точка пересечения медиан. Найдите разложение векторов $\overline{OB}$, $\overline{AC}$, $\overline{OC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ в базисе, состоящем из векторов $B=\left\{\overline{OA};\overline{OP}\right\}$.

2.5 Дан треугольник *ABC,* в котором проведены медиана *CK* и средняя линия *PQ*, параллельная стороне *AB*, точка *O* – точка пересечения медианы и средней линии. Найдите разложение векторов $\overline{\mathrm{OQ}}$, $\overline{CK}$, $\overline{PC}$ в базисе, состоящем из векторов $B=\left\{\overline{AB};\overline{AC}\right\}$. Запишите координаты векторов в указанном базисе.

2.6 В треугольнике *MKP* уна стороне *MP* взята точка *A* таким образом, что $\mathrm{MA}\div\mathrm{AP}=3\div1$. Найдите координаты векторов $\overline{KA}$, $\overline{KP}$, $\overline{MD}$ в базисе $B=\left\{\overline{MA};\overline{MK}\right\}$.

2.7 Дана треугольная пирамида *KABC.* Точка *M* – пересечение медиан треугольника *ABC.* Найдите координаты векторов $\overline{KM}$, $\overline{KB}$ $\overline{K\mathrm{P}}$ в базисе $B=\left\{\overline{CK};\overline{CA};\overline{CB}\right\}$, если точка *P* лежит на стороне *AB* и делит её в отношении 1:2, считая от вершины *B*.

2.8 Проверьте коллинеарность векторов:

1) $\overline{a}(-1{,}1{,}\frac{1}{2})$ и $\overline{b}(2{,}-2{,}-1)$;

2) $\overline{c}(2,3,5)$ и $\overline{d}(-1,2,2)$.

2.9 Заданы векторы $\overline{e_1}(1,0,0)$, $\overline{e_2}(1,1,0)$, $\overline{e_3}(1,1,1)$. Покажите, что векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ образуют базис. Вычислите координаты вектора $\overline{a}=-2\overline{i}-\overline{k}$ в базисе $B=\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$. Напишите соответствующее разложение по базису.

2.10 Заданы векторы $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}$ и $\overline{b}=-3\overline{j}-2\overline{k}$ и $\overline{c}=\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$. Найдите:

1) координаты орта $\overline{a_0}$;

2) координаты вектора $\overline{a}-\frac{1}{2}\cdot\overline{b}+\overline{c}$;

3) разложение вектора $\overline{a}+\overline{b}-2\cdot\overline{c}$ по базису $B=\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\}$;

4) проекцию вектора $\overline{a}$ на ось ℓ, если угол, который образует вектор с осью составляет $\frac{\pi}{4}$.

2.11 Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=12$. Определите $|\overline{a}+\overline{b}|$, и $|\overline{a}-\overline{b}|$

2.12 Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол 60^0, причем $|\overline{a}|=5$, $|\overline{b}|=8$. Определите $|\overline{a}+\overline{b}|$ и $|\overline{a}-\overline{b}|$.

2.13 По сторонам *OA* и *OB* прямоугольника *OACB* отложены единичные векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$. Выразите через $\overline{i}$ и $\overline{j}$ векторы *OA, AC, CB, BO, OC, BA*, если длина *OA=3, OB=4*.

2.14 Даны два вектора $\overline{a}$(3,-2,6) и $\overline{b}$(-2,1,0). Определите проекции на координатные оси следующих векторов: 1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $2\cdot\overline{a}+3\cdot\overline{b}$; 3) $\frac{1}{3}\cdot\overline{a}-\overline{b}$.

2.15 Определите, при каких значениях α и β векторы $\overline{a}=-2\cdot\overline{i}+3\cdot\overline{j}+\beta\cdot\overline{k}$ и $\overline{b}=\alpha\cdot\overline{i}-6\cdot\overline{j}+2\cdot\overline{k}$ коллинеарны?

2.16 Проверьте коллинеарность векторов $\overline{a}$(2,-1,3) и $\overline{b}$(-6,3,-9). Установите, какой из них длиннее другого и как они направлены – в одну или противоположные стороны?

2.17 Задана тройка некомпланарных векторов $\overline{e_1}(1,0,0)$; $\overline{e_2}(1,1,0)$, $\overline{e_3}(1,1,1)$. Вычислите координаты вектора $\overline{a}=-2\cdot\overline{i}-\overline{k}$ в базисе $B=\{\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\}$ и напишите соответствующее разложение по базису.

2.18 Даны три вершины *A(3,-4,7)*; *B(-5,3,-2)* и *C(1,2,-3)* параллелограмма *ABCD*. Найдите четвертую вершину *D*, противоположную *B*.

2.19 Даны две смежные вершины параллелограмма *A(-2,6)*; *B(2,8)* и точка пересечения его диагоналей *M(2,2)*. Найдите две другие вершины.

2.20 На оси абсцисс найдите точку *M*, расстояние которой от точки *A(3,-3)* равно *5*.

2.21 На оси ординат найдите точку *M*, равноудаленную от точек *A(1,-4,7); B(5,6,-5)*.

2.22 Даны вершины треугольника *A(3,-1,5)*; *B(4,2,-5)*; *C(-4,0,3)*. Найдите длину медианы, проведенной из вершины *A*.

Деление отрезка в заданном отношении

Пусть точка M делит отрезок M_1M_2 в заданном отношении $\lambda > 0$, то есть $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$, причем координаты точки M_1 и M_2 известны: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Координаты точки *M*.

$$(x, y, z) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right) \tag{2.8}$$

Направляющие косинусы вектора

Направление вектора в пространстве определяется углами α, β, γ, которые вектор составляет с осями координат (рисунок 12). Косинусы углов, которые образуются вектором с положительными направлениями осей *OX, OY* и *OZ* называются направляющими косинусами вектора и обозначаются $\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma$, где $(\overline{a}\,\hat{}\,ox) = \alpha$; $(\overline{a}\,\hat{}\,oy) = \beta$; $(\overline{a}\,\hat{}\,oz) = \gamma$, то есть $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{i}) = \alpha$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{j}) = \beta$, $(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{k}) = \gamma$.

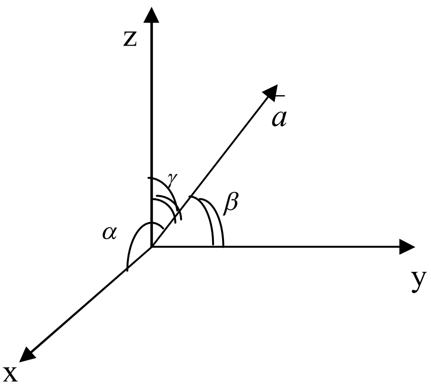


Рисунок 12 – Изображение углов, образуемых вектором с координатными осями

Пусть дан вектор $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Проекции вектора (координаты) на оси:

$x = Пр_{ox}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\alpha$, $y = Пр_{oy}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\beta$, $z = Пр_{oz}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\gamma$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|};\ \cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|};\ \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{2.9}$$

Скалярное произведение векторов

Определение 17. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\overline{a}\cdot\overline{b}$ или $(\overline{a},\overline{b})$:

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos(\overline{a},\overline{b}) \tag{2.10}$$

Условие ортогональности векторов: для того чтобы два ненулевых вектора были ортогональными, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.

Физический смысл скалярного произведения хорошо виден при решении следующей задачи. Пусть материальная точка *M* движется по прямой от точки *A* до точки *B*, проходя путь $\overline{\ell}$. Пусть на точку *M* действует сила $\overline{F}$, постоянная по величине и по направлению, составляющая с направлением перемещения точки угол α. Тогда работа *A*, совершаемая силой $\overline{F}$ на участке $\overline{\ell}$, равна:

$$A = |F|\cdot|\ell|\cdot\cos\alpha = (\overline{F},\overline{\ell}),$$

то есть работа определяется как скалярное произведение вектора силы $\overline{F}$ на вектор перемещения $\overline{\ell}$: $A = \overline{F}\cdot\overline{\ell}$

Формуле (2.10) можно придать другой вид. Пусть векторы $\vec{a}$, $\overline{b}$ приложены к одной точке *O*. Так как $Пр_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\cdot\cos\alpha$, то $(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}|\cdot Пр_{\overline{a}}\overline{b}$ Аналогично, если $Пр_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}|\cdot\cos\alpha$, то $(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{b}|\cdot Пр_{\overline{b}}\overline{a}$. Из данных равенств следует, что

$$Пр_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|},\quad Пр_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{b}|} \tag{2.11}$$

Определение 18. Скалярное произведение вектора $\overline{a}$ самого на себя называется скалярным квадратом вектора и обозначается: $\overline{a}^2$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то есть: $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$

Пусть векторы $\vec{a}$, $\overline{b}$ заданы с помощью координат $\overline{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b}(x_2, y_2, z_2)$. Тогда:

$$(\overline{a},\overline{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{2.12}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат.

Из определения скалярного произведения можно выразить: $\cos(\overline{a},\overline{b}) = \dfrac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

В координатной форме последнее равенство можно записать:

$$\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}$$

С помощью скалярного произведения можно находить:

1) проекцию одного вектора на направление другого: $Пр_{\bar{a}}\bar{b} = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|}$ или в координатной форме: $Пр_{\bar{a}}\bar{b} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}}.$

2) косинус угла между векторами: $\cos(\bar{a},\bar{b}) = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$, или в координатной форме $\cos(\bar{a},\bar{b}) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}$;

3) направляющие косинусы углов: $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\bar{a}|}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\bar{a}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\bar{a}|}$ или в координатной форме:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},\ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

4) координаты орта вектора $\bar{a}$, то есть координаты вектора $\bar{a}_0$. Координаты орта совпадают с направляющими косинусами: $\bar{a}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Векторное произведение векторов

Определение 1. Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который определяется следующим образом:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a},\bar{b})$;

2) $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$ – вектор $\bar{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\bar{b}$ (то есть перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\bar{b}$);

3) направление вектора $\bar{c}$ таково, что если смотреть из его конца вдоль вектора, то поворот по кратчайшему пути от вектора $\vec{a}$ к вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против движения часовой стрелки (рисунок 13).

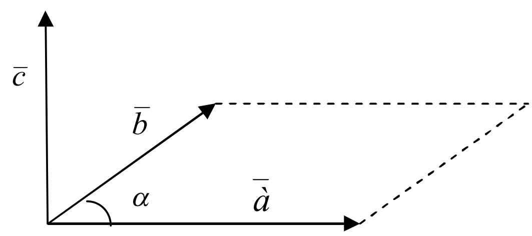


Рисунок 13 – Изображение векторного произведения векторов

Обозначение векторного произведения: $\bar{a}\times\bar{b}$ или $[\bar{a},\bar{b}]$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю: $[\bar{a},\bar{b}]=0$.

Геометрический смысл векторного произведения: модуль вектора $\bar{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах $\vec{a}$ и $\bar{b}$, как на сторонах.

Рассмотрим свойства векторного произведения.

