НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИСиС»
НОВОТРОИЦКИЙ ФИЛИАЛ

А.В. Швалёва

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал

Кафедра математики и естествознания

А.В. Швалёва

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Новотроицк, 2012

УДК 517
ББК 22.161.1
Ш - 33

Научный редактор

Филоненко Т.П., *доцент кафедры математики и естествознания*
Новотроицкого филиала ФГАОУ ВПО
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Рецензенты:

Соколов А.А., *кандидат физико-математических наук,*
доцент кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин
Орского филиала ФГАОУ ВПО
«Самарский государственный университет путей сообщения»

Попов А.С., *кандидат педагогических наук,*
доцент кафедры математического анализа, информатики,
теории и методики обучения информатики
Орского гуманитарно-технологического университета (филиала) ФГБОУ ВПО
«Оренбургский государственный университет»

Швалёва, А.В. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных: учебно-методическое пособие / А.В. Швалёва. – Магнитогорск: Издательский центр ФГБОУ ВПО «МГТУ», 2012. – 55 с. - **ISBN**

В учебно-методическом пособии рассмотрены теоретические сведения (определения, формулы, теоремы) по курсу математического анализа, раздела «Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных», а также большое число примеров с подробным решением. Пособие предназначено для обеспечения самостоятельной работы студентов заочной формы обучения и ориентировано, прежде всего, на студентов технических специальностей.

Рекомендовано Методическим советом НФ НИТУ «МИСиС»

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Основной целью данного издания является оказание помощи студентам в приобретении и закреплении знаний по нескольким из разделов математического анализа. Данное пособие состоит из трех глав. Первая глава охватывает вопросы, касающиеся дифференциального исчисления функции нескольких переменных. Вторая глава рассматривает вопросы интегрального исчисления функции нескольких переменных (двойной и тройной интегралы, их приложения). В третьей главе дается содержание контрольной работы №4 для студентов заочной формы обучения по направлениям:

- «Технологические машины и оборудование»;
- «Металлургия»;
- «Химическая технология»;
- «Электроэнергетика и электротехника»;
- «Теплоэнергетика и теплотехника».

Каждая тема предваряется необходимыми теоретическими пояснениями, включающими важнейшие определения и теоремы. Затем рассматривается блок задач на предложенную тему: подробно разбираются несколько типовых задач и в конце каждой главы предлагаются задачи для самостоятельного решения на закрепление изученного материала. При подборе задач были использованы различные сборники задач по высшей математике. Материал изложен в доступной для студентов форме, с привлечением геометрической и физической интерпретаций.

Данное пособие будет полезно преподавателям для проведения занятий у студентов заочной формы обучения (есть теория, разобранные примеры, задания для самостоятельного решения) и студентам для самостоятельного изучения рассматриваемых разделов математического анализа.

Автор благодарит за помощь в написании пособия Филоненко Т.П. и Сорокину Н.Н.

ГЛАВА I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1.1 Понятие функции нескольких переменных. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных

Определение 1.1.1. Если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга переменных величин *x, y* из некоторой области их изменения *D*, соответствует определенное значение величины *Z,* то говорят, что *Z* – есть функция двух независимых переменных *x, y*, определенная в области *D*.

Обозначение: $Z = f(x, y)$.

Определение функции двух переменных можно обобщить на случай трёх и более переменных.

Функция двух переменных существует не при любых значениях *x, y.*

Определение 1.1.2. Совокупность пар (x, y) значений *x* и *y,* при которых определяется функция $Z = f(x, y)$, называется областью определения функции.

Область определения функции $Z = f(x, y)$ наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений (x, y) будем изображать точкой $M(x, y)$ в плоскости *XOY*, то область определения функции изобразится в виде некоторой совокупности точек на плоскости.

Пример 1. Найдите область определения функции $Z = x^2 + 2y$.

Аналитическое выражение ($x^2 + 2y$) имеет смысл при любых значениях переменных x и y, следовательно, областью определения функции является вся плоскость *XOY.*

Пример 2. Найдите область определения функции $Z = \dfrac{4}{x - y}$.

Решение. Для того чтобы функция *Z* имела смысл, необходимо, чтобы в знаменателе дроби стояло число, не равное нулю, то есть x и y должны удовлетворять условию $x - y \neq 0$ или $y \neq x$. Все точки $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют указанному условию, лежат вне прямой $y = x$. Графически область определения данной функции можно изобразить точками плоскости *XOY*, за исключением точек, лежащих на прямой $y = x$ (рисунок 1.1.1.)

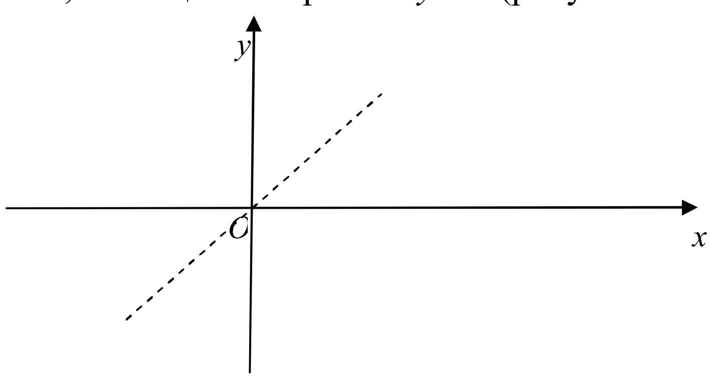

Рисунок 1.1.1. Графическое изображение области определения функции

Пример 3. Найдите область определения функции $Z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

Решение. Для того чтобы функция Z имела действительное значение, нужно, чтобы под корнем стояло неотрицательное число, и, учитывая, что корень присутствует в знаменателе, выражение под корнем не должно обращаться в ноль. То есть x и y должны удовлетворять неравенству $4 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 4$. Все точки $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, лежат в круге радиуса 2 с центром в начале координат (на рисунке 1.1.2. указанная область заштрихована).

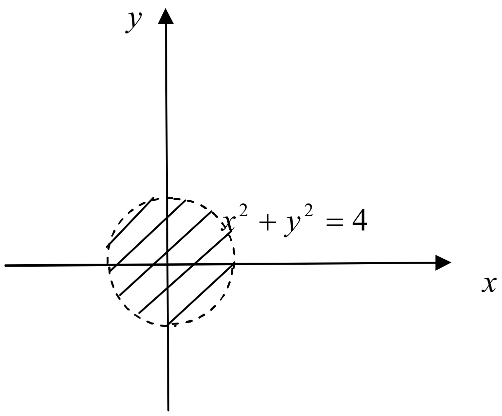

Рисунок 1.1.2. Графическое изображение области определения функции

Графическое изображение функции двух переменных: уравнение $Z = f(x, y)$ в пространстве определяет некоторую поверхность. Так, графиком функции двух переменных $Z = x^2 + y^2$ является эллиптический параболоид (рисунок 1.1.3).

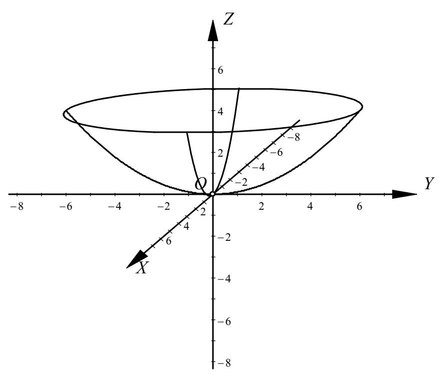

Рисунок 1.1.3 Эллиптический параболоид

<u>Определение 1.1.3.</u> Линией уровня функции двух переменных $Z = f(x, y)$ называется плоская кривая, получающаяся при пересечении графика этой функции плоскостью $Z = C$, параллельной координатной плоскости XOY (C – постоянная величина).

Обычно линии уровня, соответствующие различным значениям постоянной величины C, проецируются на одну плоскость, например, на координатную плоскость *XOY*. Таким образом, можно отметить, что линии уровня функции $Z = f(x, y)$ - это семейство непересекающихся кривых на плоскости *XOY*, описываемое уравнениями вида $f(x, y) = C$.

Пример 4. Найдите линии уровня функции $Z = x^2 + y^2 - 4x - 4y$.

Решение.

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = C,$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 4 - 4 = C,$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = C + 8.$$

Линии уровня данной функции – это семейство окружностей с центром в точке (2;2) и радиуса $r = \sqrt{C+8}$.

Определение 1.1.4. Множество $M(x, y)$ всех точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \langle \delta$, то есть которые удовлетворяют условию $\rho(M, M_0) \langle \delta$, называется δ - окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 1.1.5. Последовательность точек $\{M_n\}$ называется сходящейся к точке M_0, если для любого $\delta \rangle 0$, всегда найдётся номер *N*, такой что для всех номеров *n>N*, выполняется неравенство: $\rho(M_n, M_0) \langle \delta$. Точка M_0 называется пределом последовательности $\{M_n\}$: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$.

Рассмотрим функцию $Z = f(M)$, определённую на некотором множестве $\{M\}$ и точку M_0, принадлежащую или не принадлежащую множеству $\{M\}$, но обладающую свойством: в любой δ - окрестности этой точки содержится хотя бы одна точка множества $\{M\}$, отличная от точки M_0.

Определение 1.1.6. Число *A* называется пределом функции $Z = f(M)$ в точке M_0, если для любой сходящейся к M_0 последовательности точек $M_1, M_2, ...M_n$ $(M_n \neq M_0, M_n \in \{M\})$, соответствующая последовательность значений функции $f(M_1), f(M_2), ...f(M_n)$ сходится к *A*:

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A, \text{ или } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A.$$

1.2 Частное и полное приращения функции. Частные производные функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $Z = f(x, y)$. Пусть независимая переменная *x* получит приращение Δx, а переменная *y* пусть сохраняет постоянное значение. Тогда функция *Z* получит приращение, которое называют частным приращением функции *Z* по *x* и обозначают $\Delta_x Z$:

$$\Delta_x Z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично, если *x* сохраняет постоянное значение, а *y* получает приращение Δy, то *Z* получает приращение, называемое частным приращением функции Z по y и обозначают $\Delta_y Z$:

$$\Delta_y Z = f(x; y+\Delta y) - f(x; y).$$

Если аргументу x сообщить приращение Δx, а аргументу y – приращение Δy, получим для Z новое приращение ΔZ, называемое полным приращением функции Z:

$$\Delta Z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y).$$

<u>Определение 1.2.1.</u> Частной производной функции $Z = f(x, y)$ по x называется предел отношения частного приращения функции Z по x к приращению Δx, при $\Delta x \to 0$.

Частная производная по переменной x функции $Z = f(x, y)$ обозначается одним из символов: $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$, Z'_x, $f'_x(x, y)$.

Таким образом,

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = Z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x Z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}. \qquad (1.2.1)$$

Аналогично определяется частная производная по y функции $Z = f(x, y)$.

<u>Определение 1.2.2.</u> Частной производной функции $Z = f(x, y)$ по y называется предел отношения частного приращения функции Z по y к приращению Δy, при $\Delta y \to 0$:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = Z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y Z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}. \qquad (1.2.2)$$

Геометрическая интерпретация частных производных функции двух переменных: частная производная $\dfrac{\partial Z}{\partial y}$ в точке численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, полученной при пересечении поверхности $Z = f(x, y)$ плоскостью $x = const$. Аналогично, частная производная $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ в точке численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, полученной при пересечении поверхности $Z = f(x, y)$ плоскостью $y = const$.

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично.

Пример 5. Найдите частные производные $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial Z}{\partial y}$ функции $Z = y^2 \sin x$.

Решение. Для вычисления производной, воспользуемся правилом дифференцирования: $(cU)' = c \cdot U'$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \left(y^2 \sin x\right)'_x = y^2 (\sin x)'_x = y^2 \cos x; \frac{\partial Z}{\partial y} = \left(y^2 \sin x\right)'_y = \sin x (y^2)'_y = 2y \sin x.$$

Пример 6. Найдите частные производные $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ функции $Z=\frac{x^3-3y^2}{xy}$.

Решение. Для вычисления производной данной функции воспользуемся правилом дифференцирования: $\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\left(\frac{x^3-3y^2}{xy}\right)'_x=\frac{(x^3-3y^2)'_x xy-(x^3-3y^2)(xy)'_x}{(xy)^2}=\frac{3x^2xy-(x^3-3y^2)y}{(xy)^2}=$$

$$=\frac{2x^3y+3y^3}{(xy)^2};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\left(\frac{x^3-3y^2}{xy}\right)'_y=\frac{(x^3-3y^2)'_y xy-(x^3-3y^2)(xy)'_y}{(xy)^2}=\frac{-6yxy-(x^3-3y^2)x}{(xy)^2}=$$

$$=\frac{-3xy^2-x^4}{(xy)^2}.$$

Пример 7. Найдите частные производные $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ функции $Z=arctg\frac{2y}{x^2}$.

Решение.

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\left(arctg\frac{2y}{x^2}\right)'_x=\left[\begin{array}{l}\textit{Воспользуемся}\\ \textit{табличной}\\ \textit{производной}\\ (arctgU)'=\dfrac{U'}{1+U^2}\end{array}\right]=\frac{\left(\frac{2y}{x^2}\right)'_x}{1+\left(\frac{2y}{x^2}\right)^2}=\frac{2y(x^{-2})'_x}{1+\frac{4y^2}{x^4}}=$$

$$\frac{2y(-2)x^{-3}}{\frac{x^4+4y^2}{x^4}}=\frac{-4yx^{-3}x^4}{x^4+4y^2}=\frac{-4yx}{x^4+4y^2};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\left(arctg\frac{2y}{x^2}\right)'_y=\frac{\left(\frac{2y}{x^2}\right)'_y}{1+\left(\frac{2y}{x^2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{x^2}(2y)'_y}{1+\frac{4y^2}{x^4}}=\frac{\frac{1}{x^2}2}{\frac{x^4+4y^2}{x^4}}=$$

$$=\frac{2x^4}{x^2(x^4+4y^2)}=\frac{2x^2}{x^4+4y^2}.$$

Пример 8. Найдите частные производные $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ функции $Z = \sin^3(x-3y)$.

Решение.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \left(\sin^3(x-3y)\right)'_x = ((\sin(x-3y))^3)'_x = \begin{bmatrix} \textit{Воспользуемся} \\ \textit{табличной} \\ \textit{производной}: \\ (U^n)' = nU^{n-1}U' \end{bmatrix} =$$

$$3\sin^2(x-3y)\cdot(\sin(x-3y))'_x = \begin{bmatrix} \textit{Воспользуемся} \\ \textit{табличной} \\ \textit{производной} \\ (\sin U)' = \cos U \cdot U' \end{bmatrix} =$$

$$= 3\sin^2(x-3y)\cdot\cos(x-3y)\cdot(x-3y)'_x = 3\sin^2(x-3y)\cdot\cos(x-3y)$$

Теперь аналогичным образом, воспользовавшись теми же табличными производными, найдем $\frac{\partial Z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \left(\sin^3(x-3y)\right)'_y = ((\sin(x-3y))^3)'_y = 3(\sin(x-3y))^2(\sin(x-3y))'_y =$$

$$= 3\sin^2(x-3y)\cos(x-3y)\cdot(x-3y)'_y = 3\sin^2(x-3y)\cos(x-3y)\cdot(-3) =$$

$$= -9\sin^2(x-3y)\cos(x-3y).$$

Пример 9. Найдите частные производные $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ функции $Z = (x-4y)\ln(3y^2-2x)$.

