МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал

Кафедра математики и естествознания

А.В. Швалёва
Т.П. Филоненко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-методическое пособие

Новотроицк, 2013

УДК 517
ББК 22.16
Ш – 33

Рецензенты:

Соколов А.А., *кандидат физико-математических наук,*
доцент кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин
Орского филиала ФГАОУ ВПО
«Самарский государственный университет путей сообщения»

Изаак Д.Д., *старший преподаватель*
кафедры математики и естествознания ФГАОУ ВПО «Национальный
исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал

Швалёва, А.В. Математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: Учебно-методическое пособие / А.В. Швалёва, Т.П. Филоненко.- Новотроицк.: НФ НИТУ «МИСиС», 2013. – 60 с.

В учебно-методическом пособии рассмотрены теоретические сведения (определения, формулы, теоремы) по разделу «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» математического анализа, а также достаточное число примеров с подробным решением. Пособие предназначено для обеспечения самостоятельной работы студентов заочной формы обучения и ориентировано, прежде всего, на студентов технических специальностей.

Рекомендовано Методическим советом НФ НИТУ «МИСиС»

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Данное пособие написано авторами на основе опыта чтения лекций, ведения практических занятий по математике для студентов заочной формы обучения. Авторы пособия предлагают вам помощь в изучении учебного курса: «Математика ч.1» («Высшая математика ч.1») в виде учебно-методического пособия «Математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Пособие содержит минимальный объем теоретического материала с подробным разбором решения типовых задач по темам:

– производная и дифференциал функции;

– применение производной к исследованию функций.

На основе данных тем составлена вторая часть контрольной работы № 1.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения задач. Формулировки определений и теорем в основном приведены по книге, которая предлагается как основной учебник для студентов нашего филиала всех технических направлений: *Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст]: учебник для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2001. – 479 с.*

В пособии приводятся решения типовых задач, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения. При подборе задач были использованы различные сборники задач, которые указаны в библиографическом списке.

Пособие может быть использовано как для изучения перечисленных тем на практических занятиях под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения данного материала.

Прежде чем приступать к выполнению задач контрольной работы № 1, изучите теоретическую часть необходимой вам темы, разберите решения предлагаемых примеров, выполните примеры для самостоятельной работы. Если у вас не возникло вопросов, то вы можете приступать к выполнению второй части контрольной работы № 1. Все вопросы, возникающие при подготовке, вы можете задать преподавателю на индивидуальной консультации.

Авторы выражают надежду, что это учебно-методическое пособие существенно поможет студентам в изучении основ высшей математики и выполнении контрольной работы № 1.

ГЛАВА I. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

1.1 Определение производной, её геометрический и физический смысл

Существует круг задач, например задача о скорости движущейся точки; задача о касательной к данной кривой и другие, для решения которых применяется одна и та же математическая операция. Выясним аналитическую сущность этой операции, отвлекаясь от конкретного смысла задач.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b). Возьмем какое-либо значение переменной $x \in (a,b)$. Найдем значение функции в этой точке $f(x)$. Затем выберем новое значение аргумента $x + \Delta x \in (a,b)$, придавая первоначальному значению аргумента x приращение Δx (положительное или отрицательное). Этому значению аргумента соответствует новое значение функции $f(x + \Delta x)$. Теперь запишем изменение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, называемое приращением функции. Составим отношение приращение функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

которое является функцией от Δx, и перейдем к пределу.

Определение 1.1.1. Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется производной функци $y = f(x)$ в точке x и обозначается

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.1.1}$$

Действие нахождения производной функции называется дифференцированием функции.

Можно сформулировать *механический смысл производной*: скорость v прямолинейного движения точки есть производная пути s по времени t, то есть

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Геометрический смысл производной: Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 есть значение производной функции в этой точке $f'(x_0)$. Таким образом $k = f'(x_0)$.

Уравнение касательной к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где x_0 – абсцисса точки касания,

$f(x_0)$ – значение функции в точке с абсциссой x_0 (в точке касания),

$f'(x_0)$ – значение производной в точке касания x_0,

(x, y) – координаты любой точки, лежащей на касательной.

Определение 1.1.2. Прямая, перпендикулярная к касательной к данной кривой, проведенной в точке касания, называется нормалью к данной кривой.

Уравнение нормали к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f(x_0)}(x - x_0).$$

1.2 Понятия сложной и обратной функций. Их производные

Пусть переменная y зависит от переменной u и эта зависимость задана аналитическим выражением $y = f(u)$. Причем переменная u в свою очередь зависит от переменной x, то есть $u = \varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, следовательно, будет меняться y. Таким образом, y является функцией аргумента x $y = f(\varphi(x))$при определенных условиях.

Определение 1.2.1. Если на некотором промежутке X определена функция $u = \varphi(x)$ с множеством значений U, а на множестве значений U определена функция $y = f(u)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется сложной функцией от x, а переменная u – промежуточной переменной сложной функции.

Таким образом $y = f(\varphi(x))$, при $x \in D(\varphi)$.

Термин «сложная функция» можно заменить равнозначными терминами «композиция или суперпозиция функций», которые обозначаются $f \circ \varphi$.

<u>Пример 1.2.1.</u> Если $y = \cos u$, а $u = x^3$, то функция $y = \cos x^3$ есть сложная функция независимой переменной x. Причем эта функция определена на всей числовой прямой, так как областью определения и множеством значений функции $u = x^3$ является вся числовая прямая.

<u>Пример 1.2.2.</u> Если $y = \ln u$, $u = \sin x$, то сложная функция $y = \ln \sin x$ определена лишь для тех значений x, при которых $u = \sin x > 0$, так как логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента.

Для дифференцирования сложных функций применяют следующую теорему.

Теорема 1.2.1. Если функция $u=\varphi(x)$ имеет в точке x производную $u_x'=\varphi'(x)$, а функция $y=f(u)$ имеет производную $y_u'=f'(u)$ в соответствующей точке u, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ в данной точке x имеет производную y_x', которая находится по следующей формуле:

$$y_x'=y_u'u_x'=f'(u)\varphi'(x) \tag{1.2.1}$$

Рассмотрим понятие обратной функции. Пусть $y=f(x)$ есть функция независимой переменной x. Это означает, что, задавая значения x, мы можем определить значения зависимой переменной y. Поступим наоборот, будем считать независимой переменную y, а зависимой переменную x. Тогда x будет являться функцией переменной y, которая называется функцией, обратной к данной. Предполагая, что уравнение $y=f(x)$ разрешимо относительно x, получим явное выражение обратной функции $x=\varphi(y)$. Функция, обратная однозначной функции, может быть многозначной, то есть данному значению y может соответствовать несколько значений переменной x. Однако иногда удаётся сделать обратную функцию однозначной, вводя дополнительные ограничения на её значения.

<u>Пример 1.2.3.</u> Для однозначной функции $y=x^2$ обратной является двузначная функция $x=\pm\sqrt{y}$. Если условиться для корня брать только арифметическое значение, то обратная функция будет однозначной.

Функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ являются взаимно обратными.

Иногда придерживаются стандартных обозначений, то есть под x понимают независимую переменную или аргумент, а под y – зависимую переменную или функцию. В этом случае взаимно обратные функции будут иметь вид $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$. Так, например, взаимно обратные функции, рассмотренные в примере 1.2.3 можно задать следующим образом $y=x^2$ и $y=\pm\sqrt{x}$.

Рассмотрим теорему, которая позволяет находить производные взаимно обратных функций.

Теорема 1.2.2. Пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ взаимно обратные функции. Тогда если функция $y=f(x)$ имеет отличную от нуля производную $f'(x)$, то обратная функция имеет производную $\varphi'(y)$, причем справедливо равенство

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \tag{1.2.2}$$

1.3 Таблица производных

Рассмотрим производные основных элементарных функций на примерах.

Пример 1.3.1. Найдите производную функции $y=\cos x$, используя определение (1.1.1).

Решение. Согласно определению, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=$

$$=\left[\begin{array}{l} \qquad\qquad \textit{Применим} \qquad\qquad\qquad \textit{формулу} \\ \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}: \\ \cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin x\cdot\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin x\cdot\Delta x}{\Delta x\cdot 2}=-\sin x.$$

Таким образом, $(\cos x)'=-\sin x$.

Пример 1.3.2. Найдите производную функции $y=tgx$, используя определение (1.1.1).

Решение. Согласно определению, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{tg(x+\Delta x)-tgx}{\Delta x}=$

$$=\left[\begin{array}{l} \qquad\qquad \textit{Применим} \qquad\qquad\qquad \textit{формулу} \\ \qquad tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}: \\ tg(x+\Delta x)-tgx=\frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=\frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x} \end{array}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}\right):\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x\cdot\Delta x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом, $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Пример 1.3.3. Найдите производную функции $y = \log_a x$, используя определение (1.1.1).

Решение. Согласно определению, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Таким образом, $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

Аналогично, можно найти производные других элементарных функций и составить таблицу производных (предлагаем Вам это сделать самостоятельно).

Таблица производных некоторых функций

1. $(C)' = 0$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
6. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
8. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
9. $(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$
10. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$
11. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
12. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
13. $(a^x)' = a^x \ln a$
14. $(e^x)' = e^x$

Опираясь на определение сложной функции и теорему о дифференцировании сложной функции, рассмотренные в пункте 1.2, и таблицу производных некоторых функций, приведенной выше в данном пункте, составим таблицу производных сложных функций.

Таблица производных сложных функций

1. $(C)' = 0$

2. $\left(U^{n}\right)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$

3. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$

4. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$

5. $(tgU)' = \dfrac{1}{\cos^{2} U} \cdot U'$

6. $(ctgU)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} U} \cdot U'$

7. $(\arcsin U)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-U^{2}}} \cdot U'$

8. $(\arccos U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^{2}}} \cdot U'$

9. $(arctgU)' = \dfrac{1}{1+U^{2}} \cdot U'$

10. $(arcctgU)' = -\dfrac{1}{1+U^{2}} \cdot U'$

11. $(\log_{a} U)' = \dfrac{1}{U \cdot \ln a} \cdot U'$

12. $(\ln U)' = \dfrac{1}{U} \cdot U'$

13. $\left(a^{U}\right)' = a^{U} \cdot U' \cdot \ln a$

14. $\left(e^{U}\right)' = e^{U} \cdot U'$

1.4 Правила дифференцирования функций

Существуют теоремы, которые упрощают процее дифференцирования функций.

Теорема 1.4.1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, то есть

$$\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x) \tag{1.4.1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = C \cdot f(x)$. Дадим переменной x приращение Δx, тогда приращение функции примет вид:

$$\Delta y = C \cdot f(x+\Delta x) - C \cdot f(x) = C\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)$$

Найдем производную функции:

$$y' = \left(C \cdot f(x)\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)}{\Delta x} =$$

$$= C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \cdot f'(x)$$

Теорема 1.4.2. Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных, то есть

$$(U + V + ... + W)' = U' + V' + ... + W' \qquad (1.4.2)$$

Теорема 1.4.3. Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна:

$$\left(U \cdot V\right)' = U' \cdot V + U \cdot V' \qquad (1.4.3)$$

Теорема 1.4.4. Производная частного равна:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2} \qquad (1.4.4)$$

Рассмотренные выше теоремы называются правилами дифференцирования функций.