1) При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, сохраняя модуль; таким образом, векторное произведение не обладает переместительным (коммутативным) свойством:

$$\bar{a}\times\bar{b}=-(\overline{b}\times\bar{a})$$

2) Векторное произведение обладает сочетательным (ассоциативным) свойством относительно скалярного множителя, то есть

$$\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=\lambda\bar{a}\times\bar{b}=\bar{a}\times\lambda\bar{b}.$$

Аналогичным образом можно продемонстрировать и равенство $\lambda(\bar{a}\times\bar{b})=\bar{a}\times\lambda\bar{b}$.

3) Векторное произведение обладает распределительным (дистрибутивным) свойством:

$$[\bar{a}_1+\bar{a}_2,\bar{a}_3]=[\bar{a}_1,\bar{a}_3]+[\bar{a}_2,\bar{a}_3];$$

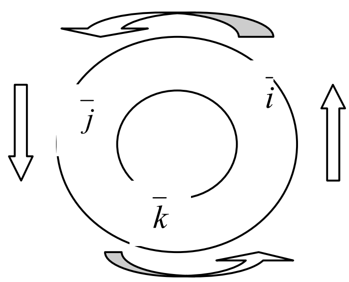
$$[\bar{a}_3,\bar{a}_1+\bar{a}_2]=[\bar{a}_3,\bar{a}_1]+[\bar{a}_3,\bar{a}_2].$$

Отметим ***признак коллинеарности векторов***: для того чтобы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\bar{b}$ были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось ноль-вектору.

Рассмотрим векторные произведения векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$:

$$[\bar{i},\bar{i}]=[\bar{j},\bar{j}]=[\bar{k},\bar{k}]=0;\begin{bmatrix}[\bar{i},\bar{j}]=\bar{k} & [\bar{j},\bar{k}]=\bar{i} & [\bar{k},\bar{i}]=\bar{j}\\ [\bar{j},\bar{i}]=-\bar{k} & [\bar{k},\bar{j}]=-\bar{i} & [\bar{i},\bar{k}]=-\bar{j}\end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Чтобы не ошибаться в знаках, полезно держать в уме следующую схему:



Схема

Если направление кратчайшего пути от первого вектора ко второму совпадает с направлением стрелки, то векторное произведение равно третьему вектору. В случае несовпадения – векторное произведение противоположно третьему вектору.

Если векторы заданы координатами в ПДСК, то векторное произведение можно определить согласно равенству:

$$[\bar{a}_1, \bar{a}_2] = \quad = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Смешанное произведение векторов

Определение 1. Векторно-скалярное произведение 3-х векторов называется смешанным произведением векторов.

Обозначение: $(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$

Выражение для смешанного произведения векторов в координатной форме:

Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ заданы координатами $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c}(x_3, y_3, z_3)$. Тогда смешанное произведение трех векторов равно определителю III-го порядка, строками которого являются координаты соответствующих векторов.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (2.14)$$

Для смешанного произведения векторов справедливы свойства:

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{b}\bar{c}\bar{a}) = (\bar{c}\bar{a}\bar{b}) = -(\bar{b}\bar{a}\bar{c}) = -(\bar{c}\bar{b}\bar{a}) = -(\bar{a}\bar{c}\bar{b}) .$$

Геометрический смысл смешанного произведения: отложим векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ от общего начала (рисунок 14) и построим на этих векторах, как на ребрах, параллелепипед (предполагая, что векторы не лежат в одной плоскости).

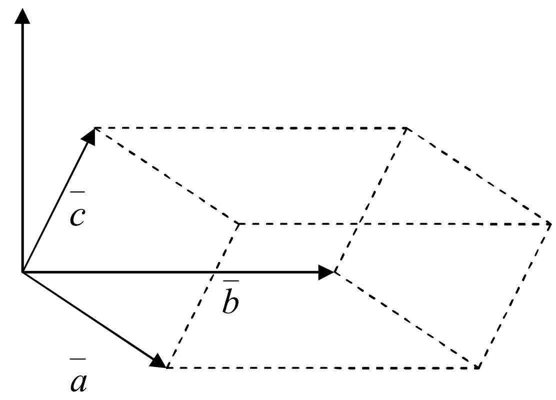


Рисунок 14 – Изображение параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

$$|(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})| = V_{пар-да} \qquad (2.15)$$

То есть, модуль смешанного произведения 3-х векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах.

Для компланарных векторов их смешанное произведение равно нулю.

Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, как на ребрах, можно определить:

$$V_{пир-ды} = \frac{1}{6} V_{пар-да} = \frac{1}{6}\left|\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)\right| = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

2.23 Найдите направляющие косинусы вектора $\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\sqrt{2} \cdot \vec{k}$

Ответ: $\left(\frac{5}{7}; -\frac{4}{7}; \frac{2\sqrt{2}}{7}\right)$

2.24 Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\vec{b} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\sqrt{2} \cdot \vec{k}$ и его модуль равен 5.

2.25 Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если известно, что он составляет с осями *OX*, *OY* углы $\alpha = 60^0, \beta = 120^0$ а $|\vec{a}| = 2$.

Ответ: $\left(1; -1; \sqrt{2}\right)$ *или* $\left(1; -1; -\sqrt{2}\right)$

2.26 Дана сила $\vec{F} = (4; 4; -4\sqrt{2})$. Найдите величину и направление силы.

Ответ: $\alpha = 60^0; \beta = 60^0; \gamma = 135^0$; $\left|\vec{F}\right| = 8$

2.27 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 10$, а $\left|\bar{b}\right| = 2$, вычислите $(\vec{a} + 2\bar{b})(3\vec{a} + \vec{b})$.

Ответ: 238

2.28 Дано: $|\vec{a}| = 3$, $\left|\bar{b}\right| = 1$, $\varphi = (\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$. Найдите модуль вектора $\bar{c} = 2\vec{a} - 3\bar{b}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$

2.29 Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = -\vec{j} + 2\vec{k}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$

2.30 Найдите косинус угла между векторами $A\bar{B}$ и $A\bar{C}$ если $A(1; -2; 3)$, $B(0; -1; 2)$, $C(3; -4; 5)$.

2.31 В треугольнике *ABC* вершины имеют координаты $A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$. Найдите:

1) длины сторон
2) внутренние углы
3) острый угол между медианой *BD* и стороной *AC*.

Ответ: 1) 3;3; $\sqrt{2}$ *; 2)* $76^0, 76^0, 27^0$ *; 3)* 50^0

2.32 Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\bar{c}$. Найдите $2\vec{a}^2 - \left(\bar{b}, \bar{c}\right)$, если $\bar{a} = (3; -2; 1)$, $\bar{b} = (-5; 1; 0)$ $\bar{c} = (0; 4; 2)$.

2.33 Найдите координаты вектора $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$, если $\bar{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\bar{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

2.34 Найдите координаты вектора $[\bar{a}, (2\bar{a} + \bar{b})]$, если $\bar{a} = (3;-1;-2)$ $\bar{b} = (1;2;-1)$.

Ответ: $(5;1;7)$

2.35 Даны векторы $\bar{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ и $\bar{b} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Найдите координаты вектора $\bar{c} = (\bar{a} - \bar{b}) \times 2\bar{b}$ и его модуль.

Ответ: $(10;10;10)$; $10\sqrt{3}$

2.36 Найдите площадь треугольника с вершинами $A(1;2;0)$ $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

2.37 Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\bar{b} = 5\vec{j} - 7\vec{k}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{195}}{2}$

2.38 Найдите вектор $\bar{x}$, перпендикулярный векторам $\bar{a} = (2;-3;1)$ и $\bar{b} = (1;-2;3)$ и удовлетворяющий условию $\bar{x} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}) = 10$.

Ответ: $(7;5;1)$

2.39 Даны координаты векторов $\bar{a} = (1;-4;0)$, $\bar{b} = (6;3;-2)$, $\bar{c} = (1;-2;2)$. Найдите $Пр_{\bar{a}}[\bar{b}, \bar{c}]$.

Ответ: $\dfrac{58}{\sqrt{17}}$

2.40 Заданы векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ и $\bar{b} = -3\bar{j} - 2\bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$. Найдите:

1) проекцию вектора $\bar{a} - \bar{b}$ на ось ℓ, если углы, образованные векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с осью ℓ равны соответственно $\dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{\pi}{3}$;

2) проекцию вектора $\bar{a} - \bar{b}$ на вектор $\bar{j}$ $Пр_{\bar{j}}(\bar{a} - \bar{b})$

2.41 Найдите вектор $\bar{x}$, коллинеарный вектору $\bar{a} = \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}$, образующий с ортом $\bar{j}$ острый угол и имеющий длину $|\bar{x}| = 15$.

2.42 Найдите вектор $\bar{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\bar{x}| = 2 \cdot \sqrt{3}$

2.43 Найдите вектор $\bar{x}$, образующий с ортом $\bar{k}$ угол 120^0, если $|\bar{x}| = 5 \cdot \sqrt{2}$.

2.44 Докажите, что четыре точки $A(3;5;1)$, $B(2;4;7)$, $C(1;5;3)$, $D(4;4;5)$ лежат в одной плоскости.

2.45 Компланарны ли векторы $\overline{a} = (2;3;1)$, $\overline{b} = (-1;0;-1)$, $\overline{c} = (2;2;2)$?

2.46 Найдите значение λ, при котором векторы $\overline{a} = (1;1;\lambda)$, $\overline{b} = (0;1;0)$, $\overline{c} = (3;0;1)$ будут компланарны.

Ответ: $\frac{1}{3}$

2.47 Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = (1;-2;1)$, $\overline{b} = (3;2;1)$, $\overline{c} = (1;0;-1)$.

Ответ: 12

2.48 Найдите высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = (2;1;-3)$, $\overline{b} = (1;2;1)$, $\overline{c} = (1;-3;1)$, опущенную на грань, построенную на векторах $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

2.49 Найдите объем треугольной пирамиды *ABCD*, если $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$, $D(2;2;2)$.

Ответ: 4

2.50 Дана пирамида с вершинами в точках $A(1;2;3)$, $B(-2;4;1)$, $C(7;6;3)$, $D(4;-3;-1)$. Найдите:

1) длину ребра *AB*
2) площадь грани *ABC*
3) объем пирамиды
4) длину высоты, опущенную на грань *ABC*.

Ответ: 1) $\sqrt{17}$; 2) 14; 3) 30; 4) $\frac{45}{7}$.

3 *Прямая на плоскости и в пространстве. Плоскость*

Способы задания прямой на плоскости

Определение 1. Ненулевой вектор $\overline{n}(A,B)$, перпендикулярный данной прямой, называется нормальным вектором прямой.

Определение 2. Ненулевой вектор $\overline{a}(m,n)$, параллельный данной прямой или принадлежащий ей, называется направляющим вектором прямой.

I. Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором (рисунок 15)

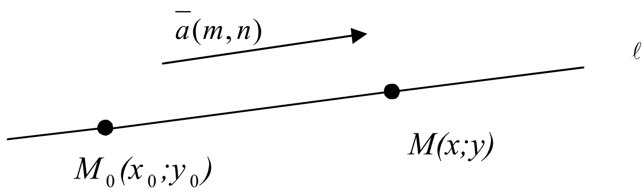


Рисунок 15 – Задание прямой точкой и направляющим вектором

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \tag{3.1}$$

– каноническое уравнение прямой.

II. Уравнение прямой, заданной двумя точками

Пусть даны две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ на плоскости *XOY*. Составим каноническое уравнение прямой ℓ, проходящей через эти точки (рисунок 16).

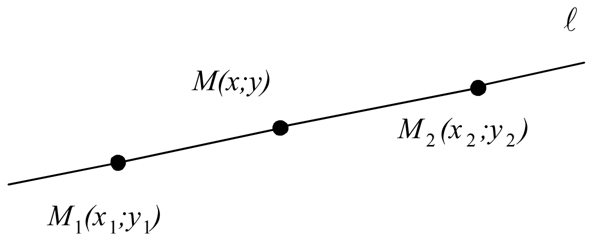


Рисунок 16 – Задание прямой двумя точками

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_1}=\frac{y-y_0}{y_2-y_1} \tag{3.2}$$

– уравнение прямой, проходящей через две данные точки.

III. Уравнение прямой, заданной точкой и нормальным вектором

Пусть заданы точка $M_0(x_0,y_0)\in\ \ell$ и вектор $\vec{n}=A\vec{i}+B\vec{j}$, перпендикулярный рассматриваемой прямой (рисунок 17).

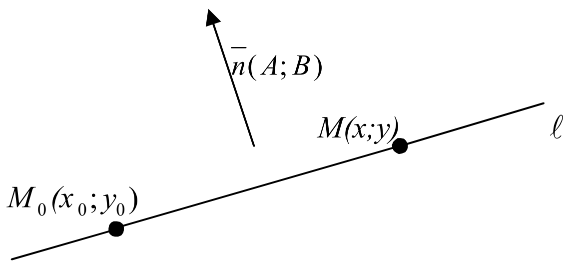


Рисунок 17 – Задание прямой точкой и нормальным вектором

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{3.3}$$

уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору $\overline{n}$.

Раскрыв скобки в уравнении (3.3.) $Ax-Ax_0+By-By_0=0$ и обозначив выражение: $-Ax_0-By_0=C$, получим уравнение вида:

$$Ax+By+C=0 \tag{3.4}$$

называемое общим уравнением прямой.

IV. Уравнение прямой, заданной точкой и угловым коэффициентом

Пусть задана точка $M_0(x_0,y_0)\in\ \ell$ и известен угол, который образует данная прямая с осью *OX* (рисунок 18).

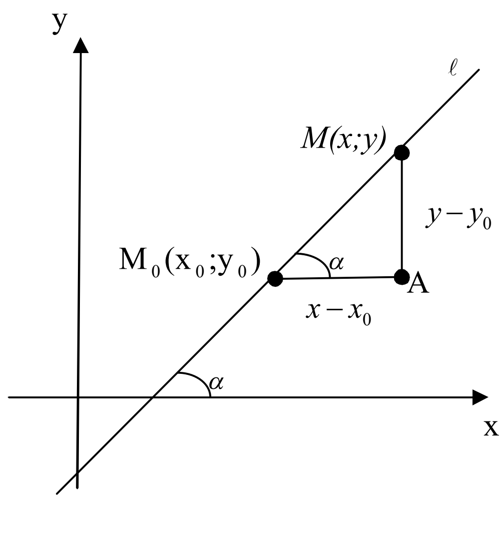


Рисунок 18 – Задание прямой точкой и угловым коэффициентом

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{3.5}$$

уравнение прямой, заданной точкой и угловым коэффициентом.

Взаимное расположение прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые ℓ_1 и ℓ_2, определяемые соответствующими уравнениями:

$$\ell_1 : y = k_1 x + b_1 \text{ и } \ell_2 : y = k_2 x + b_2 .$$

Рассмотрим всевозможные случаи расположения этих прямых.

1) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке M

Пусть прямая ℓ_1 образует с осью OX угол α_1, а прямая ℓ_2 – угол α_2. Тогда $tg\alpha_1 = k_1$, $tg\alpha_2 = k_2$.

Очевидно, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Таким образом,

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \tag{3.6}$$

формула для вычисления тангенса угла между пересекающимися прямыми.

При этом угол отсчитывается от прямой ℓ_1 к прямой ℓ_2.

2) Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны, то формула (3.6) теряет смысл. Однако в этом случае можно рассмотреть котангенс угла между прямыми:

$$ctg\varphi = ctg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}{tg\alpha_2 - tg\alpha_1} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2} = 0 .$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых выражается формулой:

$$k_1 k_2 = -1$$

или

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \tag{3.7}$$

3) Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны или совпадают, то $\alpha_1 = \alpha_2$, а следовательно $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, то есть $k_1 = k_2$. Верно и обратное утверждение. Таким образом, ***необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых*** является равенство их угловых коэффициентов.

Расстояние от точки до прямой

Пусть на плоскости XOY заданы прямая ℓ с уравнением: $Ax+By+C=0$ и точка $M_0(x_0,y_0)$, не принадлежащая прямой ℓ. Расстояние d от точки M_0 до прямой ℓ определяется по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ -$$

формула для вычисления расстояния от точки до прямой.

3.1 Дана прямая $l:\ 6x+9y=0$. Составьте уравнения:

1) прямой m, параллельной прямой l, проходящей через точку $A(-2;3)$;

2) прямой *p,* перпендикулярной прямой l, проходящей через точку $B(3;-1)$.

3.2 Две точки на плоскости заданы координатами $A(2;4)$, $B(3;1)$. Составьте уравнения 1) прямой *AB;* 2) прямой, проходящей через точку *A* и образующей с осью абсцисс угол равный 30^0.

3.3 Запишите уравнение прямой $y=2x-3$ в отрезках и в общем виде.

3.4 Заданы уравнения прямых $l:\ 6x+9y=0$, $l':\ x-3y+10=0$ и координаты точки $A(4;6)$. Составьте уравнения прямых, проходящих:

1) через точку *A* параллельно прямой l
2) через точку *A* перпендикулярно прямой l

Найдите угол между прямыми l и l' и расстояние от точки *A* до прямой l.

3.5 Даны координаты вершин треугольника *ABC* $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$

Составьте уравнения:

1) стороны *AB*,
2) высоты *AD*,
3) медианы *BK*,

Найдите точку пересечения высоты *AD* и медианы *BK.*

3.6 В треугольнике *ABC* с вершинами $A(3;-2)$, $B(-1;1)$, $C(5;-7)$ составьте уравнение биссектрисы внутреннего угла *B*.

3.7 Заданы уравнения сторон треугольника *ABC* . Сторона *AB* имеет уравнение $x+y-6=0$, сторона *BC:* $3x-5y+14=0$, сторона *AC:* $5x-3y-14=0$. Составьте уравнение высоты *BK* и медианы *AD*.

Плоскость

Плоскость – поверхность первого порядка.

Рассмотрим в пространстве плоскость α .

I. Уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором

Положение плоскости в пространстве R_3 определяется точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащей в плоскости α и вектором $\overline{n}(A,B,C)$, перпендикулярным этой плоскости.

Определение 3. Ненулевой вектор $\overline{n}(A,B,C)$, перпендикулярный плоскости α, называется нормальным вектором плоскости.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (3.8)$$

уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 перпендикулярно вектору $\overline{n}$.

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3.9)$$

общее уравнение плоскости.

II. Уравнение плоскости, заданной тремя точками

Пусть в пространстве R_3 заданы три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой. Через них можно провести единственную плоскость

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.10)$$

уравнение плоскости, проходящей через три точки.

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (3.11)$$

уравнение плоскости в «отрезках», где величины a,b,c есть величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат.

III. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя направляющими векторами

Пусть в пространстве R_3 заданы точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащая плоскости α и два направляющих вектора плоскости $\overline{a}(m_1;n_1;p_1)$ и $\overline{g}(m_2;n_2;p_2)$.

Определение 4. Ненулевой вектор, лежащий в плоскости α или параллельный ей, называется направляющим вектором плоскости.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (3.12)$$

уравнение плоскости, проходящей через точку и два направляющих вектора.

Важным требованием в этом способе задания плоскости является условие неколлинеарности векторов $\overline{a}(m_1;n_1;p_1)$ и $\overline{g}(m_2;n_2;p_2)$.

Взаимное расположение плоскостей

Пусть заданы две плоскости:

$$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } \alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

1) Пусть плоскости α_1 и α_2 пересекаются ($\alpha_1 \cap \alpha_2$).Угол между плоскостями определяется как угол между нормальными векторами этих плоскостей: $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$.

$$\cos\varphi = \cos(\alpha_1 {}^\wedge \alpha_2) = \left|\cos(\overline{n_1} {}^\wedge \overline{n_2})\right| = \frac{|\ \overline{n}_1, \overline{n}_2\ |}{|n_1| \cdot |n_2|}.$$

В координатной форме:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{3.13}$$

формула вычисления угла между плоскостями.

2) Если плоскости α_1 и α_2 перпендикулярны ($\alpha_1 \perp \alpha_2$), то перпендикулярны и их нормальные векторы: $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$. А это означает, что их скалярное произведение равно нулю:. В координатной форме:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \tag{3.14}$$

условие перпендикулярности плоскостей.

3) Если плоскости α_1 и α_2 параллельны ($\alpha_1 \parallel \alpha_2$), то их нормальные векторы $\overline{n}_1, \overline{n}_2$ – коллинеарны. Следовательно, их соответствующие координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{3.15}$$

условие параллельности плоскостей.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{3.16}$$

расстояние от точки до плоскости.

3.8 Запишите уравнение плоскости α , заданное в общем виде $4x - 3y + 2z - 12 = 0$ в виде уравнения в отрезках и постройте данную плоскость в прямоугольной декартовой системе координат.

Ответ: $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{6} = 1$

3.9 Заданы координаты точек $A(3;7;0)$, $B(-3;1;2)$, $C(0;0;2)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через эти точки:

1) в отрезках 2) в общем виде.

Ответ: 1) $\frac{x}{24}+\frac{y}{8}+\frac{z}{2}=1$ *2)* $x+3y+12z-24=0$

3.10 Заданы координаты точки $A(3;0;-2)$ и вектора $\overline{n}=(4;-1;0)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку А перпендикулярно вектору $\overline{n}$

Ответ: $4x-y-12=0$

3.11 Заданы координаты точки $A(5;-1;0)$ и векторов $\overline{a}=(2;1;-5)$, $\overline{b}=(-1;0;3)$. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Ответ: $3x-y+z-16=0$

3.12 Найдите угол между плоскостями α: $5x-7y+z-1=0$ и β: $x-5y+2z=0$.