Решение.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \left((x-4y)\ln(3y^2-2x)\right)'_x = \begin{bmatrix} \textit{Воспользуемся} \\ \textit{правилом} \\ \textit{дифференцирования}: \\ (UV)' = U'V + UV' \end{bmatrix} =$$

$$= (x-4y)'_x\ln(3y^2-2x) + (x-4y)(\ln(3y^2-2x))'_x = \left[(\ln U)' = \frac{U'}{U}\right] =$$

$$= \ln(3y^2-2x) + (x-4y)\frac{(3y^2-2x)'_x}{3y^2-2x} = \ln(3y^2-2x) + (x-4y)\frac{-2}{3y^2-2x} =$$

$$\ln(3y^2-2x) - \frac{2x-8y}{3y^2-2x}.$$

Аналогичным образом найдем $\frac{\partial Z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\left((x-4y)\ln(3y^2-2x)\right)'_y=$$

$$(x-4y)'_y\ln(3y^2-2x)+(x-4y)(\ln(3y^2-2x))'_y=$$

$$=-4\ln(3y^2-2x)+(x-4y)\frac{(3y^2-2x)'_y}{3y^2-2x}=$$

$$-4\ln(3y^2-2x)+(x-4y)\frac{6y}{3y^2-2x}=-4\ln(3y^2-2x)+\frac{6xy-24y^2}{3y^2-2x}.$$

Пример 10. Докажите справедливость следующего равенства:

$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{Z}{y^2}$, если дана функция вида: $Z=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$.

Решение. Для того, чтобы доказать справедливость равенства, необходимо найти $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=Z'_x=(\frac{y}{(x^2+y^2)^5})'_x=\frac{(y)'_x(x^2+y^2)^5-y((x^2-y^2)^5)'_x}{((x^2-y^2)^5)^2}=$$

$$=\frac{-y\cdot 5(x^2-y^2)^4\cdot(x^2-y^2)'_x}{(x^2-y^2)^{10}}=\frac{-10xy(x^2-y^2)^4}{(x^2-y^2)^{10}};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=Z'_y=(\frac{y}{(x^2+y^2)^5})'_y=\frac{(y)'_y(x^2+y^2)^5-y((x^2-y^2)^5)'_y}{((x^2-y^2)^5)^2}=$$

$$=\frac{(x^2-y^2)^5-y\cdot 5(x^2-y^2)^4(x^2-y^2)'_y}{(x^2-y^2)^{10}}=\frac{(x^2-y^2)^5+10y^2(x^2-y^2)^4}{(x^2-y^2)^{10}}.$$

Подставим найденные производные в данное равенство и убедимся в его правильности:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{-10xy(x^2-y^2)^4}{(x^2-y^2)^{10}}+\frac{1}{y}\cdot\frac{(x^2-y^2)^5+10y^2(x^2-y^2)^4}{(x^2-y^2)^{10}}=$$

$$=\frac{-10y(x^2-y^2)^4}{(x^2-y^2)^{10}}+\frac{(x^2-y^2)^5+10y^2(x^2-y^2)^4}{y\cdot(x^2-y^2)^{10}}=$$

$$=\frac{-10y^2(x^2-y^2)^4+(x^2-y^2)^5+10y^2(x^2-y^2)^4}{y(x^2-y^2)^{10}}=\frac{(x^2-y^2)^5}{y(x^2-y^2)^{10}}=$$

$$\frac{1}{y(x^2-y^2)^5}=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y}{(x^2-y^2)^5}=\frac{1}{y^2}\cdot Z=\frac{Z}{y^2},$$

что и требовалось продемонстрировать.

1.3 Дифференциал функции

Рассмотрим полное приращение функции $Z = f(x, y)$:

$$\Delta Z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Определение 1.3.1. Функция $Z = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке *M*, если её полное приращение в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta Z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \qquad (1.3.1)$$

где *A, B* - независящие от $\Delta x, \Delta y$ значения, а $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y)$ - бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Сформулируем необходимые условия дифференцируемости функции в точке:

1) Если функция $Z = f(x, y)$ дифференцируема в точке *M*, то она является непрерывной в этой точке;
2) Если функция $Z = f(x, y)$ дифференцируема в точке *M*, то она имеет в этой точке частные производные Z'_x и Z'_y, причем $A = Z'_x$, $B = Z'_y$.

Определение 1.3.2. Дифференциалом dZ дифференцируемой в точке *M* функции $Z = f(x, y)$ называется линейная относительно приращений $\Delta x, \Delta y$ часть полного приращения этой функции в точке, то есть

$$dZ = A\Delta x + B\Delta y.$$

Учитывая, что $A = Z'_x$, $B = Z'_y$ и тот факт, что дифференциалами независимых переменных *x* и *y* называют приращения этих переменных, то есть $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, дифференциал функции можно переписать в виде:

$$dZ = Z'_x dx + Z'_y dy. \qquad (1.3.2)$$

Пример 11. Найдите полный дифференциал функции: $Z = xy^2 + \dfrac{\sin x}{1-2y}$ в точке *M(0;2)***.**

Решение. Имеем функцию двух переменных $Z = f(x, y)$. Полный дифференциал можно отыскать по формуле (1.3.2). Для этого необходимо отыскать частные производные функции и найти их значения в точке *M*.

$$Z'_x = (xy^2 + \frac{\sin x}{1-2y})'_x = (xy^2)'_x + (\frac{\sin x}{1-2y})'_x = y^2(x)'_x + \frac{1}{1-2y}(\sin x)'_x =$$

$$= y^2 + \frac{1}{1-2y}\cdot\cos x = y^2 + \frac{\cos x}{1-2y};$$

$$Z'_x(M) = 4 + \frac{1}{-1}\cos 0 = 4 - 1 = 3.$$

$$Z'_y = (xy^2 + \frac{\sin x}{1-2y})'_y = (xy^2)'_y + (\frac{\sin x}{1-2y})'_y = x(y^2)'_y + \sin x(\frac{1}{1-2y})'_y =$$

$$= 2xy + \frac{1'_y(1-2y) - 1(1-2y)'_y}{(1-2y)^2}\sin x = 2xy + \frac{2}{(1-2y)^2}\sin x = 2xy + \frac{2\sin x}{(1-2y)^2}$$

$$Z'_y(M) = 0 + \frac{2}{(-1)^2}\sin 0 = 0.$$

Таким образом, полный дифференциал функции будет равен:

$$dZ = 3dx + 0dy = 3dx.$$

Пример 12. Найдите полный дифференциал функции $Z = \frac{8x^2 y}{\sqrt{2x-3y}}$.

Решение. Имеем функцию двух переменных $Z = f(x, y)$. Полный дифференциал можно отыскать по формуле (1.3.2). Для этого необходимо отыскать частные производные функции.

$$Z'_x = \left(\frac{8x^2 y}{\sqrt{2x-3y}}\right)'_x = \frac{(8x^2 y)'_x \sqrt{2x-3y} - 8x^2 y(\sqrt{2x-3y})'_x}{(\sqrt{2x-3y})^2} =$$

$$= \frac{16xy\sqrt{2x-3y} - 8x^2 y \frac{1}{2}(2x-3y)^{-\frac{1}{2}}(2x-3y)'_x}{2x-3y} =$$

$$= \frac{16xy\sqrt{2x-3y} - 8x^2 y(2x-3y)^{-\frac{1}{2}}}{2x-3y}.$$

Если упростить, то в результате получим:

$$Z'_x = \frac{16xy(2x-3y) - 8x^2 y}{(2x-3y)\sqrt{2x-3y}} = \frac{24x^2 y - 48xy^2}{(2x-3y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Z'_y = \left(\frac{8x^2 y}{\sqrt{2x-3y}}\right)'_y = \frac{(8x^2 y)'_y \sqrt{2x-3y} - 8x^2 y(\sqrt{2x-3y})'_y}{(\sqrt{2x-3y})^2} =$$

$$= \frac{8x^2\sqrt{2x-3y} - 8x^2 y \frac{1}{2}(2x-3y)^{-\frac{1}{2}}(2x-3y)'_y}{2x-3y} =$$

$$= \frac{8x^2\sqrt{2x-3y} + 12x^2 y(2x-3y)^{-\frac{1}{2}}}{2x-3y}.$$

Упростив, получим: $Z'_y = \frac{8x^2(2x-3y) + 12x^2 y}{(2x-3y)\sqrt{2x-3y}} = \frac{16x^3 - 12x^2 y}{(2x-3y)^{\frac{3}{2}}}$

Таким образом, полный дифференциал функции будет равен:

$$dZ = \frac{24x^2y - 48xy^2}{(2x-3y)^{\frac{3}{2}}}dx + \frac{16x^3 - 12x^2y}{(2x-3y)^{\frac{3}{2}}}dy.$$

1.4 Производная сложной функции. Полная производная

Рассмотрим функцию

$$Z = f(U,V), \tag{1.4.1}$$

где U и V являются функциями независимых переменных x и y:

$$U = \varphi(x,y),\ V = \psi(x,y). \tag{1.4.2}$$

В этом случае Z – есть сложная функция от аргументов x и y.

Конечно, Z можно выразить и непосредственно через x и y *(равенство* (1.4.3)), но это не всегда рационально:

$$Z = f(\varphi(x,y);\psi(x,y)). \tag{1.4.3}$$

Пусть функции $f(U,V)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Вычислим производные $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$, исходя из уравнений (1.4.1) и (1.4.2), и не пользуясь уравнением (1.4.3).

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}; \tag{1.4.4}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial U}\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}. \tag{1.4.5}$$

Для случая функции большего числа переменных формулы (1.4.4) и (1.4.5) обобщаются.

Рассмотрим теперь функцию $Z = f(U,V)$, где U и V в свою очередь зависят от одного аргумента x: $U = \varphi(x)$, $V = \psi(x)$. По сути, функция Z является функцией только одного переменного x. В этом случае можно найти производную $\frac{dZ}{dx}$. Её можно получить из формулы (1.4.4).

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial Z}{\partial U}\cdot\frac{dU}{dx} + \frac{\partial Z}{\partial V}\cdot\frac{dV}{dx}. \tag{1.4.6}$$

Эта равенство носит название *формулы полной производной* $\frac{dZ}{dx}$.

Если функция $Z = f(x, y)$ является функцией двух переменных x и y, которые в свою очередь также являются функциями одной переменной t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, то формула полной производной $\frac{dZ}{dt}$ примет вид:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (1.4.7)$$

Пример 13. Найдите производные $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ функции $Z = \ln(U^2 + V^3)$, если $U = e^{x-2y}$, $V = x^2 - 2y^3$.

Решение. Для отыскания производных $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ воспользуемся формулами (1.4.4) и (1.4.5):

Найдем все компоненты, входящие в эти формулы.

$$\frac{\partial Z}{\partial U} = \left(\ln(U^2 + V^3)\right)'_U = \begin{bmatrix} \textit{Воспользуемся} \\ \textit{табличной} \\ \textit{производной} \\ (\ln U)' = \dfrac{U'}{U} \end{bmatrix} = \frac{(U^2 + V^3)'_U}{U^2 + V^3} = \frac{2U}{U^2 + V^3};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial V} = \left(\ln(U^2 + V^3)\right)'_V = \frac{(U^2 + V^3)'_V}{U^2 + V^3} = \frac{3V^2}{U^2 + V^3};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(e^{x-2y}\right)'_x = \begin{bmatrix} \textit{Воспользуемся} \\ \textit{табличной} \\ \textit{производной} \\ (e^U)' = e^U \cdot U' \end{bmatrix} = e^{x-2y} \cdot (x - 2y)'_x = e^{x-2y};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(e^{x-2y}\right)'_y = e^{x-2y} \cdot (x - 2y)'_y = e^{x-2y} \cdot (-2) = -2 \cdot e^{x-2y};$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(x^2 - 2y^3\right)'_x = 2x;$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \left(x^2 - 2y^3\right)'_y = -6y^2.$$

Подставим найденные производные в формулы (1.4.4) и (1.4.5):

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{2U}{U^2 + V^3} \cdot e^{x-2y} + \frac{3V^2}{U^2 + V^3} \cdot 2x;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{2U}{U^2+V^3}\cdot(-2)e^{x-2y}+\frac{3V^2}{U^2+V^3}\cdot(-6y^2).$$

Можно вернуться к переменным x и y, подставив значения $U=e^{x-2y}$ и $V=x^2-2y^3$ в полученные равенства для $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$, или оставить равенства в том виде, что получили.

Пример 14. Найдите производные $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ функции $Z=arctg(U-3V)$, если $U=\cos(x+y^2)$, $V=\sqrt[3]{x-2y^3}$.

Решение. Для отыскания производных $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ воспользуемся формулами (1.4.4) и (1.4.5):

Найдем все компоненты, входящие в эти формулы.

$$\frac{\partial Z}{\partial U}=\left(arctg(U-3V)\right)_U'=\begin{bmatrix}\textit{Воспользуемся}\\ \textit{табличной}\\ \textit{производной}\\ (arctgU)_u'=\frac{U'}{1+U^2}\end{bmatrix}=\frac{(U-3V)_U'}{1+(U-3V)^2}=\frac{1}{1+(U-3V)^2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial V}=\left(arctg(U-3V)\right)_V'=\frac{(U-3V)_V'}{1+(U-3V)^2}=\frac{-3}{1+(U-3V)^2};$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\left(\cos(x+y^2)\right)_x'=\begin{bmatrix}\textit{Воспользуемся}\\ \textit{табличной}\\ \textit{производной}\\ (\cos U)'=-\sin U\cdot U'\end{bmatrix}=-\sin(x+y^2)\cdot(x+y^2)_x'=$$

$$=-\sin(x+y^2);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\left(\cos(x+y^2)\right)_y'=-\sin(x+y^2)\cdot(x+y^2)_y'=-2y\cdot\sin(x+y^2);$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\left((x-2y^3)^{\frac{1}{3}}\right)_x'=\begin{bmatrix}\textit{Воспользуемся}\\ \textit{табличной}\\ \textit{производной}\\ (U^n)'=n\cdot U^{n-1}\cdot U'\end{bmatrix}=\frac{1}{3}(x-2y^3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x-2y^3)_x'=$$

$$=\frac{1}{3}(x-2y^3)^{-\frac{2}{3}};$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\left((x-2y^3)^{\frac{1}{3}}\right)'_y=\frac{1}{3}(x-2y^3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x-2y^3)'_y=\frac{1}{3}(x-2y^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-6y^2).$$

Подставим найденные производные в формулы (1.4.4) и (1.4.5):

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{1}{1+(U-3V)^2}\cdot(-\sin(x+y^2))+\frac{-3}{1+(U-3V)}\cdot\frac{1}{3}(x-2y^3)^{-\frac{2}{3}}.$$

Упростив, получим: $\dfrac{\partial Z}{\partial x}=-\dfrac{\sin(x+y^2)}{1+(U-3V)^2}-\dfrac{1}{(1+U-3V)\cdot(x-2y^3)^{\frac{2}{3}}}$.