1.5 Дифференцирование степенно-показательных функций

Определение 1.5.1 Функция вида $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые функции аргумента x, называется степенно-показательной функцией.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные $u'(x)$ и $v'(x)$ в точке x. Найдем производную степенно-показательной функции. Для этого её сначала прологарифмируем:

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)} \text{ или } \ln y = v(x)\ln u(x) .$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$(\ln y)' = (v(x)\ln u(x))' .$$

Получим:

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Тогда производная степенно-показательной функции

$$y' = y\,(\,v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}).$$

Или

$$y' = u(x)^{v(x)}(\,v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}) \qquad (1.5.1)$$

После преобразований получим формулу для отыскания производной степенно-показательной функции:

$$y' = u(x)^{v(x)} v'(x) \ln u(x) + v(x) u(x)^{v(x)-1} u'(x).$$

Можно заметить, что производная степенно-показательной функции представляет собой сумму производных показательной и степенной функций.

Отыскание производной с предварительным логарфмированием функции называется логарифмическим дифференцированием функции.

<u>Пример 1.5.1.</u> Найдите производную функции $y = (\sin x)^{x^2}$

Решение. Данная функция является степенно-показательной, поэтому воспользуемся методом логарифмического дифференцирования функции.

Прологарифмируем функцию

$$\ln y = \ln(\sin x)^{x^2}$$

Воспользуемся свойством логарифма степени $\ln x^{\alpha} = \alpha \ln x$

Получим

$$\ln y = x^2 \ln \sin x .$$

Продифференцируем последнее равенство

$$(\ln y)' = (x^2 \ln \sin x)'$$

Воспользуемся формулами

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u};\ (u^n)' = nu^{n-1}u';\ (\sin u)' = u' \cos u$$

И правилом дифференцирования произведения функций

$$(uv)' = u'v + v'u .$$

Будем иметь

$$\frac{y'}{y} = (x^2)' \ln \sin x + (\ln \sin x)' x^2$$

Или

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + \frac{(\sin x)'}{\sin x} x^2$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} x^2$$

Из последнего равенства найдем производную

$$y' = y(2x \ln \sin x + x^2 ctgx)$$

Подставим вместо y заданную функцию

$$y' = (\sin x)^{x^2}\left(2x\ln\sin x + x^2 ctgx\right).$$

1.6 Техника дифференцирования функций

Опираясь на предложенный выше теоретический материал, рассмотрим нахождение производных для различных функций.

Пример 1.6.1.. Найдите производные $\dfrac{dy}{dx}$ следующих функций:

а) $y = \sqrt[5]{x^3 - 3x^2} - \sqrt[3]{5x-4}$; *б)* $y = \cos\left(\operatorname{arctg}^2\dfrac{x}{2}\right)$;

в) $y = \left(\sin 2x + x^2\right)^{2x}$; *г)* $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}}$;

д) $y \cdot \cos 3x - x^2 \cdot \sin y = 0$.

Решение. *а)* Очевидно, что данная функция $y = \sqrt[5]{x^3 - 3x^2} - \sqrt[3]{5x-4}$ является алгебраической суммой степенных функций с дробными показателями:

$$y = \left(x^3 - 3x^2\right)^{\frac{1}{5}} - (5x-4)^{\frac{1}{3}}$$

Для нахождения производной, воспользуемся правилом дифференцирования суммы функций:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left[(U+V)' = U' + V'\right] = \left((x^3-3x^2)^{\frac{1}{5}}\right)' - \left((5x-4)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{воспользуемся табличной производной} \\ \text{сложной степенной функции} \\ \left(\mathrm{U}^{\mathrm{n}}\right)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U' \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^3 - 3x^2\right)^{-\frac{4}{5}}\left(x^3 - 3x^2\right)' - \frac{1}{3}(5x-4)^{-\frac{2}{3}}(5x-4)' =$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^3 - 3x^2\right)^{-\frac{4}{5}}\left(3x^2 - 6x\right) - \frac{1}{3}(5x-4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 5 = \frac{3x(x-2)}{5\cdot\sqrt[5]{\left(x^3-3x^2\right)^4}} - \frac{5}{3\cdot\sqrt[3]{(5x-4)^2}}.$$

б) Функция $y = \cos\left(\operatorname{arctg}^2\dfrac{x}{2}\right)$ представляет собой сложную тригонометрическую функцию. Для отыскания производной этой функции воспользуемся табличной формулой 4 из таблицы производных сложных функций $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\left(\cos(arctg^2\frac{x}{2})\right)'=-\sin\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}\cdot\left(arctg^2\frac{x}{2}\right)'.$$

Найдём производную функции $U_1=\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}$. Данную функцию можно переписать в виде: $U_1=\left(arctg\frac{x}{2}\right)^2$ – это сложная степенная функция. Воспользуемся табличной производной сложной степенной функции: $\left(U^n\right)'=n\cdot U^{n-1}\cdot U'$.

$$U_1'=\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}\right)'=\left(\left(arctg\frac{x}{2}\right)^2\right)'=2\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)'$$

Найдём производную функции $U_2=arctg\frac{x}{2}$ по табличной производной

$\left(arctgU\right)'=\frac{1}{1+U^2}\cdot U'$:

$$U_2'=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)'=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}=\frac{2}{x^2+4}.$$

Тогда искомая производная функции $y=\cos\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}\right)$ примет вид:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\sin arctg^2\frac{x}{2}\cdot 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x^2+4}=\frac{-4\cdot\sin\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}\cdot arctg\frac{x}{2}}{x^2+4}$$

Таким образом, при нахождении производной сложной функции главной задачей является умение правильно выделить последнюю операцию, с которой и начинается дифференцирование в виде цепочки простых функций. Это помогает правильно вычислить производную, не потеряв ни одного промежуточного аргумента.

в) Функция $y=\left(\sin 2x+x^2\right)^{2x}$ является степенно-показательной функцией типа $y=u(x)^{v(x)}$, $u(x)$ и $v(x)$ – функции от аргумента x. Для нахождения производных подобных функций воспользуемся приемом логарифмического дифференцирования.

$$\ln(y)=\ln(u(x)^{v(x)}).$$

Воспользуемся логарифмическим свойством $\log_a b^p=p\cdot\log_a b$:

$$\ln y=v(x)\cdot\ln u(x).$$

Дифференцируя последнее соотношение, получим:

$$\frac{y'}{y} = v \cdot \frac{u'}{u} + v' \cdot \ln v .$$

Умножая обе части равенства на y и заменяя затем y через u^v, получаем окончательно после очевидных преобразований.

$$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$$

Применяя этот метод для нашей задачи, получим:

$$\ln y = 2x \cdot \ln\left(\sin 2x + x^2\right)$$

Продифференцируем обе части равенства. Учитывая, что в левой части равенства стоит логарифм от функции, имеем:

$$\frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln\left(\sin 2x + x^2\right) + 2x \cdot \frac{\left(\sin 2x + x^2\right)'}{\sin 2x + x^2};$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln\left(\sin 2x + x^2\right) + 2x \cdot \frac{\cos 2x \cdot 2 + 2x}{\sin 2x + x^2};$$

$$\frac{y'}{y} = \ln\left(\sin 2x + x^2\right)^2 + \frac{4x(\cos 2x + x)}{\sin 2x + x^2};$$

$$y' = y \cdot \left(\ln\left(\sin 2x + x^2\right)^2 + \frac{4x(\cos 2x + x)}{\sin 2x + x^2} \right);$$

$$y' = \left(\sin 2x + x^2\right)^{2x} \cdot \left(\ln\left(\sin 2x + x^2\right)^2 + \frac{4x(\cos 2x + x)}{\sin 2x + x^2} \right)$$

г) Преобразуем функцию $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}}$ с помощью свойств логарифма степени и дроби:

$$y = \ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\sin x}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\ln(1+\cos x) - \ln(1-\sin x)\right).$$

Применяя правила дифференцирования функций $\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x)$ и $(U+V)' = U' + V'$ получим:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\left(\ln(1+\cos x)\right)' - \left(\ln(1-\sin x)\right)' \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2 x - \sin x + \cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\sin x)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \sin x + \cos x}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$$

.

д) В данном случае $y \cdot \cos 3x - x^2 \cdot \sin y = 0$ – зависимость между аргументом x и функцией y задана уравнением, которое не разрешено относительно функции y, то есть функция задана неявно. Чтобы отыскать производную y' следует дифференцировать по x обе части заданного уравнения, считая при этом y функцией от x, а затем полученное уравнение решить относительно искомой производной y'. Характерно, что производная неявной функции выражается через x и y. Имеем

$$\underline{y'\cdot\cos 3x} - 3y\cdot\sin 3x - 2x\cdot\sin y - \underline{x^2\cdot\cos y\cdot y'} = 0;$$

$$y'\cdot\left(\cos 3x - x^2\cdot\cos y\right) = 3y\cdot\sin 3x + 2x\cdot\sin y;$$

$$y' = \frac{3y\cdot\sin 3x + 2x\cdot\sin y}{\cos 3x - x^2\cdot\cos y}.$$

1.7 Понятие дифференциала

Рассмотрим дифференцируемую в точке x_0 функцию $y = f(x)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A \tag{1.7.1}$$

Равенство (1.7.1) можно переписать в виде: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ или

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x \tag{1.7.2}$$

Определение 1.7.1. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение Δy в этой точке можно представить в виде (1.7.2): $\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$.

Слагаемое $A\cdot\Delta x$ является при $\Delta x\to 0$ бесконечно малой одного порядка с Δx (при $A\neq 0$), а также линейно относительно Δx. Слагаемое $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ при $\Delta x\to 0$ бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. В этой связи первое слагаемое $A\cdot\Delta x$ (при $A\neq 0$) является главной частью приращения функции $y = f(x)$.

Определение 1.7.2. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке:

$$dy = A\cdot\Delta x \tag{1.7.3}$$

Так как $A = f'(x)$ (это видно из равенства (1.7.1)), и учитывая, что дифференциалом dx независимой переменной x называют приращение Δx этой переменной, равенство (1.7.3) примет вид:

$$dy = f'(x) \cdot dx \tag{1.7.4}$$

Используя равенство (1.7.4), производную $f'(x)$ можно представить как отношение дифференциала dy функции к дифференциалу dx независимой переменной, то есть

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

<u>Пример 1.7.1.</u> Вычислите дифференциал функции $y = \dfrac{\arccos\sqrt{1-x}}{x}$.