Ответ: $\varphi=\arccos\frac{7\sqrt{10}}{25}\approx 28^0$

3.13 Найдите расстояние от точки $M_1(0;2;-1)$ до плоскости α: $2x-y+3z-5=0$.

Ответ: $d=2\sqrt{5}$

Способы задания прямой в пространстве

I. Канонические уравнения прямой

Рассмотрим произвольную прямую ℓ. Её положение однозначно определяется заданием какой-либо точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащей на прямой, и ненулевого вектора $\overline{a}(m,n,p)$, параллельного прямой ℓ или лежащего на ней (направляющего).

Выберем на прямой ℓ произвольную (текущую) точку $M(x,y,z)$.

Найдём координаты вектора $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$. Вектор $\overline{M_0M}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$, согласно признаку коллинеарности в векторной форме $\overline{M_0M}=t\overline{a}$, где $t\in R$. Тогда по признаку коллинеарности векторов в координатной форме, их соответствующие координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (3.17)$$

канонические уравнения прямой.

Уравнение (3.17) является равносильным системе 2-х уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{p} \\ \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} \end{cases}.$$

II. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Составим канонические уравнения прямой ℓ, проходящей через эти точки.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{3.18}$$

уравнение прямой, проходящей через две точки.

III. Общие уравнения прямой

Любую прямую можно представить как линию пересечения двух плоскостей. Система уравнений первой степени определяет прямую как линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Если векторы $\overline{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\overline{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ неколлинеарны, уравнения (3.19) называются *общими уравнениями прямой* ℓ.

IV. Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}, \ t \in R \tag{3.20}$$

параметрические уравнения прямой ℓ.

С изменением параметра t изменяются координаты точки $M(x, y, z)$ и точка перемещается по прямой ℓ.

Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть в пространстве заданы две прямые с уравнениями:

$$\ell_1 : \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \ell_2 : \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Рассмотрим всевозможные случаи расположения этих прямых.

1) Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке M. Найдем угол между прямыми $(\ell_1 \hat{} \ell_2) = \varphi$.

За угол между прямыми принимают один из смежных углов, которые эти прямые образуют. Причем один из этих углов равен углу между направляющими векторами, то есть $(\ell_1 {}^\wedge \ell_2) = (\overline{a} {}^\wedge \overline{g}) = \varphi$. Тогда: $\cos\varphi = \dfrac{(\overline{a}, \overline{g})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{g}|}$ или в координатной форме

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \tag{3.21}$$

формула для вычисления косинуса угла между прямыми.

2) Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 перпендикулярны, то их направляющие векторы ортогональны, то есть $\overline{a} \perp \overline{g}$. Это означает, что их скалярное произведение равно нулю, то есть $(\overline{a}, \overline{g}) = 0$. В координатной форме это можно записать в виде:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \tag{3.22}$$

условие перпендикулярности двух прямых.

3) Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны, то есть $\overline{a} \parallel \overline{g}$. По признаку коллинеарности векторов в координатной форме соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{3.23}$$

условие параллельности двух прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим вопрос о взаимном расположении прямой и плоскости в пространстве. Пусть заданы плоскость $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая ℓ:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

1) Пусть прямая ℓ пересекает плоскость α в точке *M*. Найдём острый угол между прямой ℓ и плоскостью α.

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\gamma = \frac{(\overline{n}, \overline{a})}{|\overline{n}||\overline{a}|}$$

$$\sin\alpha = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \tag{3.24}$$

формула вычисления угла α между прямой ℓ и плоскостью α.

2) Пусть плоскость α и прямая ℓ параллельны. Тогда направляющий вектор $\overline{a}(m;n;p)$ прямой ℓ и нормальный вектор $\overline{n}(A;B;C)$ плоскости α перпендикулярны, то есть $\overline{n} \perp \overline{a}$. А условием перпендикулярности векторов является равенство нулю их скалярного произведения, то есть $(\overline{n},\overline{a})=0$. Запишем в координатной форме скалярное произведение векторов:

$$Am+Bn+Cp=0 \tag{3.25}$$

условие параллельности прямой и плоскости.

3) Пусть прямая ℓ перпендикулярна плоскости α. В этом случае направляющий вектор $\overline{a}(m;n;p)$ прямой ℓ и нормальный вектор $\overline{n}(A;B;C)$ плоскости α коллинеарны. Условием коллинеарности двух векторов является пропорциональность их соответствующих координат:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \tag{3.26}$$

условие перпендикулярности прямой и плоскости.

Вычисление расстояния от точки до прямой в пространстве

Пусть задана прямая в пространстве параметрическими уравнениями: $l:\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$, $t \in R$ и точка $M(x_1;y_1;z_1)$, не принадлежащая прямой (рисунок 19).

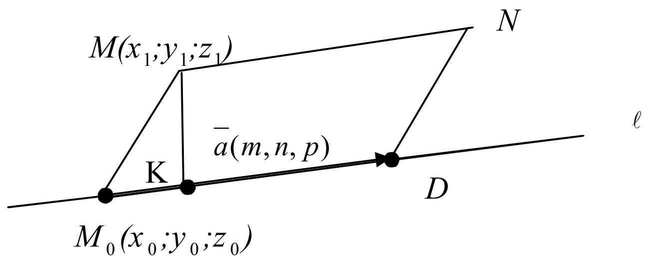


Рисунок 19 – Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой есть длина перпендикуляра: *MK*.

Построим параллелограмм M_0MND на векторах: $\overrightarrow{M_0D}=\vec{a}$ и $\overline{M_0M}$, *MK* – высота параллелограмма.

$$d_{M,l} = MK = h_{M_0MND} = \frac{S_{пар-ма}}{|M_0D|} = \frac{\left|\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}\right|}{|\vec{a}|} \tag{3.27}$$

При расчетах были использованы формулы отыскания площади параллелограмма $S = M_0D \cdot h$ и геометрический смысл векторного произведения векторов.

Вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми

Пусть даны две прямые в пространстве, заданные параметрическими уравнениями:

l: $\begin{cases} x = x_1 + tm_1 \\ y = y_1 + tn_1 \\ z = z_1 + tp_1 \end{cases}$, b: $\begin{cases} x = x_2 + tm_2 \\ y = y_2 + tn_2 \\ z = z_2 + tp_2 \end{cases}$, при этом l и b скрещивающиеся прямые.

Под расстоянием между скрещивающимися прямыми принимается длина общего перпендикуляра этих прямых. Его длина будет равна расстоянию между параллельными плоскостями, каждая из которых проходит через одну из данных прямых и параллельна другой, то есть длина искомого расстояния будет равна высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AD} = \overline{a_l}$, $\overline{BK} = \overline{a_b}$, $\overline{AB}$, где $\overline{a_l}$ – направляющий вектор прямой l, $\overline{a_b}$ – направляющий вектор прямой b, а точки A и B – точки, принадлежащие соответственно прямым l и b (рисунок 20).

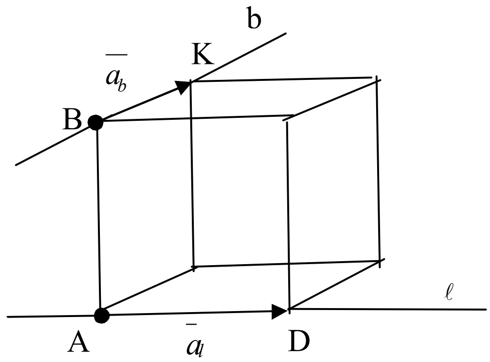


Рисунок 20 – Расстояние между скрещивающимися прямыми

Согласно заданию прямых, $\overline{a_l}(m_1; n_1; p_1)$, $\overline{a_b}(m_2; n_2; p_2)$, $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Тогда расстояние между прямыми l и b есть высота параллелепипеда:

$$d_{l,b} = h_{пар-да} = \frac{V_{пар-да}}{S_{осн}} = \frac{\left|\overline{a_l} \cdot \overline{a_b} \cdot \overline{AB}\right|}{\left|\overline{a_l} \times \overline{a_b}\right|} \tag{3.28}$$

При записи формулы, позволяющей отыскивать расстояние между скрещивающимися прямыми, были использованы формула объёма параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot h$ и геометрический смысл векторного и смешанного произведений векторов.

3.14 Заданы координаты точек $M_1(3;7;0)$ и $M_2(-1;3;2)$ и вектора $\overline{a} = (0;3;-2)$. Составьте:

1) канонические уравнения прямой l, проходящей через точку M_1, параллельно вектору $\overline{a}$,

2) параметрические уравнения прямой l,

3) общие уравнения прямой M_1M_2.

Ответ: 1) $\frac{x-3}{0}=\frac{y-7}{3}=\frac{z}{-2}$; *2)* $\begin{cases} x=3 \\ y=3t+7 \\ z=-2t \end{cases}$; *3)* $\begin{cases} x-y+4=0 \\ y+2z-7=0 \end{cases}$

3.15 Заданы координаты вершин треугольника $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$, $C(4;-7;-2)$. Составьте уравнения:

1) стороны AB

2) прямой, содержащей медиану треугольника, проведенную из вершины A.

3.16 Заданы координаты точки $M\,(3;3;0)$ уравнения прямой l: $\frac{x+5}{4}=\frac{y-6}{1}=\frac{z}{-3}$ и плоскости α: $2x-4y-4z+1=0$. Составьте:

1) уравнение прямой, проходящей через точку M, перпендикулярно заданной плоскости α;

2) уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой l;

3) уравнение плоскости, проходящей через прямую l и не принадлежащую ей точку M.

4 Алгебраические кривые и поверхности второго порядка

Определение 1. Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением II степени относительно текущих координат. В общем случае это уравнение имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Рассмотрим три кривые второго порядка: эллипс, гиперболу и параболу.

Эллипс

Определение 2. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух данных фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная *2a* (эта постоянная величина должна быть больше, чем расстояние между фокусами).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.1}$$

каноническое уравнение эллипса.

Эллипс имеет две взаимно-перпендикулярные оси симметрии, совпадающие с осями координат. Точка пересечения осей *O (0;0)* будет центром симметрии эллипса. Ось, на которой расположены фокусы, называется фокальной осью эллипса (рисунок 21).

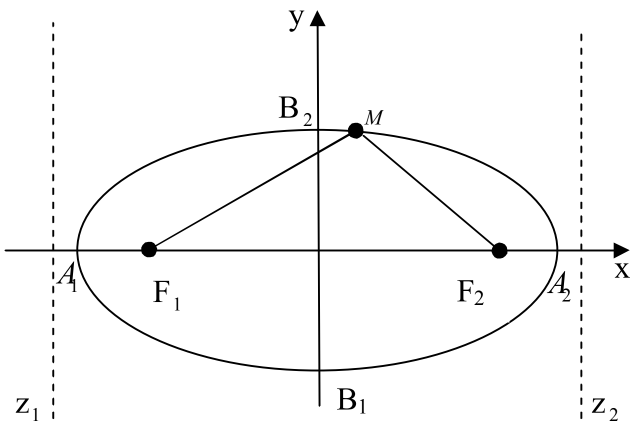


Рисунок 21 – Графическое изображение эллипса ($a > b$))

Определение 3. Отношение фокусного расстояния $F_1F_2 = 2c$ к длине большей оси эллипса $A_1A_2 = 2a$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается: $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a}$ или $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

Определение 4. Прямые $z_1:\ x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $z_2:\ x=\dfrac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные оси симметрии, соответствующей большой оси, называются директрисами эллипса.