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{1}{1+(U-3V)^2}\cdot(-2y\cdot\sin(x+y^2))+\frac{-3}{1+(U-3V)}\cdot\frac{1}{3}(x-2y^3)^{-\frac{2}{3}}(-6y^2).$$

Упростив, получим:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=-\frac{2y\cdot\sin(x+y^2)}{1+(U-3V)^2}+\frac{6y^2}{(1+U-3V)\cdot(x-2y^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Пример 15. Найдите производные функции $Z=V\cdot U^2$, если $U=\arcsin 2x$, $V=\sin x$.

Решение. По сути, функция *Z* является функцией только одного переменного *x*. В этом случае можно найти производную $\dfrac{dZ}{dx}$ по формуле (1.4.6).

Найдем все компоненты, входящие в эту формулу.

$$\frac{\partial Z}{\partial U}=\left(V\cdot U^2\right)'_U=V\cdot 2U;\ \frac{\partial Z}{\partial V}=(V\cdot U^2)'_V=U^2;$$

$$\frac{dU}{dx}=(\arcsin 2x)'_x=\begin{bmatrix}\text{\textit{Воспользуемся}}\\ \text{\textit{табличным}}\\ \text{\textit{интегралом}}\\ (\arcsin U)'=\dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}}\end{bmatrix}=\frac{(2x)'}{\sqrt{1-(2x)^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}};$$

$$\frac{dV}{dx}=(\sin x)'=\cos x.$$

Подставим найденные производные в формулу (1.4.6):

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{4UV}{\sqrt{1-4x^2}}+U^2\cdot\cos x.$$

1.5 Производная функции по направлению вектора

Рассмотрим заданную в области *D* функцию $Z=f(x,y)$ и точку *M(x,y)*. Проведём из точки *M* вектор $\bar{a}(a_1,a_2)$, направляющие косинусы которого известны:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}}, \ \cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}}. \qquad (1.5.1)$$

На векторе $\bar{a}$ на расстоянии Δa от его начала, рассмотрим точку $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y)$. Тогда $\Delta a = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Будем предполагать, что функция $Z = f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по своим аргументам в области *D*.

Полное приращение функции можно представить с использованием формулы (1.3.1).

$$\Delta Z = \frac{\partial Z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial Z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \qquad (1.5.2)$$

где $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y)$ - бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то есть при $\Delta a \to 0$.

Поделим обе части равенства (1.5.2) на Δa:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta a} = \frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta a} + \frac{\partial Z}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta a} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta a} + \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta a}. \qquad (1.5.3)$$

В получившемся равенстве $\frac{\Delta x}{\Delta a} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta a} = \cos\beta$.

Тогда равенство (1.5.3) можно переписать в виде:

$$\frac{\Delta Z}{\Delta a} = \frac{\partial Z}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial Z}{\Delta y}\cdot\cos\beta + \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\cos\alpha + \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot\cos\beta. \qquad (1.5.4)$$

<u>Определение 1.5.1.</u> Предел отношения $\frac{\Delta Z}{\Delta a}$ при $\Delta a \to 0$ называется производной от функции $Z = f(x, y)$ в точке *M(x,y)* по направлению вектора $\bar{a}$ и обозначается $\frac{\partial Z}{\partial a}$, то есть $\frac{\partial Z}{\partial a} = \lim\limits_{\Delta a \to 0}\frac{\Delta Z}{\Delta a}$.

Переходя к пределу в равенстве (1.5.4), получим $\frac{\partial Z}{\partial a} = \frac{\partial Z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos\beta$.

Таким образом, производная функции $Z = f(x, y)$ в точке *M* по направлению вектора $\bar{a}$ есть число, определяемое равенством:

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = \frac{\partial Z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial Z}{\partial y}\cos\beta, \qquad (1.5.5)$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ определяются по формулам (1.5.1).

1.6 Градиент функции

В каждой точке области *D*, в которой задана функция $Z = f(x,y)$, определим вектор, проекциями которого на оси координат являются значения частных производных $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ этой функции в соответствующей точке.

Определение 1.6.1. Градиентом функции $Z = f(x,y)$ в точке *M* называется вектор, координаты которого равны частным производным $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$ в этой точке:

$$gradZ = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \bar{j} \ . \qquad (1.6.1.)$$

Если в некоторой области *D* задана функция $Z = f(x,y)$, то говорят, что в этой области определено *векторное поле градиентов*.

Градиент функции характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания функции $Z = f(x,y)$ *в точке.*

Установим ***связь между производной по направлению вектора и градиентом***: 1) производная $\frac{\partial Z}{\partial a}$ по направлению некоторого вектора $\bar{a}$ равна проекции вектора $gradZ$ на вектор $\bar{a}$;

2) производная в данной точке по направлению вектора $\bar{a}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\bar{a}$ совпадает с направлением $gradZ$; это наибольшее значение производной равно $|gradZ|$.

Пример 16. Даны функция $Z = y \cdot \cos^2 x$, точка $M_0(\pi, 1)$, вектор $\bar{a}(-2;3)$. Найдите: a) $gradZ(x,y)$ и его значение в точке M_0;

b) производную функции по направлению вектора $\bar{a}$ в точке M_0.

Решение. а) Найдем $gradZ(x,y)$. Для этого согласно формуле (1.6.1) необходимо отыскать частные производные $\frac{\partial Z}{\partial x} = Z'_x$ и $\frac{\partial Z}{\partial y} = Z'_y$.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = (y \cdot \cos^2 x)'_x = y \cdot 2\cos x \cdot (\cos x)'_x = 2y\cos x \cdot (-\sin x) = -2y\cos x \sin x$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = (y\cos^2 x)'_y = \cos^2 x (y)'_y = \cos^2 x.$$

Градиент данной функции в произвольной точке будет равен:

$$gradZ = -2y\cos x \sin x \cdot \bar{i} + \cos^2 x \cdot \bar{j}.$$

Найдём градиент функции в точке M_0.

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(M_0) = -2 \cdot 1 \cdot \cos\pi \cdot \sin\pi = 0; \frac{\partial Z}{\partial y}(M_0) = \cos^2 \pi = 1.$$

Следовательно,

$$gradZ = 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} = \bar{j}.$$

b) Отыщем производную по направлению вектора $\bar{a}$ в точке M_0. Согласно равенству (1.5.5), для этого необходимо отыскать частные производные в точке, что было уже нами проделано: $\frac{\partial Z}{\partial x}(M_0) = 0$, $\frac{\partial Z}{\partial y}(M_0) = 1$. Необходимо отыскать направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ по формулам (1.5.1).

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{13}};$$

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Подставим все найденные значения в формулу (1.5.5):

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = \frac{-2}{\sqrt{13}} \cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot 1 = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

1.7 Частные производные различных порядков

Рассмотрим функцию двух переменных: $Z = f(x, y)$. Частные производные $\frac{\partial Z}{\partial x} = Z'_x$ и $\frac{\partial Z}{\partial y} = Z'_y$ являются функциями переменных x и y. Поэтому от них снова можно находить частные производные. Частных производных второго порядка от функции двух переменных - четыре, так как каждую из функций $\frac{\partial Z}{\partial x}$ и $\frac{\partial Z}{\partial y}$ можно дифференцировать как по переменной x, так и по y.

Обозначение вторых производных:

$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = Z''_{xx}$ - функция дифференцируется последовательно два раза по x;

$\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = Z''_{yy}$ - функция дифференцируется последовательно два раза по y;

$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = Z''_{xy}$ - функция сначала дифференцируется по переменной x, а затем результат дифференцируется по y;

$\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = Z''_{yx}$ - функция сначала дифференцируется по переменной y, а затем результат по переменной x.

Частные производные Z''_{xy} и Z''_{yx} называются смешанными частными производными.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по переменной x, так и по переменной y. Получим частные производные третьего порядка, их будет уже восемь: $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial x^3}$; $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y}$; $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial x}$; $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y^2}$; $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial y \partial x^2}$; $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial y \partial x \partial y}$; $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial x}$; $\dfrac{\partial^3 Z}{\partial y^3}$.

Для функции любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично.

Пример 17. Найдите частные производные второго порядка функции $Z = y^2 e^{x+2y}$.

Решение. Для того, чтобы отыскать вторые производные функции, необходимо отыскать производные первого порядка:

$$Z'_x = (y^2 \cdot e^{x+2y})'_x = y^2 (e^{x+2y})'_x = y^2 \cdot e^{x+2y} \cdot (x+2y)'_x = y^2 e^{x+2y};$$

$$Z'_y = (y^2 e^{x+2y})'_y = (y^2)'_y \cdot e^{x+2y} + y^2 \cdot (e^{x+2y})'_y = 2ye^{x+2y} + y^2 e^{x+2y}(x+2y)'_y =$$
$$= 2ye^{x+2y} + 2y^2 e^{x+2y}.$$

Отыщем теперь производные второго порядка для предложенной функции:

$$Z''_{xx} = (Z'_x)'_x = (y^2 e^{x+2y})'_x = y^2 (e^{x+2y})'_x = y^2 e^{x+2y}(x+2y)'_x = y^2 e^{x+2y}$$

$$Z''_{xy} = (Z'_x)'_y = (y^2 e^{x+2y})'_y = (y^2)'_y \cdot e^{x+2y} + y^2 \cdot (e^{x+2y})'_y = 2ye^{x+2y} + y^2 e^{x+2y}(x+2y)'_y =$$
$$= 2ye^{x+2y} + 2y^2 e^{x+2y};$$

$$Z''_{yx} = (Z'_y)'_x = (2ye^{x+2y} + 2y^2 e^{x+2y})'_x = (2ye^{x+2y})'_x + (2y^2 e^{x+2y})'_x =$$
$$= 2y(e^{x+2y})'_x + 2y^2 (e^{x+2y})'_x = 2ye^{x+2y}(x+2y)'_x + 2y^2 e^{x+2y}(x+2y)'_x =$$
$$= 2ye^{x+2y} + 2y^2 e^{x+2y};$$

$$Z''_{yy} = (Z'_y)'_y = (2ye^{x+2y} + 2y^2 e^{x+2y})'_y = (2ye^{x+2y})'_y + (2y^2 e^{x+2y})'_y =$$
$$= (2y)'_y e^{x+2y} + 2y(e^{x+2y})'_y + (2y^2)'_y e^{x+2y} + 2y^2 (e^{x+2y})'_y =$$
$$= 2e^{x+2y} + 4ye^{x+2y} + 4ye^{x+2y} + 4y^2 e^{x+2y}.$$

Нетрудно убедиться по полученным результатам, что $Z''_{xy} = Z''_{yx} = 2ye^{x+2y} + 2y^2 e^{x+2y}$.

Таким образом, смешанные производные функции двух переменных равны между собой, то есть будут тождественно равны производные: $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$.

<u>Теорема 1.7.1</u>**:** Если функция $Z = f(x,y)$ и её частные производные $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ определены и непрерывны в точке *M(x,y)* и в некоторой её окрестности, то в этой точке справедливо равенство:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}. \qquad (1.7.1)$$

1.8 Дифференциалы высших порядков

Полный дифференциал любого порядка – это полный дифференциал от полного дифференциала предыдущего порядка. При этом, при последующих дифференцированиях, нужно дифференциалы независимых переменных dx и dy рассматривать как постоянные величины.

Рассмотрим функцию $Z = f(x, y)$. Дифференциал этой функции определяется равенством (1.3.2):

$$dZ = Z'_x dx + Z'_y dy.$$

Найдем дифференциал второго порядка: d^2Z:

$$d^2Z = d(dZ) = (Z'_x dx + Z'_y dy)'_x dx + (Z'_x dx + Z'_y dy)'_y dy =$$
$$= Z''_{xx} dx^2 + Z''_{yx} dydx + Z''_{xy} dxdy + Z''_{yy} dy^2 =$$
$$= Z''_{xx} dx^2 + 2Z''_{xy} dxdy + Z''_{yy} dy^2.$$

Таким образом, получили, что

$$d^2Z = Z''_{xx} dx^2 + 2Z''_{xy} dxdy + Z''_{yy} dy^2 . \qquad (1.8.1)$$

При получении формулы (1.8.1) была использована формула (1.7.1).

Аналогичным образом, можно показать справедливость следующего равенства:

$$d^3Z = Z'''_{xxx} dx^3 + 3Z'''_{xxy} dx^2 dy + 3Z'''_{xyy} dxdy^2 + Z'''_{yyy} dy^3 . \qquad (1.8.2)$$

Как и при получении формулы (1.8.1), можно отметить, что вычисления идут по той же схеме, как если последовательно раскрыть скобки в выражениях: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ и т.д. Этот результат можно записать в виде символической формулы: $d^nZ = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y})^n Z$, где в правой части надо раскрыть скобки так, как если бы ∂, $\partial x, \partial y$, dx и dy были обычными алгебраическими множителями.

Подобным образом, если функция, например, трех переменных $U = f(x, y, z)$, то $d^nU = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z})^n U$.

Пример 18. Дана функция $Z = x^2 y + e^{x-2y}$. Найдите дифференциал второго порядка d^2Z.

Решение. Для отыскания дифференциала второго порядка воспользуемся формулой (1.8.1). Необходимо найти частные производные второго порядка для данной функции.

$$Z'_x = (x^2 y + e^{x-2y})'_x = 2xy + e^{x-2y};$$
$$Z'_y = (x^2 y + e^{x-2y})'_y = x^2 - 2e^{x-2y};$$

$$Z''_{xx} = (2xy + e^{x-2y})'_x = 2y + e^{x-2y};$$
$$Z''_{xy} = (2xy + e^{x-2y})'_y = 2x - 2e^{x-2y};$$
$$Z''_{yy} = (x^2 - 2e^{x-2y})'_y = 4e^{x-2y}.$$

Подставим найденные производные в формулу дифференциала второго порядка:

$$d^2Z = (2y + e^{x-2y})dx^2 + 2(2x - 2e^{x-2y})dxdy + 4e^{x-2y}dy^2.$$

1.9 Максимум и минимум функции нескольких переменных

Определение 1.9.1. Функция $Z = f(x,y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, если для всех точек $M(x,y)$, достаточно близких к точке $M_0(x_0,y_0)$ и отличных от неё выполняется: $f(x_0,y_0) > f(x,y)$.