Решение. Для отыскания дифференциала функции (равенство (1.7.4)), необходимо отыскать производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{\arccos\sqrt{1-x}}{x}\right)' = \frac{\left(\arccos\sqrt{1-x}\right)' \cdot x - x' \cdot \arccos\sqrt{1-x}}{x^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)}} \cdot \left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot x - 1 \cdot \arccos\sqrt{1-x}}{x^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) \cdot x - \arccos\sqrt{1-x}}{x^2} = \frac{\dfrac{-x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \arccos\sqrt{1-x}}{x^2}.$$

Таким образом, дифференциал функции в точке будет равен:

$$dy = \frac{\dfrac{-x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \arccos\sqrt{1-x}}{x^2} \cdot dx$$

<u>Пример 1.7.2.</u> Найдите дифференциал функции $y = (\cos 2x)^3$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Для того, чтобы найти дифференциал функции в точке, воспользуемся формулой:

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$

Найдем производную данной функции, а затем найти значение производной в точке x_0.

$$y' = \left((\cos 2x)^3\right)' = \begin{bmatrix} \text{Воспользуемся} & \text{табличной} \\ \text{производной} & \left(U^n\right)' = nU^{n-1} \cdot U' \end{bmatrix} = 3 \cdot (\cos 2x)^2 \cdot (\cos 2x)' =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Воспользуемся} & \text{табличной} \\ \text{производной} & (\cos U)' = -\sin U \cdot U' \end{bmatrix} = -3 \cdot \cos^2 2x \cdot \sin 2x \cdot (2x)' = -6\cos^2 2x \cdot \sin 2x.$$

Вычислим значение производной в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

$$y'(\frac{\pi}{6}) = -6\left(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{6} = -6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Таким образом, дифференциал функции будет равен:

$$dy = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot dx$$

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Из определения дифференциала следует, что он зависит от Δx линейно и является главной частью приращения функции Δy. Причем, $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $A \cdot \Delta x$, поэтому им можно пренебречь: $\Delta y \approx dy$.

В ряде задач приращение функции в данной точке приближенно заменяют дифференциалом функции в этой точке: $\Delta y \approx dy$.

Известно, что дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой главную часть приращения функции Δy в этой точке. Если приращение аргумента x мало по абсолютной величине, то приращение функции приближенно равно дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$.

Так как $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, а $dy = f'(x_0)dx$, то имеет место приближенное равенство:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x.$$

Если $a = x_0+\Delta x$, то $\Delta x = a - x_0$.

Тогда

$$f(a) - f(x_0) \approx f'(x_0)(a - x_0)$$

или

$$f(a) \approx f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) \qquad (1.7.5)$$

Полученное приближенное равенство дает возможность найти значение функции при $x=a$, если известно значение функции и ее производной при $x=x_o$.

Пример 1.7.3. Вычислите значение функции $y=\sqrt[4]{x}$ в точке $a=2386$, заменив приращение функции в точке дифференциалом в точке $x_0=2401$.

Решение. Воспользуемся равенством (1.7.5). Положим $x_o=2401$, $a=2386$, тогда $\Delta x=2386-2401=-15$

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[4]{x}$.

Её производная

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}};$$

$$f'(x_o)=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{2401^3}}=\frac{1}{1372}.$$

Значение функции $f(x)=\sqrt[4]{x}$ в точке $a=2386$ определим, подставив найденные компоненты в равенство (1.9.4):

$$f(a)=f(2386)\approx\sqrt[4]{2401}-\frac{55}{4\cdot\sqrt[4]{2401^3}}\approx 7-\frac{55}{1372}\approx 6{,}959.$$

1.8 Дифференцирование параметрических функций

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрически, то есть обе переменные x и y заданы как функции некоторой третьей переменной t, то есть

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \qquad (1.8.1)$$

При этом переменную t называют параметром. Предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют нужное число производных по параметру t, в рассматриваемом промежутке изменения параметра, причем $x'(t)\neq 0$. Будем также считать, что функция $x=x(t)$ имеет обратную функцию $t=\varphi(x)$, что позволяет рассматривать переменную y как функцию переменной x, то есть $y=y(\varphi(x))$. Следовательно, можно найти производную параметрически заданной функции y'_x.

Найдем производную y'_x. Так как $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$, причем $dy=y'(t)dt$, $dx=x'(t)dt$, то

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad (1.8.2)$$

Формула (1.8.2) позволяет находить производную функции, заданной параметрически.

<u>Пример 1.8.1.</u> Найдите производную функции y'_x, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} y = 3\sin 2t \\ x = 4\cos 2t \end{cases}$$

Решение. Воспользовавшись формулой (1.8.2), получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(3\sin 2t)'}{(4\cos 2t)'} = \frac{6\cos 2t}{-8\sin 2t} = -\frac{3}{4} ctg 2t$$

1.9 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке. Значение $f'(x)$ производной, вообще говоря, тоже зависит от x, то есть производная $f'(x)$ представляет собой тоже функцию от x. Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

Обозначается:

$$y'' = (y')' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Производная от второй производной называется производной третьего порядка или третьей производной:

$$y''' = (y'')' = \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Вообще, производной n-го порядка от функции $f(x)$ называется производная первого порядка от производной *(n-1)* порядка и обозначается символически $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Для производных высших порядков имеют место следующие правила дифференцирования:

1. $(U+V)^{(n)} = U^{(n)} + V^{(n)}$

2. $(C \cdot U)^{(n)} = C \cdot (U)^{(n)}$

3. $(U \cdot V)^{(n)} = U^{(n)} \cdot V + n \cdot U^{(n-1)} \cdot V' + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} U^{(n-2)} \cdot V'' + \ldots + U \cdot V^{(n)}$ (Данное равенство носит название формулы Лейбница).

Пример 1.9.1. Найдите третью производную y''' функции $y = \sin^2 3x$.

Решение. Найдем первую производную y' от данной функции:

$$y' = \left(\sin^2 3x\right)' = \left((\sin 3x)^2\right)' = 2 \cdot \sin 3x \cdot (\sin 3x)' = 2 \cdot \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 3\sin 6x.$$

При упрощении первой производной была использована формула: $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Найдем вторую производную:

$$y'' = (y')' = (3\sin 6x)' = 3 \cdot \cos 6x \cdot 6 = 18 \cdot \cos 6x.$$

Найдем третью производную функции:

$$y''' = (y'')' = (18 \cdot \cos 6x)' = -18 \cdot \sin 6x \cdot 6 = -108 \cdot \sin 6x$$

Пример 1.9.2. Найдите вторую производную y'' функции $y = \dfrac{2x^2}{1-\cos x}$.

Решение. Найдем первую производную y', воспользовавшись формулой (1.4.4) дифференцирования частного:

$$y' = \left(\frac{2x^2}{1-\cos x}\right)' = \frac{(2x^2)' \cdot (1-\cos x) - 2x^2 \cdot (1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{4x \cdot (1-\cos x) - 2x^2 \cdot \sin x}{(1-\cos x)^2} = \frac{4x}{1-\cos x} - \frac{2x^2 \cdot \sin x}{(1-\cos x)^2}.$$

Найдем вторую производную, воспользовавшись правилами дифференцирования суммы (1.4.2), произведения (1.4.3) и частного (1.4.4):

$$y'' = (y')' = \left(\frac{4x}{1-\cos x} - \frac{2x^2 \cdot \sin x}{(1-\cos x)^2}\right)' = \frac{(4x)' \cdot (1-\cos x) - 4x \cdot (1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} -$$

$$-\frac{(2x^2\cdot\sin x)'\cdot(1-\cos x)^2-2x^2\cdot\sin x\cdot((1-\cos x)^2)'}{(1-\cos x)^4}=\frac{4\cdot(1-\cos x)-4x\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}-$$

$$-\frac{(4x\cdot\sin x+2x^2\cdot\cos x)\cdot(1-\cos x)^2-2x^2\cdot\sin x\cdot 2(1-\cos x)\cdot\sin x}{(1-\cos x)^4}.$$

С помощью формулы (1.5.2) можно находить и производные высших порядков для функций, заданных параметрически. Рассмотрим нахождение второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$. По определению второй производной имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

Так как $\frac{dy}{dx}=f(t)$, то для нахождения второй производной её нужно рассматривать как функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(t)\\ x=x(t)\end{cases}$$

Поэтому при нахождении второй производной по формуле (1.5.2) вместо y следует подставить $\frac{dy}{dx}$.

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} \qquad (1.9.1)$$

Пример 1.9.3. Найдите вторую производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases}y=3\sin 2t\\ x=4\cos 2t\end{cases}$$

Решение. В примере (1.5.1) мы нашли первую производную заданной функции

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}ctg2t$$

Для нахождения второй производной, воспользуемся формулой (1.5.3)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_t'}{x_t'}=\frac{\left(-\frac{3}{4}ctg2t\right)'}{\left(4\cos 2t\right)'}=\frac{\frac{3}{4}\frac{2}{\sin^2 2t}}{-8\sin 2t}=-\frac{3}{16\sin^3 2t}.$$

Рассмотрим способы отыскания дифференциалов высших порядков.

Известно, что $dy=f'(x)\cdot dx$, то есть дифференциал функции есть некоторая функция от x (от x может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$, второй же сомножитель dx является приращением независимой переменной и от её значения не зависит).

Так как дифференциал dy есть функция от x, то мы вправе говорить о дифференциале этой функции, то есть о дифференциале от дифференциала:

$$d^2y=d(dy)$$

Таким образом, дифференциал второго порядка можно отыскать по формуле:

$$d^2y=f''(x)\cdot(dx)^2=f''(x)\cdot dx^2 \qquad (1.9.2)$$

Дифференциал третьего порядка можно найти по формуле:

$$d^3y=f'''(x)\cdot(dx)^3=f'''(x)\cdot dx^3 \qquad (1.9.3)$$

Вообще, дифференциалом n-го порядка называется первый дифференциал от дифференциала *(n-1)* порядка и его можно отыскать по формуле:

$$d^ny=f^{(n)}\cdot\left(dx\right)^n$$

<u>Пример 1.9.4.</u> Найдите дифференциал второго порядка от функции $y=arctg3x$.