Замечание: Рассмотрим каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, для которого $b>a$. В этом случае большей осью эллипса является отрезок B_1B_2, длина большей оси составляет $B_1B_2=2b$. Меньшей осью является ось A_1A_2, и её длина $A_1A_2=2a$. Координаты вершин имеют вид: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$. Фокусы эллипса лежат на большей оси, следовательно, имеют координаты $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$, где $c^2=b^2-a^2$ или $c=\sqrt{b^2-a^2}$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\dfrac{2c}{2b}$, уравнения директрис имеют вид: $z_1:\ y=-\dfrac{b}{\varepsilon}$ и $z_2:\ y=\dfrac{b}{\varepsilon}$ (рисунок 22).

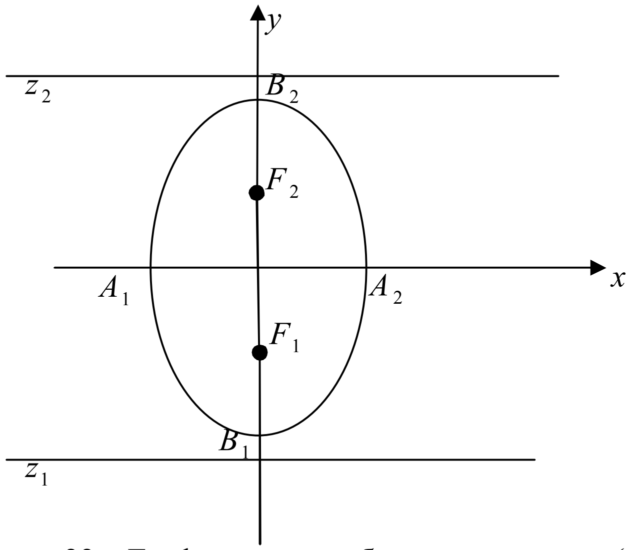


Рисунок 22 – Графическое изображение эллипса ($b>a$)

Отметим ***замечательные свойства эллипса***.

1. *Директориальное свойство*: для любой точки *M*, лежащей на эллипсе, справедливо равенство: $\dfrac{|F_1M|}{\rho(M,z_1)}=\dfrac{|F_2M|}{\rho(M,z_2)}=\varepsilon$,

где $\rho(M,z_1)$ – расстояние от точки *M* до директрисы z_1, соответствующей фокусу F_1; $\rho(M,z_2)$ – расстояние от точки *M* до директрисы z_2, соответствующей фокусу F_2.

2. *Оптическое свойство*: если изготовить «зеркальную» нить в форме эллипса и в один из фокусов поместить источник света, то луч, падающий на зеркальную нить, отразившись, пройдет через другой фокус.

Теорема: Расстояние от произвольной точки *M(x;y),* лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов является линейной функцией от её абсциссы *x*:

$$r_1=F_1M=a-\varepsilon x,$$

$$r_2=F_2M=a+\varepsilon x.$$

Гипербола

Определение 5. Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равна *2a*, и меньшая расстояния между фокусами.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4.2}$$

каноническое уравнение гиперболы.

Гипербола имеет две оси симметрии: *OX, OY*. Точка *O(0;0)* – центр симметрии гиперболы. Гипербола имеет две точки пересечения с осью *OX* – вершины: $A_1(-a;0)$ и $A_2(a;0)$, с осью *OY* гипербола точек пересечения не имеет.

Отрезок A_1A_2 называется действительной осью гиперболы и имеет длину, равную *2a*. Отрезок B_1B_2 называется мнимой осью гиперболы и его длина равна *2b*, где $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$.

Точки, лежащие на продолжении действительной оси, $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, где $c^2 = a^2 + b^2$, называются фокусами гиперболы. При этом $\left|\overline{F_1F_2}\right| = 2c$ – называется фокальной осью гиперболы.

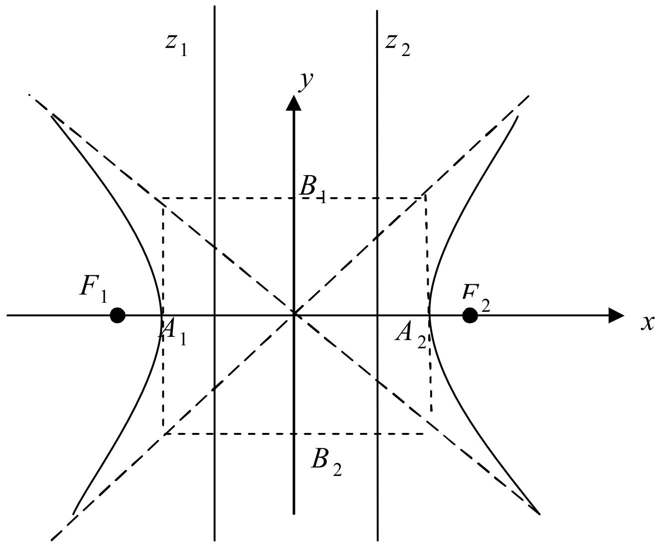


Рисунок 23 – Графическое изображение гиперболы

Определение 6. Эксцентриситетом гиперболы называется отношение фокусного расстояния к длине действительной оси гиперболы и обозначается: $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a}$ или $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$. Так как $2c > 2a \Rightarrow \varepsilon > 1$.

Эксцентриситет характеризует форму гиперболы.

Определение 7. Прямые $z_1: \ x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ и $z_2: \ x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные действительной оси гиперболы, называются директрисами гиперболы.

Гипербола имеет две асимптоты.

Определение 8. Асимптота – это прямая, расстояние между точками которой и точками графика стремится к нулю при $x \to \infty$.

Прямые $y = \dfrac{b}{a}x$ и $y = -\dfrac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Замечание. Рассмотрим каноническое уравнение вида:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{4.3}$$

Данное уравнение также определяет гиперболу, которая называется сопряженной к гиперболе с уравнением (4.2). Для данной гиперболы действительной осью является отрезок $B_1B_2 = 2b$, а отрезок $A_1A_2 = 2a$ является мнимой осью кривой. Фокусы гиперболы лежат на действительной оси, следовательно, имеют координаты $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$, где $c^2 = a^2 + b^2$ или $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \dfrac{2c}{2b}$, уравнения директрис имеют вид: $z_1: \ y = -\dfrac{b}{\varepsilon}$ и $z_2: \ y = \dfrac{b}{\varepsilon}$. Асимптоты гиперболы имеют те же уравнения, что и сопряженная. Изображение гиперболы с уравнением (4.3) на рисунке 24.

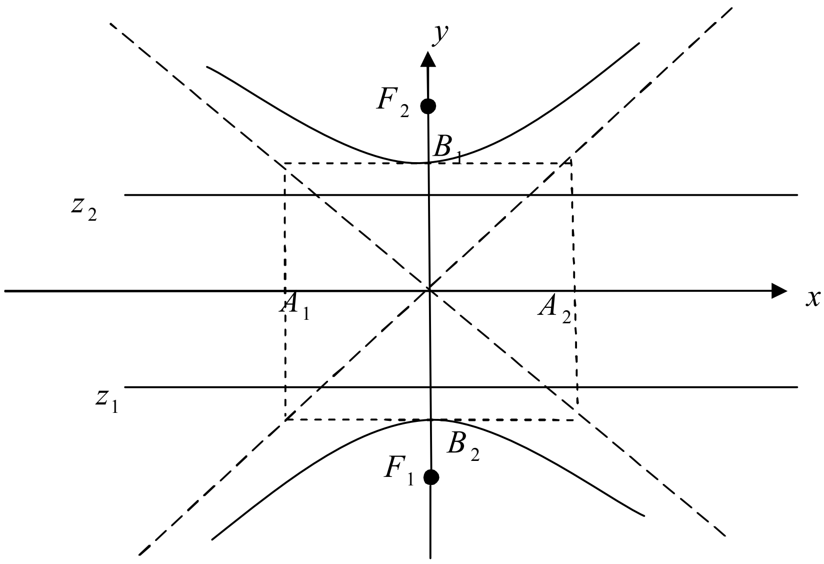


Рисунок 24 – Графическое изображение гиперболы

Сформулируем ***замечательные свойства гиперболы*:**

1. *Директориальное свойство*: для любой точки *M*, лежащей на гиперболе справедливо равенство: $\frac{|F_1M|}{\rho(M, z_1)} = \frac{|F_2M|}{\rho(M, z_2)} = \varepsilon$. Это свойство аналогично директориальному свойству эллипса, но $\varepsilon > 1$.

2. *Оптическое свойство*: если изготовить зеркальную нить в форме одной из ветвей гиперболы и в фокусе этой ветви поместить источник света, то луч, падающий на зеркальную нить, отразившись, пройдет через другой фокус.

Замечание. При построении гиперболы сначала следует построить прямоугольник со сторонами $x = \pm a$ и $y = \pm b$. Каждая из диагоналей прямоугольника, неограниченно продолженная, является асимптотой гиперболы. Гипербола лежит вне основного прямоугольника.

Теорема: Расстояние от произвольной точки $M\ (x; y)$, лежащей на гиперболе до каждого из фокусов зависит от абсциссы *x* следующим образом: $r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = |a - \varepsilon x|$, $r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = |a + \varepsilon x|$.

Парабола

Определение 9. Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки *F*, называемой фокусом, и данной прямой ℓ, называемой директрисой (предполагается, что *F* не принадлежит прямой ℓ).

$$y^2 = 2px \tag{4.4}$$

каноническое уравнение параболы.

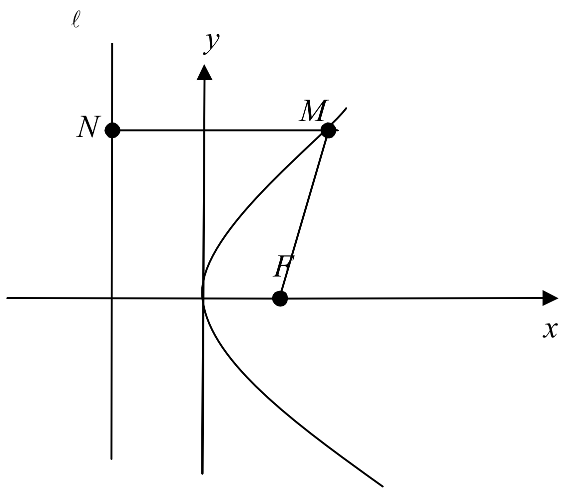


Рисунок 25 – Графическое изображение параболы

Парабола проходит через начало координат и точка *O (0;0)* называется вершиной параболы. $F(\frac{p}{2};0)$ – фокус параболы. Прямая ℓ с уравнением $x=-\frac{p}{2}$, перпендикулярная оси параболы, называется директрисой параболы.