Определение 1.9.2. Функция $Z = f(x,y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, если для всех точек $M(x,y)$, достаточно близких к точке $M_0(x_0,y_0)$ и отличных от неё выполняется: $f(x_0,y_0) < f(x,y)$.

Теорема 1.9.1: (Необходимые условия экстремума):

Если функция $Z = f(x,y)$ достигает экстремума при $x = x_0, y = y_0$, то каждая частная производная первого порядка от функции $Z = f(x,y)$ или обращается в ноль при этих значениях, или не существует.

Определение 1.9.3. Внутренние точки области определения функции, в которых $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ (или не существует) и $\frac{\partial Z}{\partial y} = 0$ (или не существует), называются критическими или стационарными точками функции $Z = f(x,y)$.

Таким образом, из теоремы (1.9.1) следует, что если функция достигает экстремума в какой-либо точке, то это может случиться только в критической точке.

Теорема 1.9.2: (Достаточные условия экстремума функции двух переменных): Пусть в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, функция $Z = f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно. Пусть, кроме того, точка $M_0(x_0,y_0)$ является критической точкой функции $Z = f(x,y)$, а $A = \frac{\partial^2 Z(x_0,y_0)}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 Z(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \frac{\partial^2 Z(x_0,y_0)}{\partial y^2}$.

Тогда, при $x = x_0, y = y_0$:

1) функция $Z = f(x,y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0,y_0)$ если $AC - B^2 > 0$, $A < 0$;

2) функция $Z = f(x,y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0,y_0)$, если $AC - B^2 > 0$, $A > 0$;

3) функция $Z = f(x,y)$ не имеет ни максимума, ни минимума в точке $M_0(x_0,y_0)$, если $AC - B^2 < 0$;

4) если $AC - B^2 = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть в точке $M_0(x_0, y_0)$ (в этом случае требуется дальнейшее исследование).

Пример 19. Исследовать на максимум и минимум функцию: $Z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Решение. Найдем частные производные 1-го порядка:

$$Z'_x = (2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2)'_x = 6x^2 - y^2 + 10x;$$

$$Z'_y = (2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2)'_y = -2xy + 2y.$$

Составим систему уравнений и решим её: $\begin{cases} 6x^2 - y^2 + 10x = 0 \\ -2xy + 2y = 0 \end{cases}$

Решая второе уравнение системы, получим: $y \cdot (1 - x) = 0$ или $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Подставляя значение $y = 0$ в первое уравнение системы, найдем две критические точки $M_1(0;0)$ и $M_2(-\frac{5}{3};0)$. Подставляя в первое уравнение системы значение $x = 1$, найдем еще две критические точки $M_3(1;4)$, $M_4(1;-4)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$Z''_{xx} = (6x^2 - y^2 + 10x)'_x = 12x + 10; \; Z''_{xy} = (6x^2 - y^2 + 10x)'_y = -2y;$$

$$Z''_{yy} = (-2xy + 2y)'_y = -2x + 2.$$

Составим дискриминант $D = AC - B^2$ для каждой найденной критической точки.

Для точки $M_1(0;0)$:

$A = Z''_{xx}(M_1) = 10$, $B = Z''_{xy}(M_1) = 0$, $C = Z''_{yy}(M_1) = 2$, $D = 20 - 0 = 20 > 0$ и $A > 0$, следовательно, в точке M_1 функция имеет минимум, равный

$$Z_{\min} = Z(0;0) = 0.$$

Для точки $M_2(-\frac{5}{3};0)$:

$A = Z''_{xx}(M_2) = -10$, $B = Z''_{xy}(M_2) = 0$, $C = Z''_{yy}(M_2) = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}$,

$D = \frac{-160}{3} - 0 = -\frac{160}{3} < 0$, следовательно, экстремума в точке M_2 нет.

Для точки $M_3(1;4)$:

$A = Z''_{xx}(M_3) = 22$, $B = Z''_{xy}(M_3) = -8$, $C = Z''_{yy}(M_3) = 0$,

$D = 0 - (-8)^2 = -64 < 0$, следовательно, экстремума в точке M_3 нет.

Для точки $M_4(1;-4)$:

$A = Z''_{xx}(M_4) = 22$, $B = Z''_{xy}(M_4) = 8$, $C = Z''_{yy}(M_4) = 0$, $D = 0 - (8)^2 = -64 < 0$, следовательно, экстремума в точке M_4 нет.

Таким образом, функция $Z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$ имеет минимум $Z_{\min} = Z(0;0) = 0$.

1.10 Задачи для самостоятельного решения по первой главе

1.10.1 Найдите область определения функции $Z = \ln(2x + y)$.

1.10.2 Найдите область определения функции $Z = \sqrt{y} + 3x$.

1.10.3 Найдите область определения функции $Z = \dfrac{4xy}{x^2 + y^2}$.

1.10.4 Постройте линии уровня следующих функций: a) $Z = xy$;

b) $Z = x^2 + y^2$;

c) $Z = x^2 y + y$.

1.10.5 Найдите частные производные функций: a) $Z = 2x^3 - 4xy + 3y + 5$;

b) $Z = e^{x^2 - y^2} \cdot (2x - y)$;

c) $Z = \sin(3x - y^2) \cdot 2x$;

d) $Z = \dfrac{x - 2y}{x^2 + y^2}$;

e) $Z = arctg(8x + 3y)\ln x$;

f) $Z = \dfrac{\arcsin(x+1)}{x - y}$;

g) $Z = \ln(x^2 - 3y) \cdot \cos 3y$.

1.10.6 Найдите дифференциалы функций: a) $Z = 8tg(3x - 4y)$;

b) $Z = (x + 5y)^4 \arccos(2x - y)$;

c) $Z = \dfrac{2x - y^3}{xy - 3}$.

1.10.7 Найдите производные $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial Z}{\partial y}$ функции $Z = 3U^2 - 5V$, где $U = 5x - \cos y$, $V = 3y - \sin x$.

1.10.8 Найдите производные $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial Z}{\partial y}$ функции $Z = \dfrac{3UV}{U^2 - V^2}$, где $U = \ln(x + 7y)$, $V = arctg(x - 7y)$.

1.10.9 Найдите полную производную $\dfrac{dZ}{dt}$ функции $Z = \ln(x^2 - y^3 + 5)$, где $x = 3t^2 - 1$, $y = \sqrt[4]{2t + 1}$.

1.10.10 Дана функция $Z = \dfrac{2xy}{x - y}$. Определите производную $\dfrac{\partial Z}{\partial a}$ функции по направлению вектора $\overline{a}(-3;4)$ в точке $M_0(1;1)$.

1.10.11 Дана функция $Z = arctg(3x - 5y)$. Определите производную $\dfrac{\partial Z}{\partial a}$ функции по направлению вектора $\overline{a}(1;-2)$ в точке $M_0(0;1)$.

1.10.12 Дана функция $Z = (x^2 - 3y^2) \cdot \cos xy$. Определите градиент функции в точке $M_0(0;-\pi)$.

1.10.13 Дана функция $Z = e^{\frac{2x}{1-y}}$. Определите градиент функции в точке $M_0(0;0)$.

1.10.14 Найдите частные производные второго порядка Z''_{xx}, Z''_{yy} и Z''_{xy} для следующих функций: a) $Z = 3e^{x^2+y^2}$;

b) $Z = arcctg(3x + y)$;

c) $Z = (x^3 - 3y)\sin 3y$.

1.10.15 Найдите дифференциал второго порядка d^2Z для функции $Z = \dfrac{\cos 5x}{1-y}$.

1.10.16 Найдите экстремумы функции: $Z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$.

1.10.17 Найдите экстремумы функции $Z = 2xy - 4x - 2y$.

ГЛАВА II ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1 Двойной интеграл

Рассмотрим в плоскости *XOY* замкнутую область *D,* ограниченную линией *L.* Пусть в области *D* задана непрерывная функция $Z = f(x, y)$. Разобьём область *D* какими-нибудь линиями на n частей (площадок), не имеющих общих внутренних точек $\Delta_1, \Delta_2, ... \Delta_n$ и площадь каждой из которых обозначим Δs_1, Δs_2, Δs_3, $\ldots \Delta s_n$. В каждой из площадок Δ_i (внутри или на границе – не важно) возьмём точку P_i, тогда получим *n*-точек: P_1, P_2, $P_3, \ldots . P_n$. Обозначим через $f(P_1)$, $f(P_2)$, $f(P_3), \ldots f(P_n)$ значения функции в выбранных точках и составим сумму произведений вида $f(P_i) \cdot \Delta s_i$:

$$V_n = f(P_1)\Delta s_1 + f(P_2)\Delta s_2 + f(P_3)\Delta s_3 + ... + f(P_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i . \quad (2.1.1)$$

Эта сумма называется **интегральной суммой** для функции $Z = f(x, y)$ в области *D*.

Если функция $Z = f(x, y)$ неотрицательна в области *D*, то каждое слагаемое $f(P_i) \cdot \Delta s_i$ можно представлять геометрически как объем малого цилиндра, основание которого есть площадка с площадью Δs_i, а высота $f(P_i)$. Сумма (2.1.1) есть сумма объёмов указанных малых цилиндров, то есть объём некоторого «ступенчатого» тела.

Рассмотрим произвольную последовательность интегральных сумм, составленных с помощью функции $Z = f(x, y)$ для данной области *D*, при различных способах разбиения области *D* на части Δs_i:

$$V_{n1}, V_{n2}, V_{n3}, \ldots V_{nk}, \ldots \quad (2.1.2)$$

<u>Теорема 2.1.1.</u> Если функция $Z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области *D*, то существует предел последовательности (2.1.2) интегральных сумм (2.1.1), если максимальный диаметр площадок Δ_i стремится к нулю ($n \to \infty$). Этот предел один и тот же для любой последовательности вида (2.1.2), то есть он не зависит ни от способов разбиения области *D* на площадки Δ_i, ни от выбора точки P_i внутри площадки Δ_i. Этот предел называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области *D* и обозначается:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{diam\Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i . \quad (2.1.3)$$

Область *D* называется **областью интегрирования**.

Геометрический смысл двойного интеграла. Если $f(x,y) \geq 0$, то двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области *D* равен объему тела, ограниченного поверхностью $Z = f(x,y)$, плоскостью $Z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси *OZ,* а направляющей служит граница *L* области *D*.

Рассмотрим некоторые **свойства** двойного интеграла.

1) Двойной интеграл от суммы двух функций по области *D* равен сумме двойных интегралов по области *D* от каждой из функций в отдельности:

$$\iint_D (f(x,y) + \varphi(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D \varphi(x,y)dxdy\,; \qquad (2.1.4)$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint_D k \cdot f(x,y)dxdy = k \cdot \iint_D f(x,y)dxdy\,; \qquad (2.1.5)$$

3) Если область *D* разбита на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, и функция $f(x,y)$ непрерывна во всех точках области *D*, то справедливо равенство:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy\,. \qquad (2.1.6)$$

2.2 Вычисление двойного интеграла

I. Пусть область *D*, лежащая в плоскости *XOY,* такова, что всякая прямая, параллельная оси *OY,* и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области не более чем в двух точках *M* и *P.* Предположим, что в рассматриваемом случае, область *D* ограничена линиями: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем $a < b$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$, и функции $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ (рисунок 2.2.1).

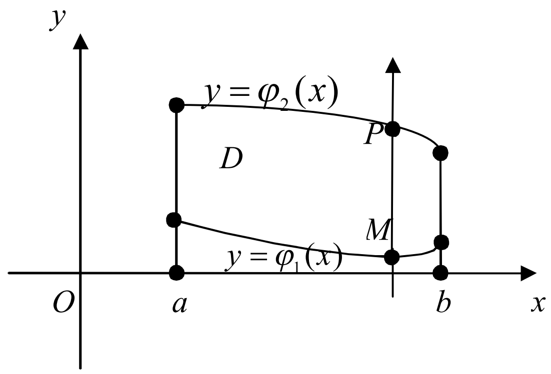

Рисунок 2.2.1. Область, правильная в направлении оси *OY*

Такую **область** называют **правильной в направлении оси *OY***.

Теорема 2.2.1. Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области *D* в направлении оси *OY* вычисляется по формуле:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,. \qquad (2.2.1)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (2.2.1) называют повторным интегралом от функции $f(x,y)$ по области *D*. В повторном интеграле сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, причем интегрирование производится по переменной *y,* а *x* считается постоянным. В результате интегрирования получится непрерывная функция, зависящая от *x*. Эту функцию затем необходимо проинтегрировать по переменной *x* в пределах от *a* до *b*.

Пример 20. Вычислите повторный интеграл $\int_1^3 dx \int_2^{x^2+5} \frac{1}{x^2}dy$

Решение. Вычислим сначала внутренний интеграл. Считая *x* постоянным, находим:

$$\int_2^{x^2+5} \frac{dy}{x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot y\Big|_2^{x^2+5} = \frac{1}{x^2}\cdot(x^2+5-2) = \frac{x^2+3}{x^2}$$

Затем, вычисляем внешний интеграл, для чего полученную функцию интегрируем по переменной *x* в пределах от 1 до 3:

$$\int_1^3 dx \int_2^{x^2+5} \frac{dy}{x^2} = \int_1^3 \frac{x^2+3}{x^2}dx = \int_1^3 dx + 3\int_1^3 \frac{dx}{x^2} = x\Big|_1^3 - 3\cdot\frac{1}{x}\Big|_1^3 = (3-1) - 3(\frac{1}{3}-1) = 4$$

Пример 21. Вычислите двойной интеграл $\iint xydxdy$, если область *D* ограничена прямыми *x=0*, *x=a*, *y=0*, *y=b.*

Решение. Построив данные прямые, получим прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (рисунок 2.2.2).

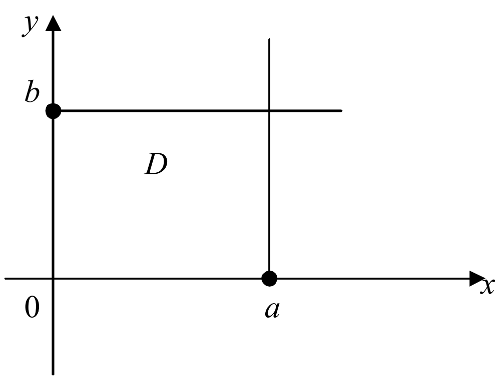

Рисунок 2.2.2 Область интегрирования *D*

Получили область, правильную в направлении оси *OY*. Для вычисления двойного интеграла воспользуемся формулой (2.2.1).

$$\iint\limits_D xydxdy = \int_0^a dx \int_0^b xydy = \int_0^a dx \cdot x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^b = \frac{b^2}{2}\int_0^a xdx = \frac{b^2}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2b^2}{4}.$$

II. Пусть область *D*, лежащая в плоскости *XOY,* такова, что всякая прямая, параллельная оси *OX,* и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области не более чем в двух точках *M* и *P*. Предположим, что в рассматриваемом случае, область *D* ограничена линиями: $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(x)$, $y=c$, $y=d$, причем $c<d$, $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, и функции $x=\psi_1(y)$, $x=\psi_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c,d]$ (рисунок 2.2.3).