Решение. Для отыскания дифференциала второго порядка, воспользуемся равенством (1.9.2). Найдем вторую производную от данной функции:

$$y'=\left(arctg3x\right)'=\frac{(3x)'}{1+9x^2}=\frac{3}{1+9x^2}$$

$$y''=\left(y'\right)'=\left(\frac{3}{1+9x^2}\right)'=\frac{3'\cdot(1+9x^2)-3(1+9x^2)'}{(1+9x^2)^2}=\frac{-3\cdot 18x}{(1+9x^2)^2}$$

Таким образом, дифференциал второго порядка будет равен:

$$d^2y=f''(x)\cdot dx^2=\frac{-54x}{(1+9x^2)^2}\cdot dx^2.$$

1.10 Задачи для самостоятельного решения

1.10.1. Вычислите производную функции с использованием определения производной: 1) $y = x^3 + 2$

2) $y = \sin 2x$

1.10.2. Вычислите производные функций:

1) $y = x^3 - 3 \cdot \sqrt[5]{x^4} + 4$

2) $y = \left(x^2 - 4x\right) \cdot \cos x$

3) $y = \dfrac{5x + 4}{x^2 + 1}$

4) $y = \dfrac{2 - x}{\ln x}$

5) $y = e^x \cdot (4 - 3x)$

6) $y = tgx \cdot 2x^3$

7) $y = \arcsin x \cdot (1 - 4x)$

8) $y = arcctgx \cdot (x + 4)$

9) $y = \dfrac{8 - 3x}{7x + 4}$

10) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

11) $y = (\sin x + 4\cos x) \cdot ctgx$

12) $y = 3^x \cdot 5x^2$

1.10.3. Вычислите производные функций, заданных неявно:

1) $y \sin 2x + x^3 \cdot \cos y = 0$

…2) $3\ln(x^2 - 5y) + 2\arcsin \dfrac{y}{x} = 0$

3) $\left(2y^2 - 7x\right)^5 - e^y = 0$

1.10.4. Вычислите производную y'_x функции, заданной параметрически:

1) $\begin{cases} x = 4 \cdot \cos^2 3t \\ y = 8 \cdot \sin^3 3t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 1 - \ln\cos 2t \\ y = 1 + \ln\sin 2t \end{cases}$

1.10.5. Вычислите производные степенно-показательных функций:

1) $y = \left(2x + 5\right)^{x^3}$;

2) $y = \left(tg 2x\right)^{1-3x}$;

3) $y = \left(\ln 3x\right)^{\sin x}$;

4) $y = \left(\arcsin 2x\right)^{3x}$

1.10.6. Вычислите дифференциал функции в точке:

1) $y = \left(ctg 4x\right)^2$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$;

2) $y = \arccos\dfrac{x}{2}$, $x_0 = 0$;

3) $y = arctg(1 - 2x)$;

4) $y = \ln^2(4 - x)$.

1.10.7. Вычислите производные и дифференциалы высших порядков для функций:

1) $y = \sin^2 4x$; y'''-?

3) $y = \left(2x - x^2\right)^3$, $d^2 y$-?

2) $y = arctg3x + 7$; y'' -?   4) $y = \ln(1-3x)$, d^3y -?

1.10.8. Вычислите производную второго порядка y''_{xx} функции, заданной в параметрической форме:

1) $\begin{cases} x = 4\cdot(t - t^3) \\ y = 8\cdot(1-t) \end{cases}$;   2) $\begin{cases} x = \ln 2t \\ y = 3t + 4 \end{cases}$

1.10.9. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_о$ приращение функции $y = \sqrt[n]{x}$ дифференциалом: n=4, a=15,77, $x_о$=16.

1.10.10. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_о$ приращение функции $y = \sqrt[4]{4x + \cos x}$ дифференциалом: a=0,03, $x_о$=0.

ГЛАВА II. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ

2.1 Признаки монотонности и экстремумы функции

В пункте 2.1. учебно-методического пособия «Введение в математический анализ» (тех же авторов) мы ввели понятия возрастающих и убывающих функций. Однако для определения промежутков монотонности функции пользоваться определением возрастающих и убывающих функций весьма затруднительно. Поэтому при исследовании функции на монотонность пользуются необходимыми и достаточными условиями (признаками, критериями) возрастания и убывания функции. Сформулируем эти условия в виде теорем.

Теорема 2.1.1. (необходимое условие возрастания функции). Если дифференцируемая в интервале (a,b) функция $y=f(x)$ возрастает на этом интервале, то её производная не может быть отрицательной ни в одной точке данного интервала, то есть $f'(x)\geq 0$ для $a<x<b$.

Теорема 2.1.2. (необходимое условие убывания функции). Если дифференцируемая в интервале (a,b) функция $y=f(x)$ убывает на этом интервале, то её производная не может быть положительной ни в одной точке данного интервала, то есть $f'(x)\leq 0$ для $a<x<b$.

Сформулируем достаточные признаки монотонности функции.

Теорема 2.1.3. (достаточное условие возрастания функции). Если непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет положительную производную, то эта функция возрастает на сегменте $[a,b]$.

Теорема 2.1.4. (достаточное условие убывания функции). Если непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет отрицательную производную, то эта функция убывает на сегменте $[a,b]$.

Так как возрастающие и убывающие функции называются монотонными функциями, то теоремы 2.1.1 – 2.1.4 называются условиями монотонности функции.

Пример 2.1.1. Определить интервалы монотонности функции $y=2x^3-6x$.

Решение. Начиная любое исследование функции, находим область определения функции $D(f)$. Область определения нашей функции – любое действительное число, то есть $D(f)$: $x\in(-\infty;+\infty)$.

Теперь найдем производную функции и точки, в которых эта производная равна нулю.

$$y' = \left(2x^3 - 6x\right)' = 6x^2 - 6$$

$$6x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Разобъем область определения функции, полученными точками, на интервалы и определим знаки производной в каждом полученном интервале. Результаты этой операции удобнее заносить в таблицу:

Таблица 2.1.1 – Результаты исследования функции $y = 2x^3 - 6x$

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x < \infty$
знак производной y'	+	0	-	0	+
поведение функции y	*возрастает*		*убывает*		*возрастает*

Замечание: Для определения знака производной на любом интервале достаточно выбрать произвольное значение аргумента x, принадлежащего данному интервалу, и вычислить значение производной в точке x. Например, определим знак производной на интервале $x \in (-\infty; -1)$. Выберем значение аргумента $x = -2 \in (-\infty; -1)$ и вычислим значение производной в этой точке

$$y'(-2) = 6(-2)^2 - 6 = 24 - 6 = 18 > 0.$$

Так как получили положительное число, то в соответствующую ячейку таблицы поставим знак плюс.

Аналогично, выберем значение аргумента $x = 0 \in (-1; 1)$ и, вычисляя значение производной в данной точке, получим

$$y'(0) = 6(0)^2 - 6 = 0 - 6 = -6 < 0$$

Таким образом, получили отрицательное значение производной, поэтому в соответствующей ячейке таблицы поставим знак минус.

Определим знак производной в последнем интервале. Для этого найдем значение производной в точке $x = 2 \in (1; +\infty)$.

$$y'(2) = 6 \cdot 2^2 - 6 = 24 - 6 = 18 > 0.$$

Получили положительное значение производной, поэтому в соответствующей ячейке поставим знак плюс.

Применяя достаточные признаки монотонности функции (теоремы 2.1.3; 2.1.4) определяем поведение функции на интервалах и отмечаем это в таблице.

Экстремумы функции

Рассмотрим график непрерывной функции $y = \sin x$, изображенный на рисунке 2.1.1. Как видно из рисунка, значение функции в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ больше, чем значения функции в соседних точках, лежащих как слева, так и справа от точки $x = \dfrac{\pi}{2}$. В этом случае говорят, что функция имеет в точке $x = \dfrac{\pi}{2}$ максимум.

В точке $x = \dfrac{3\pi}{2}$ значение функции меньше, чем в соседних точках, лежащих вблизи данной точки, как слева, так и справа. Тогда говорят, что в точке $x = \dfrac{3\pi}{2}$ функция имеет минимум.

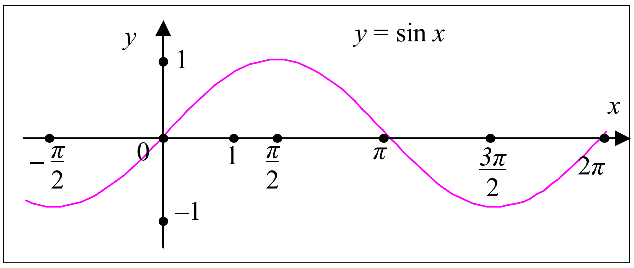

Рисунок 2.1.1 График функции $y = \sin x$

Рассмотрим строгое математическое определение максимума и минимума функции.

Определение 2.1.1. Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума или просто точкой максимума функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x = x_0$, что для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение 2.1.2. Точка $x = x_0$ называется точкой локального минимума или просто точкой минимума функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x = x_0$, что для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Определение 2.1.3. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума функции, а значения функции в этих точках называются экстремумами функции.

Необходимо отметить, что если в некоторой точке функция имеет максимум, то это не означает, что в этой точке функция имеет самое большое значение в области её определения. Это именно локальный максимум функции, то есть максимум «местного» значения. Таким образом, если в некоторой точке $x = x_0$ функция имеет максимум, то это самое большое значение функции, по сравнению с точками, лежащими достаточно близко к данной точке. При этом в области определения функции могут быть точки, в которых значения функции будут превышать значения локального максимума функции. Причем функция может иметь несколько точек максимума, а может не иметь их ни одной. Совершенно аналогичные замечания можно сделать относительно локального минимума функции. Причем интересен тот факт, что локальный максимум функции может оказаться меньше локального минимума функции.

Однако для отыскания экстремумов функции не пользуются определениями , приведенными выше. Существует ряд теорем, позволяющих более просто находить экстремумы функции. Эти теоремы носят названия условий или признаков или критериев существования экстремумов функции.

Теорема 2.1.5. (необходимый признак существования экстремума функции). Если дифференцируемая в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет в этой точке максимум или минимум, то её производная в данной точке обращается в нуль, то есть $f'(x_0) = 0$.

Определение 2.1.4. Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками функции первого рода.

Таким образом, из теоремы 2.1.5 следует, что если функция имеет экстремум, то он может быть только лишь в критических точках функции первого рода.

Однако теорема 2.1.5 является необходимым условием существования экстремума функции, но не является достаточным. Например, функция $y = x^3$ имеет производную $y' = 3x^2$, которая обращается в нуль при $x = 0$, но в этой точке экстремума не имеет. Из всего сказанного можно сделать вывод, что если функция имеет экстремум, то он может существовать только лишь в критических точках функции, но не во всякой критической точке функция может иметь экстремум.

Рассмотрим достаточные условия существования экстремума функции.

Теорема 2.1.6. (достаточный признак существования экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x\ )$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку первого рода $x = x_0$ (кроме может быть самой точки), и если производная при переходе аргумента слева направо через критическую точку меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс – минимум.

Замечание. Если при переходе через критическую точку производная функции не меняет знак, то функция в этой точке не имеет экстремума.

Исходя из всего сказанного выше, можно составить план исследования функции на монотонность и экстремумы:

1. Найдите область определения функции $y = f(x)$;
2. Найдите производную функции $f'(x)$;
3. Найдите критические точки функции первого рода, исходя из определения 2.1.4;
4. Разбейте область определения функции критическими точками на интервалы;
5. Определите знак производной в каждом интервале;
6. Используя достаточные признаки возрастания, убывания и существования экстремума функции (теоремы 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6), определите промежутки монотонности функции и её экстремумы;
7. Полученные результаты исследования занесите в таблицу.

Пример 2.1.2. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

Решение**.** Воспользуемся планом исследования функции на монотонность и экстремум, приведенном выше.