Замечание. Уравнение $x^2 = 2py$ также определяет параболу. Для такой параболы осью является прямая *OY*, уравнение директрисы: $y = -\frac{p}{2}$, фокус имеет координаты $F(0;\frac{p}{2})$ (рисунок 26).

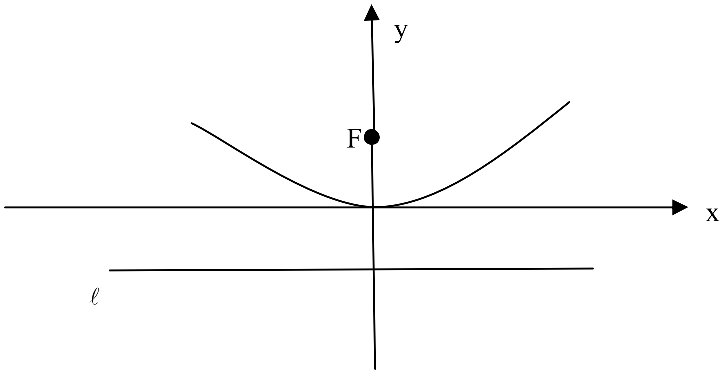


Рисунок 26 – Графическое изображение параболы

Сформулируем ***свойства параболы***:

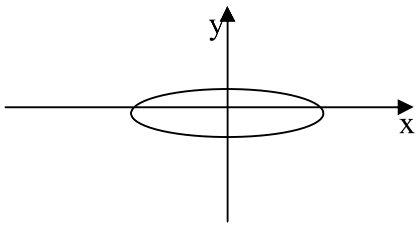
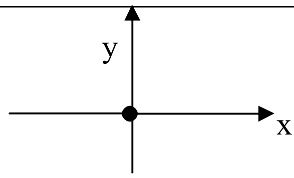
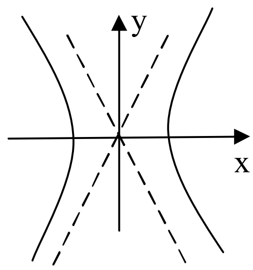
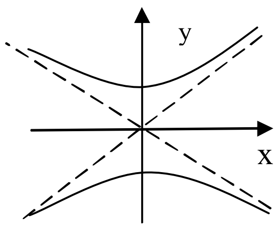
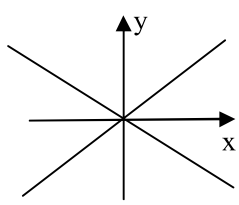
1. *Директориальное свойство*: для любой точки $M(x;y)$ параболы справедливо равенство: $|FM| = \rho(M,Z)$ или $\frac{|FM|}{\rho(M,Z)} = 1$.

Таким образом, эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

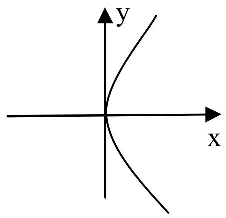
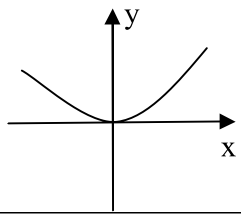
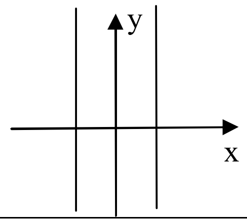
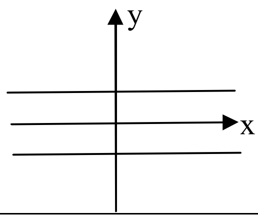
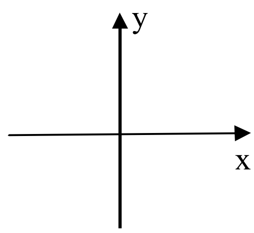
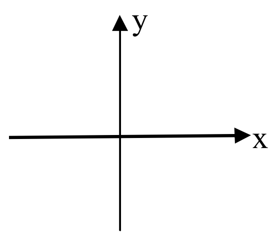
2. *Оптическое свойство*: если изготовить зеркальную нить в форме параболы, в фокусе которой поместить источник света, то луч, отразившись от параболы, пройдет параллельно оси параболы (то есть параболическое зеркало дает параллельный пучок света).

Уравнение $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, где $A^2 + B^2 \neq 0$ можно привести к одному из видов, приведенных в таблице 1.

Таблица 1 – ***Классификация кривых второго порядка***

Номер вида	***Каноническое уравнение кривой***	***Название кривой***	***Схематичное изображение кривой***
1	***2***	***3***	***4***
		Эллиптический тип кривой ($B \cdot A > 0$)	
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллипс	
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	эллипс, вырожденный в точку 0(0,0)	
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мнимый эллипс	на плоскости точек, удовлетворяющих этому уравнению, не существует
		Гиперболический тип кривой ($B \cdot A < 0$)	
4	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гипербола	
5	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	гипербола	
6	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$ или $\left[\begin{array}{l} y=\frac{b}{a}x \\ y=-\frac{b}{a}x \end{array}\right.$	вырожденная гипербола (пара пересекающихся прямых)	

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
Параболический тип кривой ($B \cdot A = 0$)			
7	$y^2 = 2px$	парабола	
8	$x^2 = 2py$	парабола	
9	$x^2 = a^2$ или $\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right.$	вырожденная парабола (пара параллельных прямых)	
10	$y^2 = b^2$ или $\left[\begin{array}{l} y = b \\ y = -b \end{array}\right.$	вырожденная парабола (пара параллельных прямых	
11	$x^2 = -a^2$	вырожденная парабола (пара мнимых параллельных прямых)	на плоскости точек, удовлетворяющих этому уравнению, не существует
12	$y^2 = -b^2$	вырожденная парабола (пара мнимых параллельных прямых)	на плоскости точек, удовлетворяющих этому уравнению, не существует
13	$x^2 = 0$	вырожденная парабола (пара совпадающих параллельных прямых – ось OY)	
14	$y^2 = 0$	вырожденная парабола (пара совпадающих параллельных прямых – ось OX)	

4.1. Постройте кривые второго порядка, заданные уравнениями и определите все её параметры:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 2) $4y^2-25x^2=100$ 3) $y^2=16x$.

4.2 Приведите уравнение кривой $x^2+4y^2-4x+8y+4=0$ к каноническому виду, найдите координаты фокусов и постройте эту кривую.

Ответ: $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$; $F_1\left(-\sqrt{3}+2;-1\right)$; $F_2\left(\sqrt{3}+2;-1\right)$

4.3 Приведите уравнение кривой $2x^2-2y^2+12x+4y+16=0$ к каноническому виду, определите тип кривой и постройте эту кривую.

Ответ: $(x-y+4)(x+y+2)=0$

4.4 Приведите уравнения кривых второго порядка

1). $9x^2+4y^2-18x+8y-23=0$

2). $x^2-y^2-4x-4y-9=0$

3). $x^2-8x+y+15=0$

к каноническому виду, определите тип кривой и постройте эти кривые.

Поверхности второго порядка

Определение 10. Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат можно представить в виде:

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+fxz+eyz+gx+hy+kz+l=0,$$

где $a^2+b^2+c^2+d^2+f^2+e^2\neq 0$

Рассмотрим основные типы алгебраических поверхностей второго порядка.

Поверхность, определяемая уравнением:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – называется **эллипсоидом** (a,b,c – полуоси эллипсоида).

Изображение эллипсоида представлено на рисунке 27.

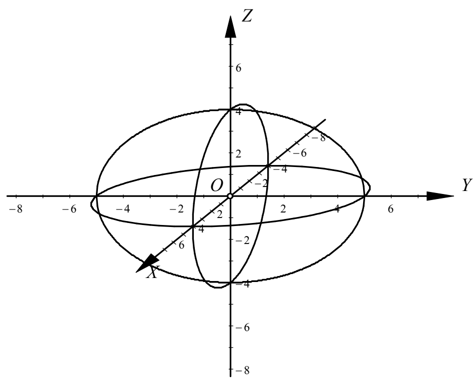


Рисунок 27 – Графическое изображение эллипсоида

Конические поверхности

Определение 11. Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и проходящих через данную точку P, называется конической поверхностью.

При этом линия L называется направляющей конической поверхности, точка P – её вершиной, а каждая из прямых, составляющих коническую поверхность – образующей. Рассмотрим коническую поверхность с вершиной в начале координат, для которой направляющей является эллипс.

Поверхность, определяемая каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ – называется **конусом II порядка**.

Изображение конуса второго порядка представлено на рисунке 28.

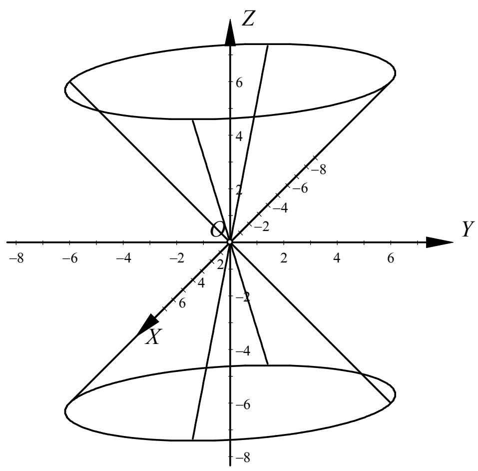


Рисунок 28 – Графическое изображение конуса второго порядка

Гиперболоиды

1. Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, называется ***однополостным гиперболоидом*** (рисунок 29).

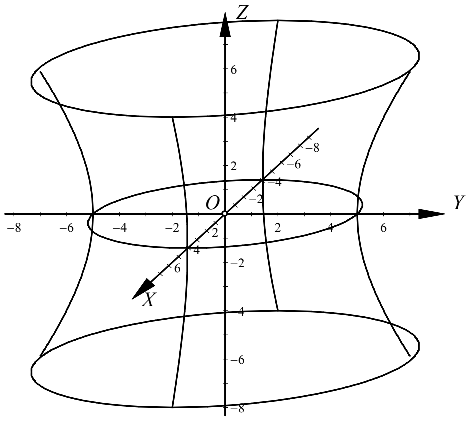


Рисунок 29 – Графическое изображение однополостного гиперболоида

2. Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, называется двуполостным гиперболоидом (рисунок 30).

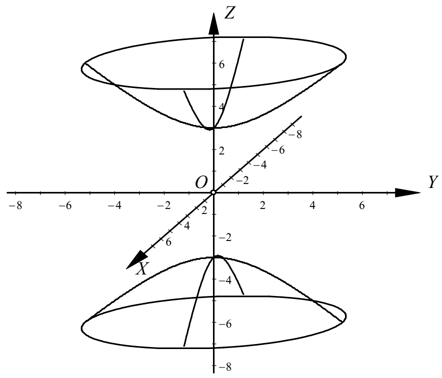


Рисунок 30 – Графическое изображение двуполостного гиперболоида

Параболоиды

1. Эллиптическим параболоидом называется поверхность, определяемая уравнением: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\cdot$

Построение поверхности аналогично построению предыдущих поверхностей (рисунок 31).