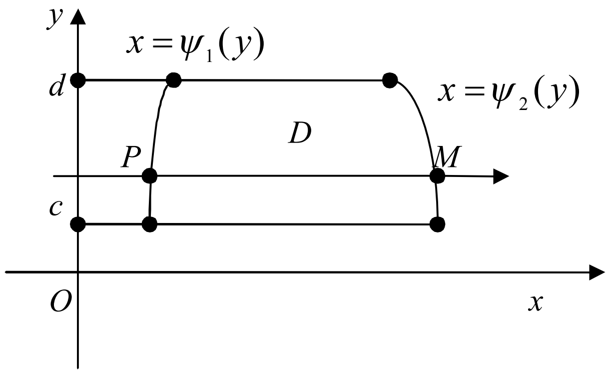

Рисунок 2.2.3 Область, правильная в направлении оси *OX*

Такую **область** называют **правильной в направлении оси *OX***.

<u>Теорема 2.2.2.</u> Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x,y)$ по правильной области *D* в направлении оси *OX* вычисляется по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (2.2.2)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (2.2.2) является повторным интегралом от функции $f(x,y)$ по области *D*. В данном повторном интеграле сначала вычисляется внутренний интеграл $\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$, причем интегрирование производится по переменной *x,* а *y* считается постоянным. В результате интегрирования получится непрерывная функция, зависящая от *y*. Эту функцию затем необходимо проинтегрировать по переменной *y* в пределах от *c* до *d.*

Пример 22. Вычислите повторный интеграл $\int_0^1 dy \int_2^{y^2+5} \left(\frac{1}{x^2}+y\right)dx$.

Решение. Вычислим сначала внутренний интеграл. Считая *y* постоянным, находим:

$$\int_2^{y^2+5}\left(\frac{1}{x^2}+y\right)dx=\int_2^{y^2+5}\frac{1}{x^2}dx+\int_2^{y^2+5}ydx=-\frac{1}{x}\bigg|_2^{y^2+5}+y\cdot x\Big|_2^{y^2+5}=$$

$$-\left(\frac{1}{y^2+5}-\frac{1}{2}\right)+y\cdot\left(y^2+5-2\right)=-\frac{1}{y^2+5}+y^3+3y+\frac{1}{2}.$$

Затем, вычисляем внешний интеграл, для чего полученную функцию интегрируем по переменной y в пределах от 0 до 1:

$$\int_0^1 dy\int_2^{x^2+5}\left(\frac{1}{x^2}+y\right)=\int_0^1\left(-\frac{1}{y^2+5}+y^3+3y+\frac{1}{2}\right)dy=-\int_0^1\frac{1}{y^2+5}dy+\int_0^1 y^3dy+$$

$$+3\int_0^1 ydy+\frac{1}{2}\int_0^1 dy=-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{y}{\sqrt{5}}\bigg|_0^1+\frac{y^4}{4}\bigg|_0^1+3\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1+\frac{1}{2}y\Big|_0^1=$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Пример 23. Вычислите двойной интеграл $\iint xydxdy$, если область D ограничена линиями: $y=x-4$ и $y^2=2x$.

Решение. Построим данные линии, которыми ограничивается область D (рисунок 2.2.4). Для построения прямой $y=x-4$ достаточно двух точек: (4,0), (0,4).

Для построения параболы $y^2=2x$ также составим таблицу значений x и y:

x	0	2
y	0	± 2

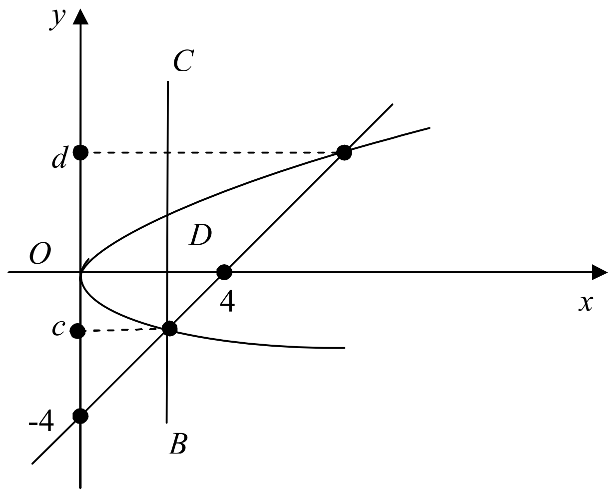

Рисунок 2.2.4 Область интегрирования D

Найдем точки пересечения параболы и прямой. Для этого выразим из уравнений переменную x, и приравняем правые части равенств: $y+4=\frac{y^2}{2}$. Решим получившееся квадратное уравнение.

$$y^2-2y-8=0$$
$$D=4+32=36,$$

$$y_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{vmatrix}4=d\\ -2=c\end{vmatrix}$$

Рассмотрим область D как правильную в направлении оси OX. Двойной интеграл по этой области выражается одним повторным интегралом:

$$\text{I}=\iint_D xydxdy=\int_{-2}^{4}ydy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4}xdx$$

Вычисляя повторный интеграл, получим:

$$\text{I}=\int_{-2}^{4}ydy\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}xdx=\int_{-2}^{4}dy\cdot y\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}=\int_{-2}^{4}dy\cdot y\cdot\left[\frac{(y+4)^2}{2}-\frac{y^4}{8}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(y^3+8y^2+16y-\frac{y^5}{4})dy==\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{y^4}{4}+8\frac{y^3}{3}+16\frac{y^2}{2}-\frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{256}{4}+8\frac{64}{3}+8\cdot 16-\frac{4096}{24}\right)-\left(\frac{16}{4}+8\cdot\frac{-8}{3}+8\cdot 4-\frac{64}{24}\right)\right]=90.$$

Замечание: Данную область можно рассматривать и как правильную в направлении оси OY. Для этого необходимо разбить область интегрирования прямой BC, параллельной оси OY на две части, так как здесь нижняя граница области D состоит из двух участков, которые имеют различные уравнения: $y=-\sqrt{2x}$ и $y=x-4$.

Вследствие этого, вычисления несколько усложняются:

$$\text{I}=\iint_{D_1}xydxdy+\iint_{D_2}xydxdy=\int_0^2 dx\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}xydy+\int_2^8 dx\int_{x-4}^{\sqrt{2x}}xydy=$$

$$=\int_0^2 xdx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}+\int_2^8 xdx\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x-4}^{\sqrt{2x}}=\int_0^2 xdx\cdot 0+\int_2^8 dx\cdot x\cdot(\frac{2x}{2}-\frac{(x-4)^2}{2})=$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^8(10x^2-x^3-16x)dx=\frac{1}{2}(\frac{10x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-8x^2)\Big|_2^8=90.$$

Решение этой задачи показало, что при любом порядке интегрирования каждый двойной интеграл имеет одно и то же значение.

Пример 24. Измените порядок интегрирования $\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,y)dy$.

Решение. Суть решения этой задачи состоит в том, чтобы внутренний интеграл сделать по переменной x, а внешний – по переменной y.

Вначале по пределам интегрирования определяем линии, которыми ограничена область D: $x=-2$, $x=2$, $y=x^2$, $y=4$.

Построим эти линии (рисунок 2.2.5).

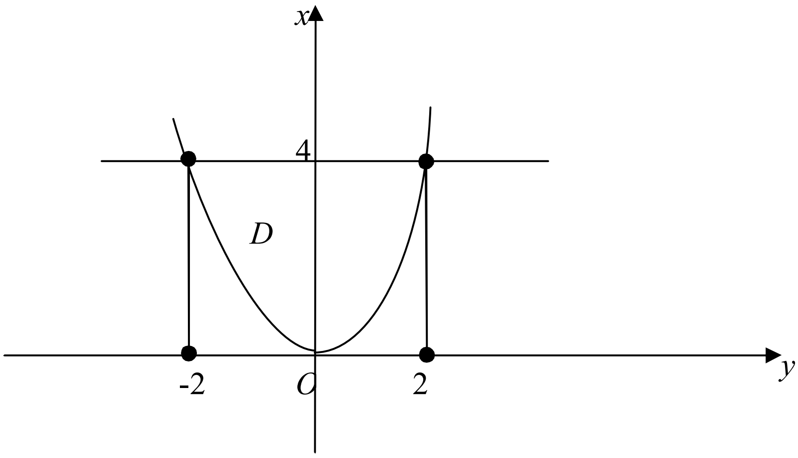

Рисунок 2.2.5 Область интегрирования *D*

Пределы внешнего интеграла *y=0* и *y=4*. Чтобы определить пределы внутреннего интеграла, проведем через внутреннюю точку области *D* прямую, параллельную оси *OX:* «входит» прямая в левую ветвь параболы, а «выходит» из правой ветви параболы. Найдем пределы, разрешая относительно *x* уравнение $y=x^2$: $x=-\sqrt{y}$ и $x=\sqrt{y}$.

Следовательно, $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

Пример 25. Измените порядок интегрирования $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}x+1} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{1}{2}x+1} f(x,y)dy$.

Решение. Определим по пределам интегрирования линии, которыми ограничена область *D.* Первая часть области ограничена линиями: $x=-2$, $x=2$, $y=0$, $y=\frac{1}{2}x+1$. Вторая часть области ограничена линиями: $x=2$, $x=\frac{10}{3}$, $y=\sqrt{x^2-4}$, $y=\frac{1}{2}x+1$. Выполним построение (рисунок 2.2.6). График функции $y=\frac{1}{2}x+1$ представляет собой прямую (можно построить через две точки). График функции $y=\sqrt{x^2-4}$ представляет собой гиперболу вида: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ (для того, чтобы получить каноническое уравнение гиперболы, возведите обе части равенства в квадрат и перенесите слагаемые с *x* и *y* в одну часть равенства: $x^2-y^2=4$, а затем поделите обе части равенства на 4).

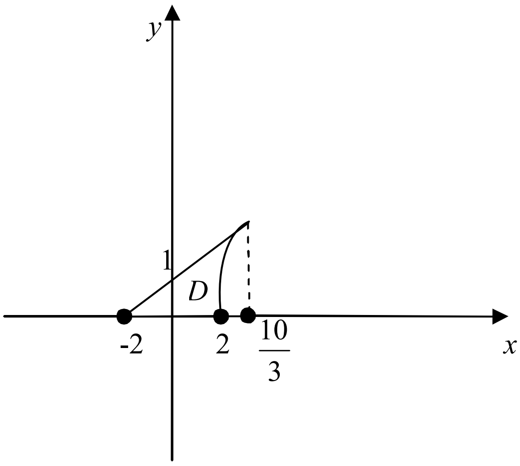

Рисунок 2.2.6 Область интегрирования *D*

Чтобы изменить порядок интегрирования, необходимо внутренний интеграл сделать по переменной *x*, а внешний - по переменной *y*. Найдем пределы интегрирования для переменной *y*. Для этого нужно найти точки пересечения прямой и гиперболы, решив систему: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$. Воспользуемся методом подстановки: $x^2 - (\frac{1}{2}x + 1)^2 = 4$. Решив данное уравнение, получим: $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{10}{3}$, тогда $y_1 = \frac{1}{2}(-2) + 1 = 0$, $y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} + 1 = \frac{8}{3}$. Решением системы являются $(-2{,}0)$ и $(\frac{10}{3}, \frac{8}{3})$.

Таким образом, вся область интегрирования по переменной *y* находится в пределах от *0* до $\frac{8}{3}$. Проведем через внутреннюю точку области прямую, параллельную оси *OX.* «Входит» прямая в линию с уравнением $y = \frac{1}{2}x + 1$, а «выходит» из гиперболы с уравнением $x^2 - y^2 = 4$. Выразим из этих уравнений переменную *x*. Для прямой получим $x = 2y - 2$, а для гиперболы $x = \sqrt{4 + y^2}$. Эти уравнения и будут пределами интегрирования для внутреннего интеграла по переменной *x*. В результате получим:

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{0}^{\frac{1}{2}x+1} f(x,y)dy + \int_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{1}{2}x+1} f(x,y)dy = \int_{0}^{\frac{8}{3}} dy \int_{x=2y-2}^{x=\sqrt{4+y^2}} f(x,y)dx .$$

2.3 Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных в дойном интеграле производится по формуле:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(x(u,v);\, y(u,v)\big)\cdot |I| dudv\,, \qquad (2.3.1)$$

где D' - область, в которую преобразовалась область D при отображении $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$;

$f\big(x(u,v);\, y(u,v)\big)$ - подынтегральная функция, преобразованная к новым переменным u и v;

I - функциональный определитель или якобиан функций $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, который определяется следующим равенством:

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0\,. \qquad (2.3.2)$$

Одним из часто используемых переходов является переход от декартовой системы координат к полярной. Формулами перехода являются

$$x = \rho\cos\varphi\,,$$
$$y = \rho\sin\varphi\,.$$

Вычислим якобиан для перехода к полярной системе координат.

Для этого найдем сначала частные производные: $\dfrac{\partial x}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}$.

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = (\rho\cos\varphi)'_{\rho} = \cos\varphi\,; \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = (\rho\cos\varphi)'_{\varphi} = -\rho\sin\varphi\ ;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = (\rho\sin\varphi)'_{\rho} = \sin\varphi\,; \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = (\rho\sin\varphi)'_{\varphi} = \rho\cos\varphi\ .$$

Вычислим определитель второго порядка (2.3.2):

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho\,.$$

Таким образом, якобиан при переходе к полярной системе координат $I = \rho$, и формула перехода в двойном интеграле от декартовой системы координат к полярной примет вид:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi;\, \rho\sin\varphi)\cdot \rho\cdot d\rho d\varphi\,. \qquad (2.3.3)$$

Пример 26. Перейдя к полярным координатам, вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где D - первая четверть круга $x^2+y^2 \le a^2$.

Решение. Область D представляет собой часть круга, отсеченную двумя лучами $x \ge 0$ и $y \ge 0$ (рисунок 2.3.1).

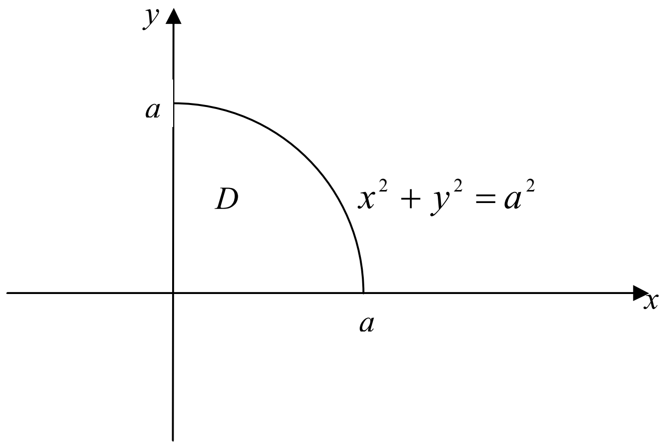

Рисунок 2.3.1 Область интегрирования D

Перейдем к полярным координатам по формулам перехода: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Запишем уравнение подынтегральной функции и уравнения границ в полярных координатах.