1. Найдем область определения функции. Совершенно очевидно, что функция определена на всей числовой прямой, то есть

$$D(f): x \in (-\infty;+\infty)$$

2. Найдем производную функции $f'(x)=x^2-x-2$

3. Найдем критические точки функции первого рода, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$x^2-x-2=0$$

$$D=1+8=9$$

$$x_1=-1; x_2=2.$$

Очевидно, что производная существует во всех точках области определения функции. Таким образом, функция имеет две критические точки первого рода $x_1=-1; x_2=2$.

4. Эти критические точки разбивают область определения функции на три интервала: $x \in (-\infty;-1)$, $x \in (-1;2)$, $x \in (2;+\infty)$.

5. В каждом из этих интервалов производная сохраняет свой знак, так как смена знака может произойти только при переходе через критическую точку. Определим знак производной во всех интервалах.

Для определения знака производной выберем значение аргумента, например $x = -2 \in (-\infty;-1)$ и вычислим значение производной в этой точке

$$f'(-2) = 4 + 2 - 2 = 4 > 0.$$

Аналогично, вычислим значение производной при $x = 0 \in (-1;2)$

$$f'(0) = 0 - 0 - 2 < 0$$

И при $x = 3 \in (2;+\infty)$

$$f'(3) = 9 - 3 - 2 = 4 > 0.$$

6. Таким образом, по значениям производной в выбранных точках, применяя теоремы 2.1.3 и 2.1.4, можем определить поведение функции в каждом интервале:

функция возрастает при $x \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$,

функция убывает для $x \in (-1;2)$.

Так как при переходе через критическую точку $x_1 = -1$, производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Вычислим его

$$y_{\max} = f(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 1 = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}.$$

При переходе через критическую точку $x_2 = 2$ производная меняет знак с минуса на плюс, то по теореме 2.1.6 в этой точке функция имеет минимум:

$$y_{\min} = f(2) = \frac{8}{3} - 2 - 4 + 1 = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}.$$

7. Полученные результаты заносим в таблицу (таблица 2.1.2):

Таблица 2.1.2 – Результаты исследования функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

x	$x \in (-\infty;-1)$	$x = -1$	$x \in (-1;2)$	$x = 2$	$x \in (2;+\infty)$
знак производ. $f'(x)$	+	0	-	0	+
поведение функции $f(x)$	*возрастает* $\nearrow$	*максимум* $y_{\max} = \frac{13}{6}$	*убывает* $\searrow$	*минимум* $y_{\min} = -\frac{7}{3}$	*возрастает* $\nearrow$

Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$. Всякая непрерывная на отрезке функция достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Очевидно, что это значение может достигаться либо на границе отрезка, либо внутри него. Если наибольшее или наименьшее значения функции достигаются внутри отрезка, то это может быть лишь в точках максимума или минимума функции. Из приведенных рассуждений можно составить план исследования функции:

1. Найдите область определения функции $y = f(x)$ и убедитесь в том, что она непрерывна на заданном отрезке $[a,b]$.
2. Найдите все критические точки функции первого рода, принадлежащие заданному отрезку $[a,b]$.
3. Вычислите значения функции в полученных критических точках и на концах отрезка, то есть в точках $x = a$ и $x = b$.
4. Из полученных значений функции отберите наибольшее и наименьшее.

Пример 2.1.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 6x$ на отрезке $x \in [-2,0]$.

Решение**.** Воспользуемся планом исследования функции на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

1. Найдем область определения функции.

Функция определена на всей числовой оси, то есть для $x \in (-\infty;+\infty)$.

Из этого следует, что функция непрерывна на отрезке $x \in [-2,0]$ и достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

2. Найдем критические точки функции первого рода.

Для этого найдем производную функции:

$$f'(x) = 6x^2 - 6$$

$$6x^2 - 6 = 0$$

$x_1 = -1; x_2 = 1$ – критические точки функции первого рода.

Отберем критические точки, принадлежащие заданному отрезку:

$$x_1 = -1 \in [-2;0]$$

$$x_2 = 1 \notin [-2;0].$$

3. Вычислим значения функции в критической точке, принадлежащей отрезку, то есть в точке $x_1 = -1 \in [-2;0]$ и на концах отрезка в точках $x = -2$ и $x = 0$.

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) = -2 + 6 = 4$$

$$f(-2)=2(-2)^3-6(-2)=-16+12=-4$$
$$f(0)=2\cdot 0-6\cdot 0=0$$

4. Из полученных значений выберем наибольшее и наименьшее. Таким образом, наибольшее значение функция достигает в критической точке, а наименьшее – на левом конце отрезка, то есть

$$y_{наиб}=f(-1)=4,\quad y_{наим}=f(-2)=-4.$$

2.2 Критерии выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции

Определение 2.2.1. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

Определение 2.2.2. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

Так, например, график функции $y=x^2$ вогнутый на интервале $x\in(-\infty;+\infty)$, то есть во всей области определения этой функции; а парабола $y=-x^2$ имеет вогнутый график на интервале $x\in(-\infty;+\infty)$. Однако график функций может быть в одних интервалах выпуклым, в других – вогнутым. Например, график функции $y=\sin x$ (см. рисунок 2.1.1), рассматриваемый на интервале $x\in(0;2\pi)$ имеет промежуток выпуклости в интервале $x\in(0;\pi)$ и промежуток вогнутости на интервале $x\in(\pi;2\pi)$.

Рассмотрим достаточный признак выпуклости и вогнутисти графика функции, который позволит нам определять поведение графика функции на данном интервале.

Теорема 2.2.1. Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала $(a;b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x)<0$, то график функции выпуклый на этом интервале, если же $f''(x)>0$, то график функции вогнутый на этом интервале.

Определение 2.2.3. Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба графика функции.

Отыскание точек перегиба графика функции основано на следующих теоремах.

Теорема 2.2.2. (необходимое условие существования точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда, если точка $x_0 \in (a;b)$ является точкой перегиба графика данной функции, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 2.2.3. (достаточное условие существования точки перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции меняет знак при переходе через точку с абсциссой $x = x_0$, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

Определение 2.2.4. Внутренние точки области определения функции, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются критическими точками функции второго рода.

Исходя, из всего рассмотренного, можно составить план отыскания промежутков выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции:

1. Найдите область определения функции $y = f(x)$;
2. Найдите вторую производную функции $f''(x)$;
3. Найдите критические точки функции второго рода;
4. Разбейте область определения функции критическими точками второго рода на интервалы;
5. Определите знак второй производной $f''(x)$ в каждом интервале;
6. Используя достаточные условия выпуклости и вогнутости и существования точек перегиба графика функции (теоремы 2.2.1 и 2.2.3) определите промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба;
7. Полученные результаты занесите в таблицу.

Пример 2.2.1. Исследуйте на выпуклость, вогнутость и точки перегиба график функции $f(x) = 2x^3 - 6x$.

Решение. Исследуем функцию по предложенному выше плану.

1. Область определения функции является интервал $x \in (-\infty;+\infty)$.
2. Найдем первую и вторую производные функции

$$f'(x) = 6x^2 - 6, \qquad f''(x) = 12x;$$

3. Найдем критические точки функции второго рода: $12x = 0$; $x = 0$ – критическая точка функции второго рода;

4. Разобъем область определения функции критической точкой второго рода на два интервала и $x \in (0;+\infty)$;

5. Определим знак второй производной на каждом интервале. Очевидно, что $12x > 0$ для всех $x \in (0;+\infty)$ и $12x < 0$ для всех $x \in (-\infty;0)$;

6. Таким образом, из теоремы 2.2.1 следует, что на интервале $x \in (-\infty;0)$ график функции выпуклый, а на интервале $x \in (0;+\infty)$ график функции вогнутый.

Так как при переходе через критическую точку второго рода вторая производная меняет знак, то точка $x = 0$ является точкой перегиба графика функции;

7. Для наглядности полученные результаты занесем в таблицу (таблица 2.2.1)

Таблица 2.2.1 – Результаты исследования функции $f(x) = 2x^3 - 6x$

x	$x \in (-\infty;0)$	$x = 0$	$x \in (0;+\infty)$
знак второй производ. $f''(x)$	–	0	+
поведение функции $f(x)$	*график выпуклый*	*точка перегиба*	*график вогнутый*

2.3 Асимптоты функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, то есть при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ или вблизи точек разрыва второго рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются асимптотами.

Определение 2.3.1. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние между точкой *M* графика функции и этой прямой при удалении точки *M* в бесконечность, стремится к нулю.

Различают два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

I. *Вертикальные асимптоты*

Определение 2.3.2. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Для отыскания вертикальных асимптот функции $y = f(x)$ необходимо найти точки, в которых функция не существует и исследовать поведение функции в окрестности этих точек. Если выполняется хотя бы одно из условий определения (2.3.2) ($\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$), то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

II. *Наклонные асимптоты*

Пусть кривая с уравнением $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту. Тогда уравнение её имеет вид:

$$y = kx + b \tag{2.3.1}$$

Тогда, если прямая (2.3.1) – наклонная асимптота, то числа k и b находятся по формулам:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{2.3.2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) \tag{2.3.3}$$

Если хотя бы один из пределов (2.3.2) или (2.3.3) не существует или равен ∞, то кривая наклонной асимптоты не имеет.

<u>Пример 2.3.1.</u> Найдите асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Решение. *а*). Определим вертикальные асимптоты.

Для этого найдем область определения функции. Дробь существует для всех *x*, в которых знаменатель не обращается в ноль: $x \neq 0$. Таким образом, область определения *D(y):* $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.

Исследуем поведение функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \frac{-1}{-0} = +\infty; \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \frac{-1}{+0} = -\infty$$

Односторонние пределы функции равны «плюс бесконечности» и «минус бесконечности». Тогда по определению (2.3.2) прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

б). Определим наклонные асимптоты.

Для этого найдем значения пределов (2.3.2), (2.3.3).

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - 1}{x} = 2.$$

Таким образом, по формуле (2.3.1) прямая $y = x + 2$ – наклонная асимптота.

В результате получили, что данная функция $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$ имеет две асимптоты: $x = 0$ и $y = x + 2$.

Выполним построение кривой. Для исследования взаимного расположения кривой и асимптоты рассмотрим разность ординат кривой и асимптоты при одном и том же значении *x*:

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{ас}} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}$$

При $x > 0$ – эта разность меньше нуля, при $x < 0$ – эта разность положительна, то есть при $x > 0$ – кривая ниже асимптоты, при $x < 0$ – кривая выше асимптоты.