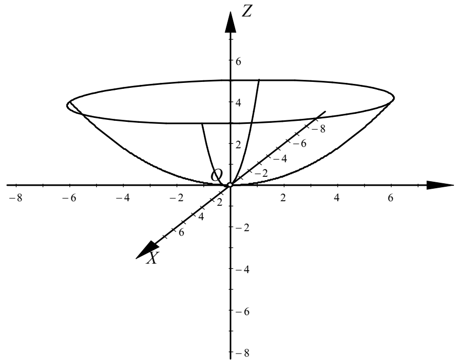


Рисунок 31 Графическое изображение эллиптического параболоида

2. Гиперболическим параболоидом называется поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$, при условии, что p и q имеют одинаковые знаки ($p > 0, q > 0$) (рисунок 32).

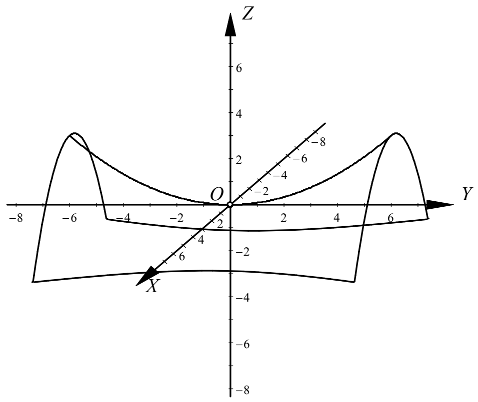


Рисунок 32 – Графическое изображение гиперболического параболоида

Цилиндрические поверхности

Определение 12. Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и параллельных данной прямой ℓ, называется цилиндрической поверхностью.

При этом линия L называется направляющей цилиндрической поверхности, а каждая из прямых, составляющих эту поверхность и параллельных прямой ℓ – называется образующей.

Рассмотрим примеры цилиндрических поверхностей.

1. Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, называется эллиптическим цилиндром (рисунок 33).

2. Поверхность, определяемая уравнением $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, называется гиперболическим цилиндром (рисунок 34).

3. Поверхность, определяемая уравнением $x^2 = 2\rho z$, называется параболическим цилиндром (рисунок 35).

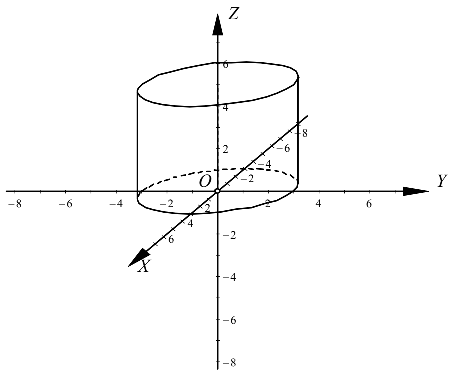


Рисунок 33 – Эллиптический цилиндр

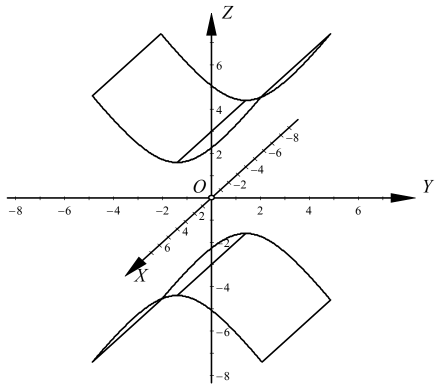


Рисунок 34 – Гиперболический цилиндр

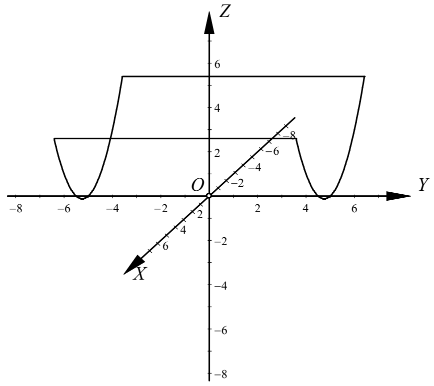


Рисунок 35 – Параболический цилиндр

4.5 Найдите координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$.

Ответ: $O_1\left(\frac{1}{2};-1;0\right)\ R = \frac{1}{2}$

4.6 Приведите уравнения поверхностей второго порядка

1). $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$

2). $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$

3). $y^2 + z^2 + x - 3 = 0$

4). $y^2 + z^2 - 4y - 4z - 1 = 0$

к каноническому виду, определите тип поверхности и постройте эти поверхности.

5 Содержание расчетно-графических работ

Расчетно-графическая работа № 1
Решение систем линейных уравнений

Задание: Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, матричным способом, методом Гаусса:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = -14 \\ -9x_1 + 10x_2 - 7x_3 + 0 = 44 \\ -6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 10x_4 = 39 \\ -6x_1 + 5x_2 - 10x_3 - x_4 = 34 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -7 \\ 4x_1 + x_2 + 0 + 4x_4 = -1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 15 \\ -4x_1 - 4x_2 + 0 - 4x_4 = -8 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -5 \\ 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 14 \\ 2x_1 + 0 + 0 - 7x_4 = -10 \end{cases}$
Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -10 \\ -6x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 29 \\ 6x_1 - 4x_2 - 12x_3 + 3x_4 = -38 \\ 2x_1 - 8x_2 + 13x_3 + 12x_4 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -5 \\ -3x_1 + 0 + 4x_3 - 11x_4 = 24 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 = -2 \\ -2x_1 + 8x_2 - 12x_3 - 7x_4 = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -3 \\ -4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = -4 \\ 4x_1 - 10x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 9 \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 17x_4 = 4 \end{cases}$
Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9
$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = -7 \\ -2x_1 + 0 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 17 \\ -2x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 7x_4 = 6 \\ -6x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = -3 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ -4x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 16 \\ -4x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 18 \\ -2x_1 - 7x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 16 \end{cases}$
Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12
$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ -9x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 4x_4 = -7 \\ 3x_1 + 0 - 8x_3 + 2x_4 = -3 \\ 9x_1 + x_2 - 11x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0 = -10 \\ 2x_1 - 10x_2 + 9x_3 - 8x_4 = -17 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -14 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 8 \\ -3x_1 - 10x_2 + 5x_3 + 4x_4 = -1 \\ -9x_1 - 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = -1 \end{cases}$
Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -8 \\ -2x_1 + 5x_2 + 9x_3 - 6x_4 = -26 \\ 2x_1 - 8x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 31 \end{cases}$	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -10 \\ 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 24 \\ 6x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 8x_4 = 37 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -6 \\ -x_1 - 7x_2 - 10x_3 + 3x_4 = -12 \\ -3x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$

Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
$\begin{cases} -1\,x_1+\;3\,x_2+x_3-2\,x_4=7 \\ -3\,x_1+8\,x_2+x-8\,x_3=29 \\ -\;x_1+4\,x_2+6\,x_3-3\,x_4=2 \\ 3\,x_1-8\,x_2+2\,x_3+2\,x_4=-17 \end{cases}$	$\begin{cases} 3\,x_1+x_2+2\,x_3+x_4=2 \\ -9\,x_1-5\,x_2-8\,x_3-4\,x_4=-4 \\ -6\,x_1+4\,x_2+4\,x_3+3\,x_4=-1 \\ -9\,x_1-x_2-6\,x_3-x_4=-12 \end{cases}$	$\begin{cases} -2\,x_1-3\,x_2+x_3-x_4=-1 \\ -6\,x_1-7\,x_2+5\,x_3-6\,x_4=-2 \\ -4\,x_1-2\,x_2+7\,x_3-10\,x_4=-1 \\ 4\,x_1+10\,x_2+3\,x_3-8\,x_4=1 \end{cases}$
Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21
$\begin{cases} 3\,x_1-\;3\,x_2+3\,x_3-x_4=7 \\ -9\,x_1+10\,x_2-7\,x_3+0=-24 \\ -6\,x_1+\;9\,x_2-2\,x_3-10\,x_4=-1 \\ -6\,x_1+\;5\,x_2-10\,x_3-x_4=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2\,x_1-\;x_2+\;x_3+x_4=-1 \\ 4\,x_1+\;x_2+0+4\,x_4=-5 \\ 4\,x_1+4\,x_2-4\,x_3+7\,x_4=-1 \\ -4\,x_1-4\,x_2+0-4\,x_4=8 \end{cases}$	$\begin{cases} -2\,x_1+2\,x_2-x_3+x_4=-7 \\ 4\,x_1-5\,x_2+4\,x_3-x_4=21 \\ 2\,x_1-4\,x_2+2\,x_3+2\,x_4=20 \\ 2\,x_1+\;0+\;0-7\,x_4=-12 \end{cases}$
Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24
$\begin{cases} 2\,x_1-2\,x_2-2\,x_3+2\,x_4=-6 \\ -6\,x_1+8\,x_2+3\,x_3-8\,x_4=21 \\ 6\,x_1-4\,x_2-12\,x_3+3\,x_4=-16 \\ 2\,x_1-8\,x_2+13\,x_3+12\,x_4=-1 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1-\;x_2-2\,x_3+3\,x_4=-20 \\ -3\,x_1+0+4\,x_3-11\,x_4=51 \\ 2\,x_1+4\,x_2+2\,x_3+8\,x_4=-1 \\ -2\,x_1+8\,x_2+12\,x_3-7x_4=85 \end{cases}$	$\begin{cases} -2\,x_1+3\,x_2-2\,x_3-2\,x_4=1 \\ -4\,x_1+4\,x_2-3\,x_3-6\,x_4=6 \\ 4\,x_1-10\,x_2+4\,x_3-3\,x_4=16 \\ -2\,x_1-3\,x_2-3\,x_3-17\,x_4=39 \end{cases}$
Вариант 25	Вариант 26	Вариант 27
$\begin{cases} -x_1-\;\;x_2+2\,x_3+2\,x_4=0 \\ 2\,x_1+x_2-2\,x_3-6\,x_4=9 \\ -2\,x_1+0+2\,x_3+5\,x_4=-8 \\ x_1-2\,x_2+2\,x_3-7\,x_4=21 \end{cases}$	$\begin{cases} 2\,x_1+\;x_2-x_3-3\,x_4=-16 \\ 2\,x_1-\;x_2-4\,x_3-2\,x_4=-13 \\ -2\,x_1-7\,x_2-6\,x_3+7\,x_4=32 \\ -6\,x_1+3\,x_2+6\,x_3+6\,x_4=27 \end{cases}$	$\begin{cases} -2\,x_1-\;x_2-x_3+2\;x_4=8 \\ -4\,x_1-5\,x_2-4\,x_3+5\,x_4=28 \\ -4\,x_1-5\,x_2-5\,x_3+7\,x_4=37 \\ -2\,x_1-7\,x_2-7\,x_3+7\,x_4=47 \end{cases}$
Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30
$\begin{cases} 3\,x_1+\;x_2-3\,x_3+2\,x_4=3 \\ -9\,x_1-2\,x_2+12\,x_3-4\,x_4=-6 \\ 3\,x_1+\;0-\;8\,x_3+2\,x_4=6 \\ 9\,x_1+\;x_2-11\,x_3-x_4=-7 \end{cases}$	$\begin{cases} -x_1+2\,x_2-2\,x_3+x_4=2 \\ 2\,x_1-\;x_2+3\,x_3+0=-1 \\ 2\,x_1-10\,x_2+9\,x_3-8\,x_4=-6 \\ 2\,x_1-10\,x_2+3\,x_3-5\,x_4=-15 \end{cases}$	$\begin{cases} 3\,x_1+\;x_2-x_3-2\,x_4=-2 \\ 6\,x_1+5\,x_2-4\,x_3-5\,x_4=2 \\ -3\,x_1-10\,x_2+5\,x_3+4\,x_4=-1 \\ -9\,x_1-9\,x_2+9\,x_3+10\,x_4=-8 \end{cases}$

Расчетно-графическая работа № 2
Исследование кривых второго порядка

Задание: Приведите к каноническому виду уравнение кривой $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, найдите для неё все характеристики и выполните построение кривой.