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\sqrt{\rho^2}=\rho .$$

Таким образом, уравнение подынтегральной функции $\sqrt{x^2+y^2}=\rho$

Определим уравнения границ области в полярной системе координат.

$$x^2+y^2=\rho^2=a^2,$$

то есть уравнение окружности $\rho=a$.

$$x=0: \ \rho\cos\varphi=0 \Rightarrow \varphi_2=\frac{\pi}{2},$$

$$y=0: \ \rho\sin\varphi=0 \Rightarrow \varphi_1=0.$$

В результате получим:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_{D'} \rho^2 d\rho\, d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \rho^2 d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^a d\varphi=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi=\frac{a^3\pi}{6}$$

Пример 27. Вычислите интеграл $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где D - область, ограниченная линиями $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ $(x \ge 0)$.

Решение. Область D представляет собой часть кругового кольца, отсеченную двумя лучами, исходящими из общего центра окружностей $x^2+y^2=9$ и $x^2+y^2=25$ (рисунок 2.3.2).

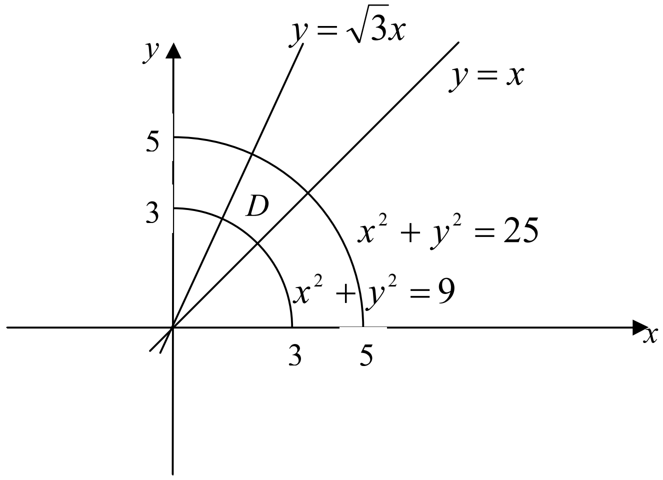

Рисунок 2.3.2 Область интегрирования *D*

В этой связи целесообразно вновь перейти к полярной системе координат по формулам перехода: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Запишем подынтегральную функцию и уравнения границ области *D* в полярных координатах:

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2, \text{ тогда}$$

$$\rho_1^2=9 \text{ и } \rho_2^2=25,$$

то есть уравнения окружностей в полярной системе координат будут вида: $\rho=3$ и $\rho=5$.

Получим уравнения прямых в полярной системе координат:

$$x=y \;\Rightarrow\; \rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi \;\Rightarrow tg\varphi=1 \;\Rightarrow \varphi_1=\frac{\pi}{4},$$

$$y=\sqrt{3}x \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; tg\varphi=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \varphi_2=\frac{\pi}{3}.$$

В результате получаем:

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\iint\limits_{D'}\rho^2\cdot\rho\, d\rho\, d\varphi=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_3^5\rho^3 d\rho=$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_3^5 d\varphi=\frac{625-81}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi=136\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{136\pi}{12}=\frac{34\pi}{3}$$

2.4 Некоторые геометрические приложения двойного интеграла

I Вычисление площади плоской фигуры

Площадь *S* плоской области *D* выражается следующим равенством:

$$S=\iint\limits_D dxdy. \qquad (2.4.1)$$

В полярных координатах ($x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$) площадь S области D определяется равенством:

$$S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi . \qquad (2.4.2)$$

Пример 28: Вычислите площадь области, ограниченной линиями:
$xy = 6$; $x + y - 7 = 0$.

Решение. Построим линии, которыми ограничена область (рисунок 2.4.1). Она ограничена снизу гиперболой $xy = 6$; сверху прямой $x + y - 7 = 0$ (построение линий можно выполнить по точкам).

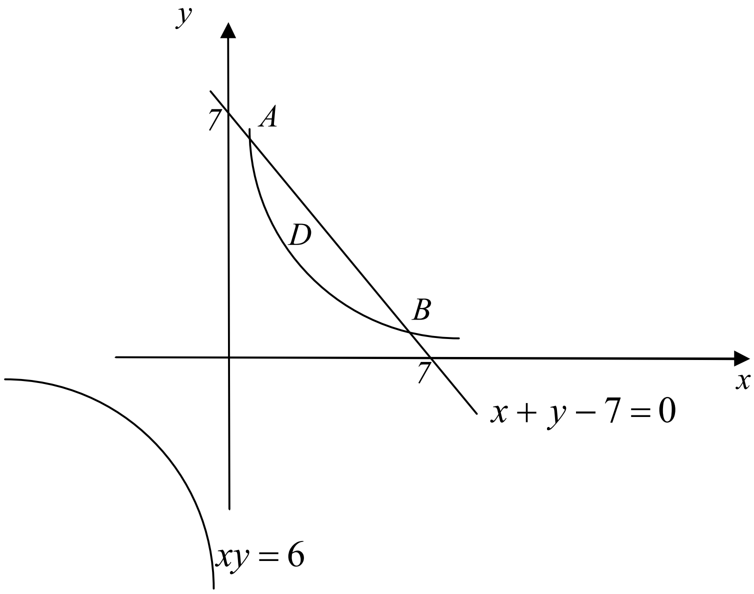

Рисунок 2.4.1 Область интегрирования D

Данные линии пересекаются в точках $A(1;6)$ и $B(6;1)$.
По формуле (2.4.1) площадь области D будет равна:

$$\text{S}=\iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^6 dx \int\limits_{\frac{6}{x}}^{7-x} dy = \int\limits_1^6 y\Big|_{\frac{6}{x}}^{7-x} dx = \int\limits_1^6 (7 - x - \frac{6}{x})dx =$$

$$=(7x - \frac{x^2}{2} - 6\ln x)_1^6 = (7\cdot 6 - \frac{6^2}{2} - 6\ln 6) - (7\cdot 1 - \frac{1}{2} - 6\ln 1) = 17{,}5 - 6\ln 6 .$$

Пример 29. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $y = 0$, $y = x$.

Решение. Уравнение линии $x^2 - 2x + y^2 = 0$ необходимо преобразовать, выделив полный квадрат:

$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 1 = 0,$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Данное уравнение определяет окружность, с центром в точке (1,0) и радиусом $r=1$. Уравнения $y=0$, $y=x$ - определяют прямые. Построим линии, которыми ограничена область (рисунок 2.4.2).

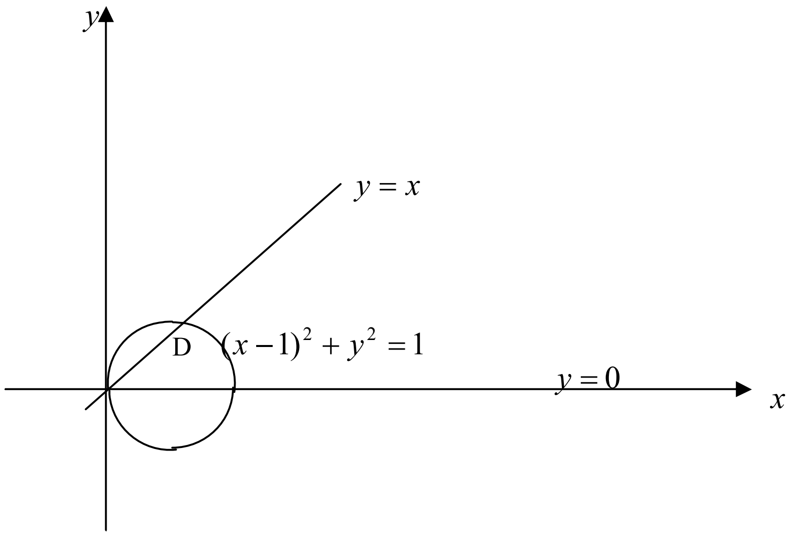

Рисунок 2.4.2 Область интегрирования *D*

Область *D* представляет собой часть плоскости, ограниченной окружностью $(x-1)^2+y^2=1$ и двумя прямыми $y=0$ и $y=x$, исходящими из начала координат. В этой связи целесообразно перейти к полярной системе координат по формулам перехода: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Запишем границы области *D* в полярных координатах:

$x^2-2x+y^2=0$ или в полярных координатах:

$$(\rho\cos\varphi)^2-2(\rho\cos\varphi)+(\rho\sin\varphi)^2=0,$$

$$\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)-2\rho\cos\varphi=0,$$

$$\rho^2-2\rho\cos\varphi=0,$$

где $\rho=2\cos\varphi$ - уравнение окружности в полярной системе координат.

Уравнение прямой $y=0$ в полярной системе координат $\varphi=0$. Уравнение прямой $y=x$:

$$\rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi \text{ (поделим на } \rho\cos\varphi)$$

$$tg\varphi=1 \text{ или } \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, площадь области D можно найти следующим образом:

$$S=\iint_D \rho d\rho d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cdot\frac{1+\cos2\varphi}{2}d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\varphi d\varphi=\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\sin2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot(\sin\frac{\pi}{2}-\sin0)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

I Вычисление объема цилиндрического тела

1. Объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $Z = f(x, y)$, снизу плоскостью $Z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости XOY область D, выражается интегралом:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy. \qquad (2.4.3)$$

2. Если тело, объем которого необходимо вычислить, ограничено сверху поверхностью $Z = f_2(x, y) \geq 0$, а снизу поверхностью $Z = f_1(x, y) \geq 0$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость XOY является область D, то объем V этого тела равен разности объемов двух «цилиндрических» тел: первое из этих цилиндрических тел имеет нижним основанием область D, а верхним поверхность $Z = f_2(x, y)$; второе тело имеет нижним основанием также область D, а верхним поверхность $Z = f_1(x, y)$. Поэтому объем V равен разности двойных интегралов:

$$V = \iint_D f_2(x, y)dxdy - \iint_D f_1(x, y)dxdy \quad \text{или}$$

$$V = \iint_D \left(f_2(x, y) - f_1(x, y)\right)dxdy. \qquad (2.4.4)$$

Формула (2.4.4) справедлива не только в том случае, когда $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ неотрицательны, но и тогда, когда $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ любые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношению: $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$.

Пример 30. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $Z = x^2 + y^2$, $Z = 4$.

Решение. Выполним построение поверхностей, которыми ограничено тело. $Z = x^2 + y^2$ есть эллиптический параболоид, $Z = 4$ - плоскость, параллельная плоскости XOY (рисунок 2.4.3).

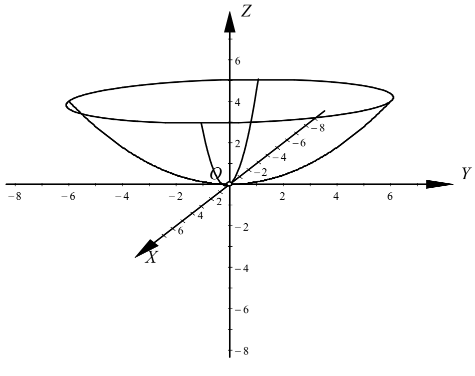

Рисунок 2.4.3 Построение тела, ограниченного поверхностями $Z = x^2 + y^2$ и $Z = 4$

В данном случае имеем тело, ограниченное сверху поверхностью $Z = 4$, а снизу поверхностью $Z = x^2 + y^2$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость *XOY* является область *D*, представляющая собой круг $x^2 + y^2 = 4$.

Объем этого тела равен разности объемов двух «цилиндрических» тел: первое из этих цилиндрических тел имеет нижним основанием область *D*, а верхним поверхность $Z = 4$; второе тело имеет нижним основанием также область *D*, а верхним поверхность $Z = x^2 + y^2$. Поэтому объем *V* равен разности двойных интегралов (формула 2.4.4):

$$V = \iint_D f_2(x,y)dxdy - \iint_D f_1(x,y)dxdy = \iint_D \big(f_2(x,y) - f_1(x,y)\big)dxdy .$$

Для данных рассматриваемой задачи:

$$V = \iint_D (4 - x^2 - y^2)dxdy = \iint_{D'} (4 - \rho^2)\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4\rho - \rho^3)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi (4\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4})\Bigg|_0^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi(8-4) = 4\int_0^{2\pi} d\varphi = 4\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8\pi .$$

Замечание. При вычислении двойного интеграла был выполнен переход к полярной системе координат. Это вызвано тем, что проекцией рассматриваемого тела на плоскость *XOY* является круг (то есть областью интегрирования *D* является круг), центр которого совпадает с началом системы координат и радиусом равным 2.

Пример 31. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2$, $y=x$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$ и расположенного в первом октанте.

Решение. Данное тело ограничено сверху параболоидом $z = 1 - x^2 - y^2$. Область интегрирования *D* – круговой сектор, ограниченный дугой окружности $x^2 + y^2 = 1$, являющейся линией пересечения параболоида с плоскостью $z = 0$ и прямыми $y=x$ и $y = x\sqrt{3}$ (рисунок 2.4.4).

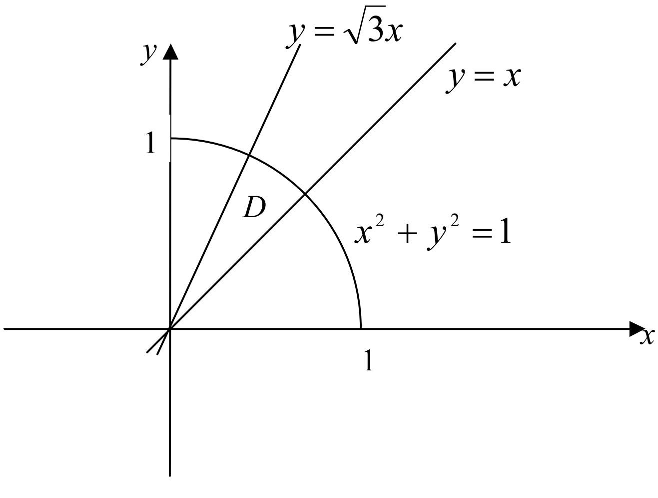

Рисунок 2.4.4 Область интегрирования *D*

Объем искомого тела можно отыскать, вычислив интеграл:

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)dxdy.$$

Поскольку областью интегрирования является часть круга, а подынтегральная функция содержит выражение $x^2 + y^2$, целесообразно перейти к полярным координатам.