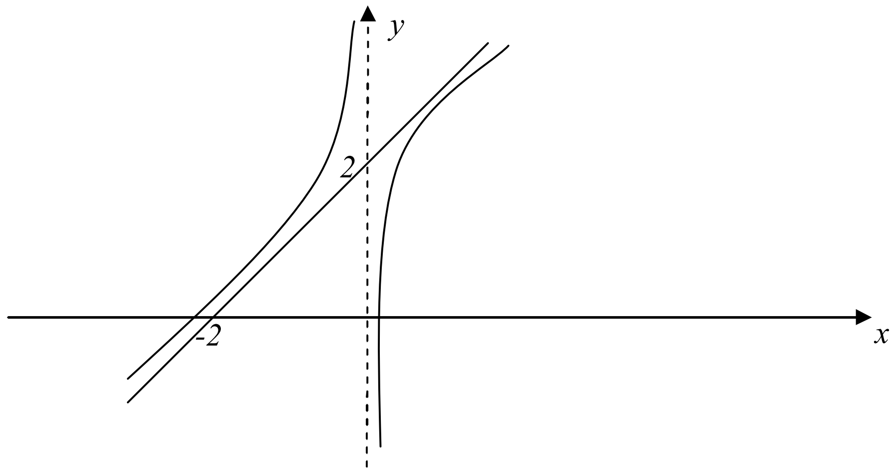

Рисунок 2.3.1 – График функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$

2.4 Общая схема исследования функции

Обобщим изложенные в пунктах 2.1–2.3 теоретические положения и составим общую схему исследования функции.

Схема исследования функции:

1. Нахождение области определения функции;
2. Исследование функции на четность, нечетность, периодичность;
3. Нахождение точек пересечения функции с осями координат;
4. Нахождение точек экстремума и определение интервалов монотонности;
5. Нахождение точек перегиба и определение направления выпуклости;
6. Отыскание асимптот;
7. Построение графика функции.

Пример 2.4.1. Исследуйте функцию $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$ и постройте график.

Решение. Проведём исследование функции $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$ по предложенной выше схеме.

1. Область определения элементарной функции найдём, используя свойства элементарных функций: $D(y)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Симметрия графика функции устанавливается проверкой следующих свойств функции:

а) функция $f(x)$ называется чётной, если область определения симметрична относительно оси Oy и для всех x из области определения выполняется равенство

$$f(-x)=f(x)$$

б) функция $f(x)$ называется нечетной, если её область определения симметрична относительно начала координат и для всех x из области определения выполняется равенство

$$f(-x)=-f(x)$$

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Наша функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 9(-x)^2 + 12(-x) - 9 = -2x^3 - 9x^2 - 12x - 9 = -(2x^3 + 9x^2 + 12x + 9);$$

$$f(-x) \neq f(x), \quad f(-x) \neq -f(x).$$

Следовательно, функция $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$ является функцией общего вида, то есть график функции симметрией не обладает.

3. *а*) Найдем точки пересечения функции с осью Ox ($y=0$). Для этого нужно решить уравнение $f(x)=0$ или

$$2x^3 - 9x^2 + 12x - 9 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на 4, получим уравнение:

$$(2x)^3 - 9(2x)^2 + 24(2x) - 36 = 0;$$

Введем новую переменную $2x = t$. Получим уравнение вида:

$$t^3 - 9t^2 + 24t - 36 = 0.$$

Разложим данное уравнение на множители:

$$t^3 - 9t^2 + 24t - 36 = (t-6)(t^2 - 3t + 6) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t - 6 = 0, \\ t^2 - 3t + 6 = 0 \end{array}\right.$$

Уравнение $t^2 - 3t + 6 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D = b^2 - 4ac = -15 < 0$.

Получили один действительный корень $t=6$ или $2x=6$, $x=3$.

Таким образом, точкой пересечения графика функции с осью *Ox* является точка *A(3;0)*.

б) Найдем точки пересечения функции с осью *Oy* ($x=0$). Для этого в функцию всюду вместо *x* подставить значение 0:

$$y = 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 9 = -9.$$

Таким образом, точкой пересечения функции с осью *Oy* будет точка *B(0;-9)*.

4. Интервалы монотонности и точки экстремума дифференцируемой функции находятся с помощью первой производной:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12.$$

Найдём критические точки функции I рода, то есть точки, при которых

$$f'(x)=0:$$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0;$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$(x-2)(x-1) = 0.$$

Точки $x=2$, $x=1$ будут критическими точками I рода. Проверим достаточные условия существования экстремума. Найдём знак производной в каждом интервале (рисунок 2.4.1). Результаты исследования можно заносить в таблицу, как в пункте 2.1, а можно отметить на числовой прямой следующим образом:

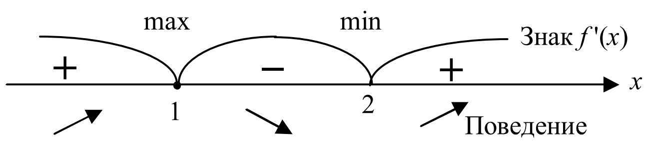

Рисунок 2.4.1 – Промежутки возрастания и убывания функции

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$$

$x \in (-\infty; 1)$, $f'(x)>0$, функция возрастает;

$x \in (1; 2)$, $f'(x)<0$, функция убывает;

$x \in (2; +\infty)$, $f'(x)>0$, функция возрастает.

В точке $x=1$ функция имеет максимум, ее значение $y_{max} = f(1) = 4$

В точке $x=2$ функция имеет минимум и ее значение $y_{min} = f(2) = -3$

5. Определим точки перегиба и направление выпуклости графика функции. Найдем $f''(x)$: $f''(x) = 12x - 18 = 12\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Найдём критические точки II рода, то есть точки, в которых $f''(x) = 0$. Вторая производная обращается в нуль при $x = \frac{3}{2}$. Разобьем область определения D на два интервала.

Найдём знак $f''(x)$ в каждом интервале. $f''(x)<0$, при $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; $f''(x)>0$, $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, точка $x = \frac{3}{2}$ – критическая точка II рода (рисунок 2.4.2).

При переходе через точку $x = \frac{3}{2}$ вторая производная меняет свой знак. Это значение аргумента является абсциссой точки перегиба. Ордината этой точки равна $f\left(\frac{3}{2}\right) = -4{,}5$. Следовательно, точка $\text{M}\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ – точка перегиба графика функции. Отметим результаты исследования на числовой прямой (рисунок 2.4.2).

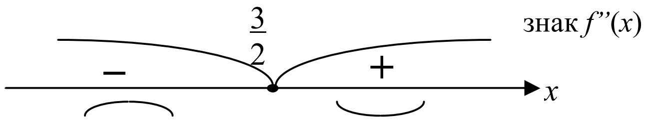

Рисунок 2.4.2 – Промежутки выпуклости, вогнутости функции
$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$

6. Найдем асимптоты функции.

а) Вертикальных асимптот функция не имеет, так как $D(f)$ $x \in R$, то есть нет точек разрыва II рода.

б) Уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx\right)$$

Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 9}{x} = \infty .$$

Следовательно, наклонных и горизонтальных асимптот функция не имеет.

7. Построим график функции, используя полученные результаты исследования (рисунок 2.4.3).

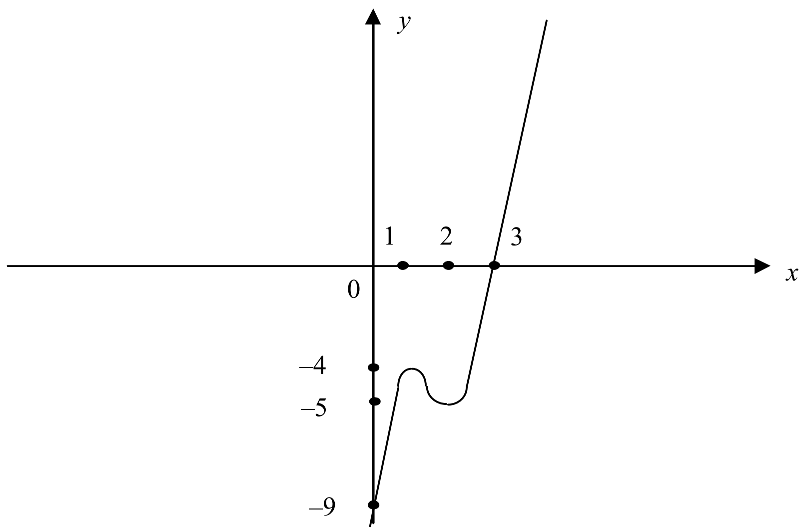

Рисунок 2.4.3 – График функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$

<u>Пример 2.4.2.</u> Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ и постройте график.

Решение. Проведём исследование функции $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ по предложенной выше схеме.

1. Область определения функции исключает точки, в которых знаменатель дроби обращается в ноль.

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

Область определения данной функции можно записать: $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Симметрия графика функции устанавливается проверкой следующих свойств функции:

Наша функция является четной, так как

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1};$$

$$f(-x) = f(x).$$

Следовательно, график данной функции симметричен относительно оси ординат.

3. *а*) Найдем точки пересечения функции с осью Ox ($y=0$). Для этого нужно решить уравнение $f(x)=0$ или

$$\frac{x^2}{x^2-1}=0.$$

Дробь обращается в ноль, если её числитель равен нулю: $x^2=0$ или $x=0$.

Таким образом, точкой пересечения графика функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ с осью *Ox* является точка *O(0;0)*.

б) Найдем точки пересечения функции с осью *Oy* (*x=0*). Для этого в функцию всюду вместо *x* необходимо подставить значение 0:

$$y=\frac{0^2}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0.$$

Таким образом, точкой пересечения функции с осью *Oy* будет та же точка *O(0;0)*.

4. Интервалы монотонности и точки экстремума дифференцируемой функции находятся с помощью первой производной:

$$f'(x)=\frac{(x^2)'\cdot(x^2-1)-x^2\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-1)-x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-2x-2x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Найдём критические точки функции I рода, то есть точки, при которых

$f'(x)$=0 или $f'(x)$ не существует:

$$f'(x)=0 \Rightarrow -2x=0;$$

$$x=0 \in D(y).$$

$$f'(x) \text{ не существует} \Rightarrow (x^2-1)^2=0$$

$$x^2-1=0;$$

$$x^2=1;$$

$$x=\pm 1 \notin D(y)$$

Точка *x=0* является критической точкой I рода, точки *x=1*, *x=-1* не являются критическими, так как не принадлежат области определения. Проверим достаточные условия существования экстремума. Найдём знак производной в каждом интервале (рисунок 2.4.4):

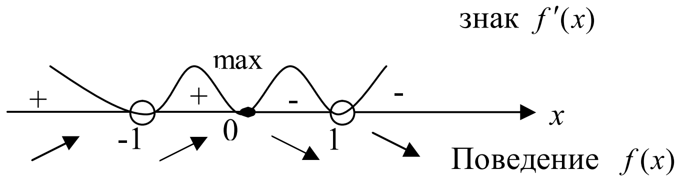

Рисунок 2.4.4 – Промежутки возрастания и убывания функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

$x\in(-\infty;\,-1)$, $f'(x)>0$, функция возрастает;

$x\in(-1;\,0]$, $f'(x)>0$, функция возрастает;

$x\in[0;\,1)$, $f'(x)<0$, функция убывает;

$x\in(1;\,+\infty)$, $f'(x)<0$, функция убывает.