Вариант 1

A	B	C	D	E
0	-10	90	40	140
25	100	150	600	3625
81	100	-1458	1200	2061
81	-36	1134	288	6309

Вариант 2

A	B	C	D	E
81	-81	-1458	-972	10206
16	4	-320	-56	1732
0	-4	-4	0	-8
4	1	56	-2	201

Вариант 3

A	B	C	D	E
1	-9	-20	-18	100
1	0	-4	-3	13
64	25	1024	-250	3121
0	-1	0	-8	33

Вариант 4

A	B	C	D	E
81	81	-486	-1458	729
0	2	0	-16	0
9	-1	-18	6	9
9	0	-90	63	540

Вариант 5

A	B	C	D	E
9	9	-18	54	9
25	-16	100	224	-284
-5	0	-10	-15	-50
64	9	1280	-54	6481

Вариант 6

A	B	C	D	E
-16	-25	-64	-350	-1561
0	-8	0	112	-104
25	36	-100	-216	-476
-2	0	20	18	-104

Вариант 7

A	B	C	D	E
0	-10	100	-60	-290
64	-36	-256	-504	-3812
81	49	-486	588	-1476
-2	0	-20	0	78

Вариант 8

A	B	C	D	E
9	1	-54	20	172
25	-9	450	-144	1674
10	0	-60	20	150
16	-64	-128	1024	-3840

Вариант 9

A	B	C	D	E
-5	0	-40	-50	270
36	25	72	250	1561
16	-49	160	-588	-580
36	49	144	882	2349

Вариант 10

A	B	C	D	E
64	-4	-128	-56	-132
81	1	-1134	10	3913
25	-49	-100	-980	-3575
0	-9	18	18	45

Вариант 11

A	B	C	D	E
0	-9	81	-126	45
9	4	-180	-24	972
1	25	6	-500	2484
100	-100	600	200	-9200

Вариант 12

A	B	C	D	E
49	-25	-490	-150	-225
16	9	160	18	265
0	2	0	-16	0
36	49	144	882	2349

Вариант 13

A	B	C	D	E
64	49	512	490	-887
1	-16	6	160	-407
0	-8	-40	144	-1008
49	-9	294	126	0

Вариант 14

A	B	C	D	E
49	-81	-784	-648	-2129
100	49	200	490	1325
9	9	-144	162	1224
0	-7	-56	84	-812

Вариант 15

A	B	C	D	E
64	-9	1024	0	4096
81	4	-1134	64	3901
100	-9	400	126	-941
4	0	48	-28	4

Вариант 16

A	B	C	D	E
-5	0	90	0	-385
0	-8	32	16	-136
1	-25	4	0	-21
100	9	2000	36	9136

Вариант 17

A	B	C	D	E
25	-4	400	8	1496
64	-1	128	2	63
4	4	-64	-24	276
0	-2	8	-24	-24

Вариант 18

A	B	C	D	E
0	-1	0	14	-33
1	-64	0	896	-3072
49	25	-882	400	4344
1	0	0	-5	25

Вариант 19

A	B	C	D	E
9	0	108	-54	108
9	0	0	0	-36
100	81	1800	810	2025
4	-100	-16	-600	-1284

Вариант 20

A	B	C	D	E
25	-16	450	0	1625
-8	0	0	24	24
49	-4	980	-16	4884
4	49	56	-686	2401

Вариант 21

A	B	C	D	E
9	4	-180	-24	972
81	-36	1134	288	6309
0	-10	90	40	140
1	25	6	-500	2484

Вариант 22

A	B	C	D	E
16	4	-320	-56	1732
0	-4	-4	0	-8
16	-64	-128	1024	-3840
81	100	-1458	1200	2061

Вариант 23

A	B	C	D	E
64	25	1024	-250	3121
1	-16	6	160	-407
1	0	-4	-3	13
49	-9	294	126	0

Вариант 24

A	B	C	D	E
9	9	-144	162	1224
9	-1	-18	6	9
0	-7	-56	84	-812
81	81	-486	1458	729

Вариант 25

A	B	C	D	E
64	9	1280	-54	6481
100	-9	400	126	-941
-5	0	-10	-15	-50
81	4	-1134	64	3901

Вариант 26

A	B	C	D	E
25	36	-100	-216	-476
1	-25	4	0	-21
0	-8	32	16	-136
-16	-25	-64	-350	-1561

Вариант 27

A	B	C	D	E
81	49	-486	588	-1476
64	-36	-256	-504	-3812
0	-2	8	-24	-24
4	4	-64	-24	276

Вариант 28

A	B	C	D	E
49	25	-882	400	4344
25	-9	450	-144	1674
10	0	-60	20	150
1	-64	0	896	-3072

Вариант 29

A	B	C	D	E
36	25	72	250	1561
16	-49	160	-588	-580
9	0	108	-54	108
4	-100	-16	-600	-1284

Вариант 30

A	B	C	D	E
81	1	-1134	10	3913
25	-49	-100	-980	-3575
-8	0	0	24	24
4	49	56	-686	2401

Расчетно-графическая работа № 3
Построение алгебраических поверхностей II порядка

Задание: Определите тип поверхности и постройте её:

Вариант 1 1. $z=2y^2$ 2. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{16}$ 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$	Вариант 15 1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 2. $y=\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{25}$ 3. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{9}=1$
Вариант 2 1. $y=2z^2$ 2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=0$ 3. $y=\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}$	Вариант 16 1. $\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{36}=1$ 2. $x=\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{36}$ 3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{36}=1$
Вариант 3 1. $x=2y^2$ 2. $-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ 3. $z=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}$	Вариант 17 1. $y^2=2z$ 2 $x=y^2+z^2$ 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$
Вариант 4 1. $y=4z^2$ 2. $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ 3. $z=\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}$	Вариант 18 1. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=z$ 2. $z=2y^2$ 3. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$
Вариант 5 1. $x=4y^2$ 2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$ 3. $y=\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{25}$	Вариант 19 1. $y=\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{16}$ 2. $z^2=4y$ 3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{25}=1$
Вариант 6 1. $x=4y^2$ 2. $y=\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{9}$ 3. $\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$	Вариант 20 1. $z=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}$ 2. $y^2=2z$ 3. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$

Вариант 7	Вариант 21
1. $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{36}=1$ 3. $x=\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}$	1. $y^2=4z$ 2. $x=\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}$ 3. $-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{36}=1$
Вариант 8	Вариант 22
1. $x^2=4z$ 2. $z=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}$ 3. $\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$	1. $z=4y^2$ 2. $\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 3. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$
Вариант 9	Вариант 23
1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 2. $x^2=4z$ 3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{36}=1$	1. $z=4y^2$ 2. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ 3. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{36}=1$
Вариант 10	Вариант 24
1. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{25}=1$ 2. $16z=y^2$ 3. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{4}=1$	1. $y=6z^2$ 2. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{25}=1$ 3. $\frac{z^2}{36}-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=0$
Вариант 11	Вариант 25
1. $\frac{z^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$ 2. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}$ 3. $\frac{z^2}{36}-\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$	1. $y=4x^2$ 2. $\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$ 3. $\frac{z^2}{16}-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$
Вариант 12	Вариант 26
1. $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$ 2. $y=\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{25}$ 3. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$	1. $x=16z^2$ 2. $\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{36}=1$ 3. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{36}=1$

Вариант 13	Вариант 27
1. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{4}=0$ 2. $2z^2=x$ 3. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{36}=1$	1. $z=4y^2$ 2. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$ 3. $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{36}=1$
Вариант 14	Вариант 28
1. $y=4z^2$ 2. $\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ 3. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$	1. $\mathrm{y}=4x^2$ 2. $\frac{x^2}{16}-\frac{Z^2}{25}=1$ 3. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{36}=1$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 1. $[Текст]$: Учебное пособие /Под ред. В.Б. Миносцева, Е.А. Пушкаря.- 2-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2013-544с.

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] / Д. В. Беклемишев. – М. : Издательство «Наука», 1980. – 336 с.

3. Бугров, Я. С. Высшая математика [Текст] : сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 3-е изд., испр. и доп. – Ростов на Дону : Издательство «Феникс», 1997. – 352 с.

4. Высшая математика [Текст] : учебно-методическое пособие / под ред. Л. З. Румшинского. – М., 1990. – 102 с.

5. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для вузов / под ред. профессора Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 471 с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие для втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : «Высшая школа», 1999. – Часть 1. – 304 с.

7. Ефимов, Н. В. Краткий курс аналитической геометрии [Текст] / Н. В. Ефимов. – М. : Издательство «Наука», 1969. – 272 с. (10 изд).

8. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие / Л. А. Кузнецов. – 4-е изд.– М. : Издательство «Лань», 2005. – 240 с.

9. Линейная алгебра и основы математического анализа [Текст] : сборник задач по математике / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Издательство «Наука», 1981. – 464 с.

10. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] / В. П. Минорский. – М. : Издательство «Наука», 1964. – 360 с.

11. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике [Текст] / А. Д. Мышкис. – М. : Издательство «Наука», 1967. – 640 с.

12. Общий курс высшей математики для экономистов [Текст] : учебник / под ред. В. И. Ермакова. – М. : «Инфра М», 2002. – 656 с.

13. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2001. – 479 с.

14. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. – 3-е изд.– М. : Издательство «Высшая школа», 2003. – 304 с.

ТАТЬЯНА ПАВЛОВНА ФИЛОНЕНКО
АННА ВИКТОРОВНА ШВАЛЕВА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие для практических занятий

Подписано в печать 16.02.2015 г.		
Формат 60x90 $^1/_{16}$ Рег.№ 58	Печать офсетная Тираж 60 экз.	Уч.-изд.л.4,8

ФГАОУ ВПО Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал
462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, 8.
E-mail: nfmisis@yandex.ru
Контактный тел. 8 (3537) 679729.