Получим вид подынтегральной функции:

$$1 - x^2 - y^2 = 1 - (\rho\cos\varphi)^2 - (\rho\sin\varphi)^2 = 1 - \rho^2.$$

Получим вид границ области в полярной системе координат:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1.$$

Уравнение прямой $y = x$:

$$\rho\sin\varphi = \rho\cos\varphi \text{ (поделим на } \rho\cos\varphi\text{)}$$

$$tg\varphi = 1 \text{ или } \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Уравнение прямой $y = x\sqrt{3}$ (аналогичным образом):

$$tg\varphi_2 = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, имеем

$$V = \iint_D (1-\rho^2)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 (\rho - \rho^3)d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\varphi = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi = \frac{\pi}{48}.$$

III Вычисление площади поверхности

Площадь поверхности с уравнением $Z = f(x, y)$ выражается двойным интегралом

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\,dxdy, \qquad (2.4.5)$$

где D – проекция поверхности на плоскость XOY.

Пример 32. Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Из уравнения конуса имеем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Областью D интегрирования является круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 2x$ или если мы выделим полный квадрат (см. пример 29) уравнение окружности примет вид: $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рисунок 2.4.5).

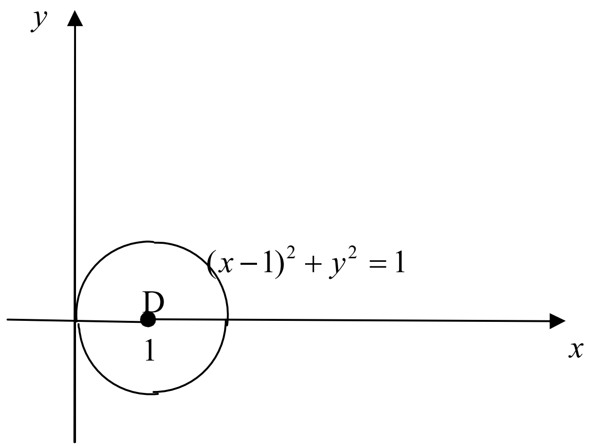

Рисунок 2.4.5 Область интегрирования D

Так как область интегрирования представляет собой круг, целесообразно перейти в полярную систему координат:

$$x^2+y^2=2x \quad \Rightarrow \quad \rho=2\cos\varphi .$$

Имеем:

$$S=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\iint_D dxdy=\sqrt{2}\iint_{D'}\rho\ d\varphi\ d\rho=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}\rho\ d\rho=$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\rho^2}{2})\Big|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\cos^2\varphi}{2}d\varphi=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi)d\varphi=$$

$$2\sqrt{2}(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi\sqrt{2}\text{ (кв.ед.).}$$

2.5 Некоторые физические приложения двойного интеграла

Если пластинка занимает область D плоскости XOY и имеет переменную поверхностную плотность $\mu=\mu(x,y)$, то масса M пластинки и её статические моменты M_x и M_y относительно осей OX и OY выражаются двойными интегралами:

$$M=\iint_D\mu(x,y)dxdy; \tag{2.5.1}$$

$$M_x=\iint_D y\cdot\mu(x,y)dxdy\ ; \tag{2.5.2}$$

$$M_y=\iint_D x\cdot\mu(x,y)dxdy \tag{2.5.3}$$

Координаты центра тяжести пластинки определяются формулами:

$$x=\frac{M_y}{M};\ y=\frac{M_x}{M} \tag{2.5.4}$$

Моменты инерции пластинки относительно осей OX и OY вычисляются по формулам:

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x,y)dxdy; \tag{2.5.5}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x,y)dxdy \tag{2.5.6}$$

Момент инерции пластины относительно начала координат – по формуле

$$I_0 = \iint (x^2 + y^2)\mu(x,y)dxdy = I_x + I_y \tag{2.5.7}$$

Пример 33. Определите массу пластинки D, ограниченной параболами $y^2 = x$, $x^2 = y$ и имеющей поверхностную плотность $\mu(x,y) = 2x + y$.

Решение. Для отыскания массы пластины, воспользуемся формулой (2.5.1). Для вычисления двойного интеграла, необходимо выполнить построение области D (тех линий, которыми ограничена пластина). Область D изображена на рисунке 2.5.1.

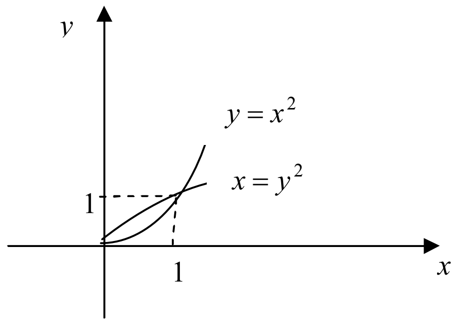

Рисунок 2.5.1 Область интегрирования D

$$M = \iint_D \mu(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (2x + y)dy = \int_0^1 dx(2xy + \frac{y^2}{2})\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dy =$$

$$= \int_0^1 dx(2x\sqrt{x} - 2x^3 + \frac{x}{2} - \frac{x^4}{4}) = (2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5/2} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\frac{x^5}{5})\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{2}.$$

2.6 Тройной интеграл. Способ вычисления. Приложения тройного интеграла

Определение тройного интеграла аналогично определению двойного интеграла. Пусть в пространственной области V определена и непрерывна функция трех переменных $U = f(x,y,z)$. Разбиение области V на n произвольных областей $\Delta_1, \Delta_2, ...\Delta_n$, не имеющих общих внутренних точек с объемами Δv_1, Δv_2, ..., Δv_n и выбор в каждой области произвольной точки M_i позволяет строить интегральную сумму вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i$$

Тогда если существует предел интегральных сумм при условии стремления к нулю наибольшего из диаметров областей, то этот предел, не зависящий от способа разбиения области *V* на области $\Delta_1, \Delta_2, ...\Delta_n$ и от выбора точек M_i, называется тройным интегралом и обозначается:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\max d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i \qquad (2.6.1)$$

Тройной интеграл обладает свойствами, аналогичными свойствам двойного интеграла.

Предположим, что функция трех переменных $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в пространственной области, которая ограничена сверху поверхностью $Z = Z_2(x, y)$, а снизу – поверхностью $Z = Z_1(x, y)$, где функции $Z_1(x, y)$ и $Z_2(x, y)$ определены и непрерывны в области $D \in XOY$. Тогда, вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению определенного интеграла по переменной z (переменные x и y считаются при этом константами) и двойного интеграла по области, получившейся в области D.

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz . \qquad (2.6.2)$$

При этом можно выбирать и другой порядок интегрирования.

Пример 34. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$, если *V* ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

Решение. Пространственная область *V* ограничена сверху поверхностью $z = 1$, снизу поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Рассмотрим проекцию данной области на плоскость *XOY*. Это окружность $x^2 + y^2 = 1$. Выберем правильным направление оси *OX*. Получим: $\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz$.

Пример 35. Вычислите тройной интеграл $\iiint_V x^2 yzdxdydz$, где V - область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Решение. Область V представляет собой треугольную пирамиду (предлагаем построить область самостоятельно). Проекцией области V на плоскость XOY является треугольник. Прямая, параллельная оси OZ пересекает область V в двух точках. Аппликата (Z) первой точки равна нулю, аппликата второй точки $z=1-x-y$. Таким образом,

$$\iiint\limits_V x^2 yzdxdydz=\iint\limits_D x^2 ydxdy\int\limits_{z=0}^{z=1-x-y} zdz=\iint\limits_D x^2 y\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x-y} dxdy=$$

$$\frac{1}{2}\iint\limits_D x^2 y(1-x-y)^2 dxdy==\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^{1-x} y(1+x^2+y^2-2x-2y+2xy)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2dx\int\limits_0^{1-x}(y+x^2y+y^3-2xy-2y^2+2xy^2)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int x^2dx(yx+x^2\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}-2x\frac{y^2}{2}-2\frac{y^3}{3}+2x\frac{y^3}{3})\Bigg|_0^{1-x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^2(x(1-x)+x^2\frac{(1-x)^2}{2}+\frac{(1-x)^4}{4}-2x\frac{(1-x)^2}{2}-2\frac{(1-x)^3}{3}+$$

$$+2x\frac{(1-x)^3}{3})dx=\begin{bmatrix}\textit{Раскрыв}\\ \textit{скобки,}\\ \textit{проинтегрировав}\end{bmatrix}=\frac{1}{2520}.$$

Замена переменных в тройном интеграле (цилиндрические координаты)

Цилиндрические координаты $(\mathrm{r},\varphi,\mathrm{z})$ представляют собой обобщение полярных координат на плоскости и связаны с прямоугольными координатами формулами

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=z.$$

Переход к тройному интегралу в цилиндрических координатах осуществляется по формуле:

$$\iiint\limits_V \mathrm{f(x,y,z)dxdydz}=\iiint \mathrm{f(rcos}\varphi,\mathrm{rsin}\varphi,\mathrm{z)rdrd}\varphi\mathrm{dz}. \qquad (2.6.3)$$

Пример 36. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z)^4 dxdydz$, где V – часть параболоида $z=x^2+y^2$, отсеченная плоскостью $z=4$ (рисунок 2.4.3).

Решение. Рассмотрим проекцию этой области на плоскость *XOY*. Её проекцией является круг, определяемый уравнением $x^2+y^2=4$. Чтобы вычислить данный интеграл перейдем к цилиндрическим координатам ρ,φ,z**:** $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $z=z$.

Уравнение параболоида $z=x^2+y^2$ примет вид $z=\rho^2$ или $\rho=\sqrt{z}$.

В соответствии с формулой (2.6.3) находим:

$$\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z)^4 dxdydz=\iiint\limits_{(V)}(\rho^2+z)^4\rho\ d\varphi\ d\rho\ dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho\ d\rho\int\limits_{\rho^2}^4(\rho^2+z)^4 dz=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\ d\rho \frac{(\rho^2+z)^5}{5}\Bigg|_{\rho^2}^{4} = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho(\rho^2+4)^5 d\rho - \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho\cdot(2\rho^2)^5 d\rho .$$

Внутренний интеграл в первом слагаемом вычислим заменой переменной:

$$\int_0^2 \rho(\rho^2+4)^5 d\rho = \begin{bmatrix} \rho^2+4=t \\ 2\rho d\rho = dt \\ или \\ \rho d\rho = \dfrac{dt}{2} \end{bmatrix} = \int_{t_1}^{t_2} t^5 \frac{dt}{2} = \frac{t^6}{6\cdot 2}\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \frac{(\rho^2+4)^6}{6\cdot 2}\Bigg|_0^2 .$$

Внутренний интеграл во втором слагаемом после раскрытия скобок является табличным:

$$\int_0^2 \rho\cdot 32\cdot \rho^{10} d\rho = 32\frac{\rho^{12}}{12}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}\rho^{12}\Bigg|_0^2 .$$

В результате получим:

$$\frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(\rho^2+4)^6}{6\cdot 2}\Bigg|_0^2 - \frac{1}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{8}{3}\rho^{12}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{60}(8^6-4^6)\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{8}{15}\cdot 2^{12}\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= 279552\cdot 2\pi - \frac{32768}{15}\cdot 2\pi = \frac{4160512}{15}2\pi .$$

Некоторые приложения тройного интеграла

1. Объем тела V можно отыскать по формуле:

$$V = \iiint_V dxdydz \ . \qquad (2.6.4)$$

2. Масса тела V с данной плотностью $\rho(x,y,z)$, где функция $\rho(x,y,z)$ - непрерывна, вычисляется по формуле

$$m = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz . \qquad (2.6.5)$$

3. Координаты центра тяжести тела V с массой m определяются по формулам:

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz ;\ y_c = \frac{1}{m}\iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz ,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz . \qquad (2.6.6)$$

4. Моменты инерции тела V относительно осей координат определяются равенствами:

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz;$$
$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz;$$
$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz. \qquad (2.6.7)$$

Пример 37. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $Z = 5$.

Решение. Данное тело ограничено сверху плоскостью $Z = 5$, а снизу конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рисунок предлагаем выполнить самостоятельно). Проекцией тела на плоскость *XOY* будет круг, центр которого будет совпадать с центром системы координат, а радиус равен 5.

Согласно формуле (2.6.5), объем данного тела будет равен:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5} dz = \iint\limits_D dxdy(5 - \sqrt{x^2 + y^2}) =$$

$$\begin{bmatrix} \textit{Перейдем} \\ \textit{в} \\ \textit{полярную} \\ \textit{систему} \\ \textit{координат} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^5 (5-\rho)\rho d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi (5\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3})\Big|_0^5 =$$

$$= \frac{5}{2} 25 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi - \frac{125}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{125}{2}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} - \frac{125}{3}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} = 125\pi - \frac{250}{3}\pi = \frac{125}{3}\pi.$$

Пример 38. Найти массу и центр тяжести тела, ограниченного параболоидом $by = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = b$, если в каждой точке плотность тела равна $\gamma = x^2 + z^2$.

Решение. Согласно формуле (2.6.5) $m = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2)dxdydz.$

Параболоид и плоскость пересекаются по окружности $\begin{cases} x^2 + z^2 = b^2 \\ y = b \end{cases}$, проекция которой на плоскость *XOZ* также является окружностью $x^2 + z^2 = b^2$. Чтобы найти объем данного тела, перейдем к цилиндрической системе координат по формулам:

$$x = \rho\cos\varphi,\ z = \rho\sin\varphi,\ y=y.$$

В новых координатах поверхность имеет уравнение $by = \rho^2 \Rightarrow y = \dfrac{\rho^2}{b}$.

Преобразование область (V) переводит в область (V') для которой: $0 \le \rho \le b$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\dfrac{\rho^2}{b} \le y \le b$.

Якобиан этого преобразования равен ρ.

Таким образом, получим:

$$m = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2) dxdydz = \iiint\limits_{(V')} \rho^2 \rho \, d\rho \, d\varphi \, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b d\rho \int\limits_{\rho^2/b}^{b} \rho^3 dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b \rho^3 d\rho \; y \Big|_{\frac{\rho^2}{b}}^{b} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b (\rho^3 b - \frac{\rho^5}{b}) dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi (\frac{b^5}{2} - \frac{b^6}{b \cdot 6}) = \frac{2b^5}{6} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\frac{b^5}{3} \cdot 2\pi = \frac{2b^5 \pi}{3}.$$

Из соотношений симметрии заключаем, что центр тяжести данного тела находится на оси OY, то есть $x_0=0$, $z_0=0$.

Вычислим тройной интеграл вида:

$$\iiint\limits_{(v)} \gamma \; y dxdydz = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2) y dxdydz = \iiint\limits_{V} \rho^2 y \rho \, d\rho \, d\varphi \, dy = \iiint\limits_{V} \rho^3 y \, d\rho \, d\varphi \, dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{b}}^{b} \rho^3 y dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b \rho^3 \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{\rho^2}{b}}^{b} d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^b (\frac{\rho^3 b^2}{2} - \frac{\rho^7}{2b^2}) d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\frac{b^2}{2} \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^8}{16b^2}) \Big|_0^b d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} (\frac{b^6}{8} - \frac{b^6}{16}) d\varphi = \frac{b^6}{16} \cdot 2\pi = \frac{b^6 \pi}{8}.$$

В результате,

$$y_0 = \frac{1}{M} \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2) y dxdydz = \frac{b^6 \pi}{8} : \frac{b^5 \pi}{6} = \frac{3}{4} b.$$

Центр тяжести данного тела находится в точке С$(0; \frac{3}{4} b; 0)$.