В точке $x=0$ функция имеет максимум, ее значение $y_{\max}=f(0)=0$

5. Определим точки перегиба и направление выпуклости графика функции. Найдем $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{(-2x)'\cdot(x^2-1)^2-(-2x)\cdot((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4}=\frac{-2\cdot(x^2-1)^2+2x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2-1)\cdot(4x^2-x^2+1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2\cdot(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

Найдём критические точки II рода, то есть точки, в которых $f''(x)=0$ или $f''(x)$ не существует. Вторая производная не обращается в нуль ни при каких x; не существует в точках $x=\pm1\notin D(y)\Rightarrow$ критических точек II рода нет. Отметим на числовой оси точки, которые исключает область определения, и найдём знак $f''(x)$ в каждом интервале (рисунок 2.4.5) и определим поведение функции в этих интервалах.

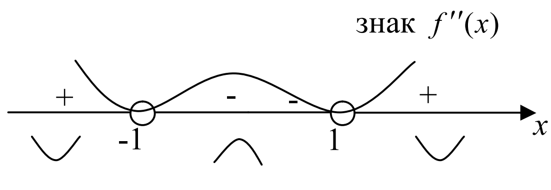

Рисунок 2.4.5 – Промежутки выпуклости, вогнутости функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

. $f''(x)<0$, при $x\in(-1;1)$ – выпуклая; $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;-1)$ и $x\in(1;+\infty)$ – вогнутая.

6. Выясним вопрос о существовании асимптот.

а) Исследуем поведение функции вблизи точек разрыва $x = \pm 1$.

Для этого определим односторонние пределы функции при $x \to 1$ и при $x \to -1$:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{+0} = +\infty; \ \lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{-0} = -\infty; \ \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Таким образом, прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются вертикальными асимптотами.

б) Уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \ b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$$

Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x^2-1)} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1.$$

Таким образом, наклонная асимптота примет вид: $y = 1$ – горизонтальная асимптота, так как $k = 0$.

7. Построим график функции, используя полученные результаты исследования (рисунок 2.4.6).

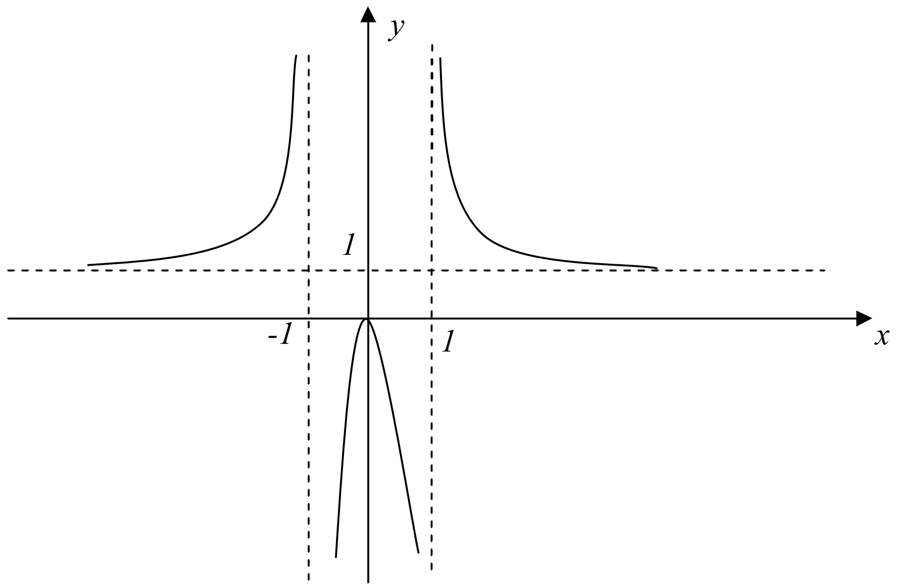

Рисунок 2.4.6 – График функции $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

2.5 Задачи для самостоятельного решения

2.5.1 Определите промежутки монотонности и точки экстремума функции, постройте схематично график:

1) $y = x^3 - 3x$;

2) $y = 12x - x^3$;

3) $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$;

4) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

2.5.2. Исследуйте на промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба график функции:

1) $y = \dfrac{1}{3} \cdot x^3 + x^2$;

2) $y = \dfrac{1}{4} \cdot x^4 - 2x^2$

2.5.3. Найдите асимптоты кривой:

1) $y = 2x + \dfrac{1}{x^2}$;

2) $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$

2.5.4. Исследуйте функцию и постройте график:

1) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$;

2) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$;

3) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$;

4) $y = \dfrac{e^x}{4(1 - x)}$

ГЛАВА III. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

В данном пособии предлагается вторая часть контрольной работы № 1 (первая часть контрольной работы № 1 можно найти в пособии: «Математический анализ. Введение в математический анализ» Швалёвой А.В., Филоненко Т.П.).

Последние цифры	№ варианта
01; 11; 21; 31; 41	1
02; 12; 22; 32; 42	2
03; 13; 23; 33; 43	3
04; 14; 24; 34; 44	4
05; 15; 25; 35; 45	5
06; 16; 26; 36; 46	6
07; 17; 27; 37; 47	7
08; 18; 28; 38; 48	8
09; 19; 29; 39; 49	9
10; 20; 30; 40; 50	10
51; 61; 71; 81; 91	11
52; 62; 72; 82; 92	12
53; 63; 73; 83; 93	13
54; 64; 74; 84; 94	14
55; 65; 75; 85; 95	15
56; 66; 76; 86; 96	16
57; 67; 77; 87; 97	17
58; 68; 78; 88; 98	18
59; 69; 79; 89; 99	19
60; 70; 80; 90; 00	20

Вариант 1

4. Найдите производные функций

а) $y=\left(3x^4-\dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}+2\right)^5$; б) $y=\ln\sqrt[5]{\left(\dfrac{1-5x}{1+5x}\right)^3}$; в) $y=\arccos 2x+\sqrt{1-4x^2}$;

г) $y=2^{\operatorname{tg} x}+x\cdot\sin 2x$; д) $x\cdot\sin 2y-y\cdot\cos 2x=10$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке a, заменив в точке $x=x_o$ приращение функции $y=\sqrt[n]{x}$ дифференциалом: $n=4$, $a=267$, $x_o=256$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\dfrac{x+6}{x^2+13}$; $[-5; 5]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: $a)$ $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; $b)$ $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2} \\ y=t-\sin t \end{cases}$

Вариант 2

4. Найдите производные функций:

а) $y=\left(5x^2+4\cdot\sqrt[4]{x^5}+3\right)^3$; б) $y=\ln\sqrt[6]{\dfrac{1-x^6}{1+x^6}}$; в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$;

г) $y=e^{3x}-2x\cdot\operatorname{tg} 3x$; д) $\left(e^y-x\right)^2=x^2+a^2$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке a, заменив в точке $x=x_o$ приращение функции $y=\sqrt[n]{x}$ дифференциалом: $n=5$, $a=234$, $x_o=243$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x$; $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x^2-3}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = \ln ctg 2x$; *b*) $\begin{cases} x = t^3 + 8t \\ y = t^5 + 2t \end{cases}$

Вариант 3

4. Найдите производные функций

а) $y = \left(\dfrac{1}{4}x^3 + 8 \cdot \sqrt[8]{x^3} - 1\right)^3$; б) $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{4x-1}{x^4+1}}$; в) $y = \arccos\sqrt{x+1}$;

г) $y = 3^{\cos x} - x \cdot \sin 2x$; д) $x \cdot \operatorname{tg} y - x^2 + y^2 = 4$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_о$ приращение функции $y = \sqrt[n]{x}$ дифференциалом: $n = 6$, $a = 685$, $x_о = 729$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+16}$; $[-5; 5]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{4x}{x^3-1}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = x^3 \ln x$; *b*) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

Вариант 4

4. Найдите производные функций

а) $y = \left(\dfrac{1}{5}x^5 - 3x \cdot \sqrt[3]{x} - 4\right)^4$; б) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^3-3}{x^3+2}}$; в) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$;

г) $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{ctg} 3x - 2^{x^2}$; д) $y - x^2 = \operatorname{arctg} y$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_о$ приращение функции $y = \sqrt[n]{x}$ дифференциалом: $n = 3$, $a = 502$, $x_о = 512$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sin x$; $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = x \cdot arcctgx$; *b*) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \cos t \end{cases}$

Вариант 5

4. Найдите производные функций

а) $y = \left(3x^5 + 5 \cdot \sqrt[3]{x^2} - 3\right)^5$; б) $y = \ln \sqrt[5]{\left(\dfrac{5x-3}{x^5+1}\right)^2}$; в) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{x-3}$;

г) $y = 5^{\sqrt{x}} - x^2 \operatorname{tg} 2x$; д) $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_o$ приращение функции $y = \sqrt[n]{x}$ дифференциалом: . *n* = 7, *a* = 142, x_o = 128.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+7}$; [–3; 7].

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{4x^3+5}{x}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = arcctgx$; *b*) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos^2 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

Вариант 6

4. Найдите пролизводные функций

а) $y = \left(5x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 3\right)^2$; б) $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1-8x}{x^8+1}}$; в) $y = \arccos \sqrt{1-x}$;

г) $y = 3^{\sqrt{x}} + \dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$; д) $x - y + x \cdot \sin y = 0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_o$ приращение функции $y = \sqrt[n]{x}$ дифференциалом: *n* = 3, *a* = 349, x_o = 343.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x$; $\left[-\frac{3\pi}{2};-\pi\right]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\frac{x^4}{x^3-1}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y=e^{ctg\,3x}$; *b*) $\begin{cases} x=3\cdot\cos t \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$

Вариант 7

4. Найдите производные функций

а) $y=\left(7x^5-3x\cdot\sqrt[3]{x^2}-6\right)^4$; б) $y=\ln\sqrt[3]{\left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^4}$;

в) $y=\arcsin 3x-\sqrt{1-9x^2}$; г) $y=e^{\operatorname{tg} x}-\sqrt{x}\cos 2x$; д) $e^y+ax^2e^{-y}=2bx$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x=x_о$ приращение функции $y=\sqrt[n]{x}$ дифференциалом: $n=4$, $a=605$, $x_о=625$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\frac{x-5}{x^2+1}$; $[-3;\ 7]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)\frac{x^3-4}{x^2}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y=e^x\cdot\cos x$; *b*) $\begin{cases} x=3t-t^3 \\ y=3t^2 \end{cases}$

Вариант 8

4. Найдите производные функций

а) $y=\left(4x^3+\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}-2\right)^5$; б) $y=\ln\sqrt[6]{\left(\frac{x^6-1}{6x+5}\right)^7}$; в) $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x-1}$;

г) $y=2^{x^2+1}-x\cdot\sin 4x$; д) $e^{2y}-e^{-3x}+\frac{y}{x}-1=0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_о$ приращение функции $y = \sqrt[n]{x}$ дифференциалом: $n = 5$, $a = 255$, $x_о = 243$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$; $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = e^{-x} \cdot \sin x$; *b*) $\begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$

Вариант 9

4. Найдите производные функций

а) $y = \left(3x^4 + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - 3\right)^5$; б) $y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{6x-3}{6x+2}\right)^3}$; в) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$;

г) $y = x \cdot \operatorname{tg} 3x + 2^{x-2}$; д) $\ln\left(x^2 + y^2\right) + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_о$ приращение функции $y = \sqrt[n]{x}$ дифференциалом: $n = 6$, $a = 773$, $x_о = 729$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}$; [–4; 6].