2.7 Задачи для самостоятельного решения по второй главе

2.7.1 Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D (4 - y) dxdy$, где область D ограничена линиями $x^2 = 4y; y = 1; x = 0; x \ge 0$.

2.7.2 Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D (x + 2y) dxdy$, если область D ограничена линиями $y = x^2; y = \sqrt{x}$.

2.7.3 Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$, если область D ограничена линиями: $y = x; x = 0; y = 1; y = 2$.

2.7.4 Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)dxdy$, если область D ограничена линиями $x=0; x=y^2; y=2$.

2.7.5 Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, где область D ограничена линиями $x+y=2; x^2+y^2=2y; (x\geq 0)$.

2.7.6 Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$, где область D ограничена линиями $0\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 0$.

2.7.7 Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{1}{(x-y)^2}dxdy$, где область D ограничена линиями $1\leq x\leq 2$, $3\leq y\leq 4$.

2.7.8 Измените порядок интегрирования $\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{3-y} f(x,y,)dx$.

2.7.9 Измените порядок интегрирования $\int\limits_{-3}^0 dx\int\limits_{-x}^3 f(x,y)dy+\int\limits_0^3 dx\int\limits_x^3 f(x,y)dy$.

2.7.10 Измените порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y,)dy$.

2.7.11 Измените порядок интегрирования $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y,)dy$.

2.7.12 Измените порядок интегрирования $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y,)dy$.

2.7.13 Измените порядок интегрирования $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)dy+\int\limits_1^{\sqrt{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$.

2.7.14 Вычислите двойной интеграл, перейдя к полярным координатам: $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где область D ограничена линией $x^2+y^2\leq 9$ (*Ответ:* 18π).

2.7.15 Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2-9}dxdy$, если область D ограничена окружностями $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=25$ и прямыми $y=x$, $x=0$.

2.7.16 Вычислите двойной интеграл, перейдя к полярным координатам $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, где область D кольцо, ограниченное окружностями $x^2+y^2=\pi^2$, $x^2+y^2=4\pi^2$ (*Ответ:* $-6\pi^2$).

2.7.17 Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y^2=2x$ (*Ответ:* $\frac{2}{3}$).

2.7.18 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy=4$, $x+y-5=0$ (*Ответ:* $\frac{15}{2}-8\ln 2$).

2.7.19 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{x}$, $y=7e^x$, $y=2$, $y=7$ (*Ответ: 5*).

2.7.20 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-2x$, $y=x$ (*Ответ:* $\frac{9}{2}$).

2.7.21 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\ln x$, $x-y=1$, $y=-1$ (*Ответ:* $\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$).

2.7.22 Пластинка *D* задана ограничивающими её кривыми, μ - поверхностная плотность. Найдите массу пластинки. *D*: $x=1$, $y=0$, $y^2=x$ $(y\geq 0)$. $\mu=3x+6y^2$ (*Ответ: 2*).

2.7.23 Пластинка *D* задана ограничивающими её кривыми, μ - поверхностная плотность. Найдите массу пластинки, если *D*: $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=16$, $y=0$, $x=0$ $(x\leq 0; y\geq 0)$. $\mu=\frac{2y-3x}{x^2+y^2}$ (*Ответ: 10*).

2.7.24 Найдите координаты центра масс однородной пластинки (поверхностная плотность $\mu=1$), ограниченной линиями: $y^2=x$ и $x^2=y$ (*Ответ:* $\left(\frac{9}{20};\frac{9}{20}\right)$).

2.7.25 Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_V zdxdydz$, если область V ограничена поверхностями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ (*Ответ:* $\frac{1}{24}$).

2.7.26 Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, если область V ограничена плоскостью $z=2$ и параболоидом $2z=x^2+y^2$ (Ответ: $\frac{16}{3}\pi$).

2.7.27 Вычислите тройной интеграл, воспользовавшись методом замены переменной: $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, область V ограничена поверхностями $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $z=0$, $z=3$ (*Ответ: 8*).

2.7.28 Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, $6z=x^2+y^2$ (*Ответ:* $\frac{76\pi}{3}$).

2.7.29 Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{49-x^2-y^2}$, $z=3$, $x^2+y^2=33$ (внутри цилиндра) (*Ответ:* 87π).

2.7.30 Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить объем тела: $Z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2=4$, $z=0$ (*Ответ*: $\frac{16}{3}\cdot\pi$).

ГЛАВА III СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 4
(Математический анализ (часть II))

Вариант контрольной работы выбирается по последней цифре зачётной книжки

Цифра	*№ варианта*	*Содержание работы*
1	1	1.1; 2.1; 3.1; 4.1; 5.1; 6.1; 7.1; 8.1.
2	2	1.2; 2.2; 3.2; 4.2; 5.2; 6.2; 7.2; 8.2.
3	3	1.3; 2.3; 3.3; 4.3; 5.3; 6.3; 7.3; 8.3.
4	4	1.4; 2.4;.3.4;.4.4;.5.4; 6.4; 7.4; 8.4.
5	5	1.5; 2.5; 3.5; 4.5; 5.5; 6.5; 7.5; 8.5.
6	6	1.6; 2.6; 3.6; 4.6; 5.6; 6.6; 7.6; 8.6.
7	7	1.7; 2.7; 3.7; 4.7; 5.7; 6.7; 7.7; 8.7.
8	8	1.8; 2.8; 3.8; 4.8; 5.8; 6.8; 7.8; 8.8.
9	9	1.9; 2.9; 3.9; 4.9; 5.9; 6.9; 7.9; 8.9.
0	10	1.10; 2.10; 3.10; 4.10; 5.10; 6.10; 7.10; 8.10.

1. Дана функция $Z = f(x,y)$. Докажите справедливость предложенных равенств.

1.1 $Z = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$; $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

1.2 $Z = \ln(x^2 + y^2)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.3 $Z = \sin^2(y - ax)$; $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

1.4 $Z = \cos y + (y - x)\sin y$; $(x - y)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

1.5 $Z = arctg(\dfrac{x}{y})$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.6 $Z = \dfrac{x}{y}$; $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

1.7 $Z = \ln(x + e^{-y})$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

1.8 $Z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.9 $Z = e^x \sin 2y$; $(2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})\cdot\dfrac{\sin 2y}{\sin 2y - \cos 2y} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

1.10 $Z = \ln(y + 3x) + arctg(y - 3x)$; $9\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

2. Дана функция $Z = f(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\overline{a}(a_1; a_2)$. Найдите:

a) $gradZ(x, y)$ и его значение в точке M_0;

b) производную в точке M_0 по направлению вектора $\overline{a}$.

2.1 $Z = arctg\frac{y}{x}$; M_0(-1,1); $\overline{a}$(1,-1).

2.2 $Z = arctg(xy^2)$; M_0(2,3); $\overline{a}$(4;-3).

2.3 $Z = \ln(2x + 3y)$; M_0(2,2); $\overline{a}$(2;-3).

2.4 $Z = \frac{3x}{y^2}$; M_0(3,4); $\overline{a}$(-3,-4).

2.5 $Z = \ln(xy)$; M_0(1,1); $\overline{a}$(-3,2).

2.6 $Z = x^2 \sin^2 y$; $M_0(1, \frac{\pi}{2})$; $\overline{a}$(1,-2).

2.7 $Z = \arcsin(x + y)$; M_0 (-1,1); $\overline{a}$(2,3).

2.8 $Z = arctg(xy)$; M_0(2,3); $\overline{a}$(4,3).

2.9 $Z = e^{x^2+y^2}$; M_0(1,1); $\overline{a}$(-3,4).

2.10 $Z = e^{\frac{x}{y}}$; M_0(1,1); $\overline{a}$(-2,3).

3. Найдите полный дифференциал dZ функции $Z = f(x, y)$:

3.1 $Z = \frac{2x^2 - 3y}{y^2}$.

3.2 $Z = \frac{\sqrt{2x} - 4}{y^2}$.

3.3 $z = \frac{\sin 3y}{x^2 - y}$.

3.4 $Z = \frac{\cos 4x}{y^2 - x}$.

3.5 $Z = \frac{2y + x^3}{\sin^2 3x}$.

3.6 $Z = \frac{\cos^2 2x}{x - 3y}$.

3.7 $Z = \frac{\sqrt{3x - 4y}}{\cos 5x}$.

3.8 $Z = \frac{\sin 3x}{\sqrt{2x - 3y}}$.

3.9 $Z = \frac{\cos^2 3x}{y^2 + 2x}$.

3.10 $Z = \frac{y - 4x}{3\sin^2 2x}$.

4. Дана функция $Z = f(x, y)$. Найдите экстремумы данной функции:

4.1 $Z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

4.2 $Z = x^3 + y^3 - 3xy$.

4.3 $Z = 2x^2 - 4xy + 3y^2 - 4x + 8y - 2$.

4.4 $Z = 8x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 6y - 1$.

4.5 $Z = xy(1 - x - y)$.

4.6 $Z = 4x^2 - 4xy + 2y^2 - 7x + 5y + 3$.

4.7 $Z = x^4 + y^4 - 4xy$.

4.8 $Z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

4.9 $Z = e^{x/2}(x + y^2)$.

4.10 $Z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

5. Измените порядок интегрирования:

5.1 a) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx =$

b) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{1-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy =$

5.2 a) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^3} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx =$

b) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2-4}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy =$

5.3 a) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx =$

b) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2-1}^{1-x^2} f(x,y)dy =$

5.4 a) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy =$

b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{2-x}^{\frac{1}{x}} f(x,y)dy =$

5.5 a) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx =$

b) $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{12-x} f(x,y)dy =$

5.6 a) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy =$

b) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{x}^{1-2x^2} f(x,y)dy =$

5.7 a) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy =$

b) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy =$

5.8 a) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy =$

b) $\int_{2}^{\frac{10}{3}} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{1}{2}x+1} f(x,y)dy =$

5.9 a) $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx =$

b) $\int_{-2}^{2} dx \int_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy =$

5.10 a) $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f(x,y)dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy =$

b) $\int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt{x}}^{3-x} f(x,y)dy =$

6. Вычислите интеграл:

6.1 $\iint_D (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy$, где $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}$.

6.2 $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy$, где $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

6.3 $\iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy$, где $D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}$.

6.4 $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy$, где $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.

6.5 $\iint_D (\frac{4}{5}xy + 9x^2y^2)dxdy$, где $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt{x}$.

6.6 $\iint_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x}$.

6.7 $\iint_D (6xy + 24x^3y^3)dxdy$, $D: x=1, y=-x^2, y=\sqrt{x}$.

6.8 $\iint_D (4xy + 16x^3y^3)dxdy$, $D: x=1, y=-x^3, y=\sqrt[3]{x}$.

6.9 $\iint_D (xy - 4x^3y^3)dxdy$, $D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt{x}$.

6.10 $\iint_D (12xy + 27x^2y^2)dxdy$, $D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt[3]{x}$.

7. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

7.1 $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $x=16$.

7.2 $x=27-y^2$, $x=-6y$.

7.3 $x=5-y^2$, $x=-4y$.

7.4 $y=\frac{3}{x}$, $y=8e^x$, $y=3$, $y=8$.

7.5 $y=20-x^2$, $y=-8x$.

7.6 $y=\frac{2}{x}$, $y=5e^x$, $y=2$, $y=5$.

7.7 $y=3\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $x=9$.

7.8 $y=3\sqrt{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $x=4$.

7.9 $y=\frac{3}{x}$, $y=4e^x$, $y=3$, $y=4$.

7.10 $x=8-y^2$, $x=-2y$.

8. Пластинка D задана ограничивающими её кривыми, μ - поверхностная плотность. Найдите массу пластинки.

8.1 $D: x=1$, $y=0$, $y^2=4x(y\geq 0)$; $\mu=7x^2+y$.

8.2 $D: x=2$, $y=0$, $y^2=2x(y\geq 0)$; $\mu=\frac{7}{8}x^2+2y$.

8.3 $D: x=2$, $y=0$, $y^2=\frac{x}{2}(y\geq 0)$; $\mu=4x+6y^2$.

8.4 $D: x=1$, $y=0$, $y^2=x(y\geq 0)$; $\mu=3x+6y^2$.

8.5 $D: x=\frac{1}{4}$, $y=0$, $y^2=16x(y\geq 0)$; $\mu=16x+\frac{9}{2}y^2$.

8.6 $D: x=1$, $y=0$, $y^2=4x(y\geq 0)$; $\mu=\frac{7}{2}x^2+5y$.

8.7 $D: x=2$, $y=0$, $y^2=\frac{x}{2}(y\geq 0)$; $\mu=6y+\frac{7}{2}x^2$.

8.8 $D: x=\frac{1}{2}$, $y=0$, $y^2=2x(y\geq 0)$; $\mu=4x+9y^2$.

8.9 $D: x=2$, $y=0$, $y^2=\frac{x}{2}(y\geq 0)$; $\mu=8y+\frac{7}{2}x^2$.

8.10 $D: x=1$, $y=0$, $y^2=4x(y\geq 0)$; $\mu=x+3y^2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров, Я. С. Высшая математика [Текст] : сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 3-е изд., испр. и доп. – Ростов на Дону : Издательство «Феникс», 1997. – 352 с.

2. Высшая математика [Текст] : учебно-методическое пособие / под ред. Л. З. Румшинского. – Москва, 1990. – 102 с.

3. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для вузов / под ред. профессора Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 471 с.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие для втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : «Высшая школа», 1999. – Часть 1. – 304 с.

5. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие / Л. А. Кузнецов. – 4-е изд.– М. : Издательство «Лань», 2005. – 240 с.

6. Линейная алгебра и основы математического анализа [Текст] : сборник задач по математике / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Издательство «Наука», 1981. – 464 с.

7. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. [Текст] / К. Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, Ю.А. Шевченко. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.

8. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс. [Текст] / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко. / под ред. С. Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

9. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] / В. П. Минорский. – М. : Издательство «Наука», 1964. – 360 с.

10. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике [Текст] / А. Д. Мышкис. – М. : Издательство «Наука», 1967. – 640 с.

11. Общий курс высшей математики для экономистов [Текст] : учебник / под ред. В. И. Ермакова. – М. : «Инфра М», 2002. – 656 с.

12. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2001. – 479 с.

13. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. – 3-е изд.– М. : Издательство «Высшая школа», 2003. – 304 с.

ISBN

Учебное издание

Анна Викторовна Швалёва

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Дифференциальное и интегральное исчисление
функции нескольких переменных**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

*Работа отпечатана с оригинал-макета,
предоставленного автором*

НФ НИТУ «МИСиС»
462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, дом 8