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = x\sqrt{x^2 + 1}$; *b*) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$

Вариант 10

4. Найдите производные функций

а) $y=\left(8x^3-\dfrac{9}{x^2\cdot\sqrt[3]{x}}+6\right)^5$; б) $y=\ln\sqrt[7]{\left(\dfrac{7x-4}{x^7-2}\right)^3}$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-x}$;

г) $y=3^{\sin x}-\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{tg}3x$; д) $3^{x+y}-xy\cdot\ln 3=15$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x=x_о$ приращение функции $y=\sqrt[n]{x}$ дифференциалом: $n=7$, $a=156$, $x_о=128$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x$; $\left[-2\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y=xe^{-x^2}$; *b*) $\begin{cases}x=\ln t\\ y=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t})\end{cases}$

Вариант 11

4. Найдите производные функций

а) $y=\left(4x^4-\dfrac{7}{x^3\cdot\sqrt[3]{x}}-3\right)^4$; *б)* $y=\ln\sqrt[5]{\left(\dfrac{5x+4}{x^5+2}\right)^3}$; *в)* $y=\operatorname{arc}tg\sqrt{1-2x}$;

г) $y=2^{\sin x}-\sqrt[4]{x}\cdot\operatorname{tg}4x$; *д)* $3^{x+2y}-xy\cdot\ln 4=10$

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x=x_о$ приращение функции $y=\sqrt[n]{x}$ дифференциалом: $n=3$, $a=8{,}24$, $x_о=8$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$, $[-4;2]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: $a)$ $y=\frac{x}{x^2+1}$; $b)$ $\begin{cases} x=\cos\frac{2t}{3} \\ y=3t-\cos t \end{cases}$

Вариант 12

4. Найдите производные функций

а) $y=\left(4x^4-\frac{7}{x\cdot\sqrt[3]{8x}}-1\right)^3$; *б)* $y=\ln\sqrt[7]{\left(\frac{7x+4}{x^7+2}\right)^3}$; *в)* $y=2\operatorname{arc}ctg\sqrt{1-3x}$;

г) $y=4^{\sin 2x}-\sqrt[4]{x}\cdot c\operatorname{tg}4x$; *д)* $3^{3x-2y}-3xy\cdot\ln 2=1$

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x=x_o$ приращение функции $y=\sqrt[n]{x}$ дифференциалом: *n*=3, *a*=7,64, x_o=8.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y=\frac{10x}{1+x^2}$, $[0,3]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: $a)$ $y=\ln tg3x$; $b)$ $\begin{cases} x=t^3-7t \\ y=t^5-3t \end{cases}$

Вариант 13

4. Найдите производные функций

а) $y=\left(-2x^2-\frac{7}{x\cdot\sqrt[4]{16x}}+1\right)^3$; *б)* $y=\ln\sqrt[4]{\left(\frac{3x-8}{x^8+2}\right)^3}$; *в)* $y=3\operatorname{arc}ctg\sqrt{1-7x}$;

г) $y=4^{\cos 2x}-\sqrt[4]{x}\cdot\operatorname{tg}4x$; *д)* $3^{3x-y}-2xy\cdot\ln 2=1$

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x=x_o$ приращение функции $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$ дифференциалом: *a*=0,01, x_o=0.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y = 2\sqrt{x} - x$, $[0,4]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$: *a*) $y = x^2 \ln 2x$; *b*) $\begin{cases} x = t - \sin 2t \\ y = 1 - \cos 2t \end{cases}$

Вариант 14

4. Найдите производные функций

а) $y = \left(2x^4 - \dfrac{2}{x\sqrt{4x}} + 1\right)^2$; б) $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{1-8x}{x^8+1}}$; в) $y = 2\arccos\sqrt{1-2x}$;

г) $y = 3^{\sqrt{9x}} + \dfrac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$; д) $y - x + y \cdot \sin x = 0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_0$ приращение функции $y = x^7$ дифференциалом: *a=2,002*; $x_0 = 2$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$, $[1,4]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$: *a*) $y = x \cdot arctgx$; *b*) $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = \sin 3t \end{cases}$

Вариант 15

4. Найдите производные функций

а) $y = \left(2x^5 - \dfrac{2}{x\sqrt{9x}} + 7\right)^5$; б) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{1-2x}{x^8+1}}$; в) $y = 2\arccos\sqrt{1-4x}$;

г) $y = 3^{\sqrt{16x}} + \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$; д) $y - x + y \cdot \cos 2x = 0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_o$ приращение функции $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ дифференциалом: *a=1,97*; $x_0 = 2$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y = x - 4\sqrt{x} + 5$, $[1,9]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{12x}{9 + x^2}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = 2arctgx$; *b*) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos^2 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$

Вариант 16

4. Найдите производные функций

а) $y = \left(2x^4 - \dfrac{2}{x^3\sqrt{x}} + 1\right)^3$; *б)* $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{1-4x}{x^7+1}}$; в) $y = -3\arccos\sqrt{1-2x} + 2x$;

г) $y = 7^{\cos x} + \dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$; *д)* $y - 3x + y \cdot tgx = 0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_o$ приращение функции $y = x^{11}$ дифференциалом: *a=1,021*; $x_0 = 1$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$, $[0,3]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^2}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = e^{tg3x}$; *b*) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos 2t \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$

Вариант 17

4. Найдите производные функций:

а) $y = \left(2x^3 - \dfrac{2}{x^3\sqrt{x}} + 2\right)^8$; *б)* $y = 2\ln\sqrt[6]{\dfrac{1-2x}{x^7+2}}$; в) $y = -3arctg\sqrt{1-2x} + 4x$;

г) $y = 4^{tgx} + \dfrac{2 - e^{3x}}{2 + e^{3x}}$; *д)* $y + 4x - y \cdot \cos x = 0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_{\text{o}}$ приращение функции $y = x^7$ дифференциалом: *a=1,996;* $x_0 = 2$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}$, $[-3{,}0]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{-8x}{4 + x^2}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = e^x \cdot \sin x$; *b*) $\begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$

Вариант 18

4. Найдите производные функций

а) $y = \left(3x^2 + \dfrac{2}{\sqrt[4]{16x}} - 3\right)^5$; *б)* $y = \ln \sqrt[5]{\left(\dfrac{6x+3}{6x-2}\right)^3}$; *в)* $y = \dfrac{1}{3} \operatorname{ar}c\operatorname{ctg} \dfrac{1}{x-1}$;

г) $y = 2x \cdot c\operatorname{tg} 3x + 2^{3x-2}$; *д)* $2\ln\left(x^2 + y^2\right) + 3\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = 0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *a,* заменив в точке $x = x_{\text{o}}$ приращение функции $y = x^6$ дифференциалом*: a=2,01*; $x_0 = 2$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$, $[-3;0]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{3x - 2}{x^3}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = e^{-x} \cdot \cos x$; *b*) $\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 4t^2 \end{cases}$

Вариант 19

4. Найдите производные функций

а) $y=\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{\sqrt[4]{2x}}+1\right)^5$; *б)* $y=\ln\sqrt[4]{\left(\frac{7x+3}{7x-2}\right)^7}$; *в)* $y=\frac{1}{8}\operatorname{ar}c\,cos\frac{2}{1-x}$;

г) $y=3x\cdot\operatorname{tg}2x+3^{2x-1}$; *д)* $2\ln\left(x^3+y^3\right)+3\arccos\frac{x}{y}=0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *а,* заменив в точке $x=x_o$ приращение функции $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$ дифференциалом: *a=0,01*; $x_0=0$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

$y=\frac{4x}{4+x^2}$, $[0;3]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a)* $y=\sqrt{x^2-1}$; *b)* $\begin{cases}x=t-\ln\cos t\\ y=t+\ln\sin t\end{cases}$

Вариант 20

4. Найдите производные функций

а) $y=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{\sqrt[3]{5x}}+2\right)^3$; *б)* $y=\ln\sqrt[5]{\left(\frac{2x+3}{5x-2}\right)^4}$; *в)* $y=\frac{1}{4}\cos\frac{2}{1-x}$;

г) $y=3x\cdot\arcsin 2x+3^{2x-1}$; *д)* $2\ln\left(x^4+y^4\right)+3\arccos\frac{y}{x}=0$.

5. Вычислите приближённое значение функции в точке *а,* заменив в точке $x=x_o$ приращение функции $y=\sqrt[5]{x^2}$ дифференциалом: a=1,03; $x_0=1$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

$$y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8,\ [-4;-1].$$

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$: $a)$ $y = xe^{-x^3}$; $b)$ $\begin{cases} x = \ln t \\ y = 2t + 3t^2 \end{cases}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров, Я. С. Высшая математика [Текст] : сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 3-е изд., испр. и доп. – Ростов-на-Дону : Издательство «Феникс», 1997. – 352 с.

2. Высшая математика [Текст] : учебно-методическое пособие / под ред. Л. З. Румшинского. – Москва, 1990. – 102 с.

3. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для вузов / под ред. профессора Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 471 с.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие для втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : «Высшая школа», 1999. – Часть 1. – 304 с.

5. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие / Л. А. Кузнецов. – 4-е изд.– М. : Издательство «Лань», 2005. – 240 с.

6. Линейная алгебра и основы математического анализа [Текст] : сборник задач по математике / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Издательство «Наука», 1981. – 464 с.

7. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс [Текст] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко. – 2-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2003. – 576 с.

8. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс [Текст] / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко / под ред. С. Н. Федина. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

9. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] / В. П. Минорский. – М. : Издательство «Наука», 1964. – 360 с.

10. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике [Текст] / А. Д. Мышкис. – М. : Издательство «Наука», 1967. – 640 с.

11. Общий курс высшей математики для экономистов [Текст] : учебник / под ред. В. И. Ермакова. – М. : «Инфра М», 2002. – 656 с.

12. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2001. – 479 с.

13. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. – 3-е изд.– М. : Издательство «Высшая школа», 2003. – 304 с.

АННА ВИКТОРОВНА ШВАЛЕВА
ТАТЬЯНА ПАВЛОВНА ФИЛОНЕНКО

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Учебно-методическое пособие
для студентов технических направлений
заочной формы обучения

Подписано в печать 23.10.2013		
Формат 60x90 1/16	Печать офсетная	Уч.-изд.л. 3,75
Рег.№ 28	Тираж 130 экз.	

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский технологический университет
«МИСиС»
Новотроицкий филиал
462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, 8.
E-mail: nfmisis@yandex.ru
Контактный тел. 8 (3537) 679729.