МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал

Кафедра математики и естествознания

А.В. Швалёва
Т.П. Филоненко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Курс лекций

Новотроицк, 2013

УДК 517
ББК 22.16
Ш – 33

Рецензенты:

Соколов А.А., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общеобразовательных и профессиональных дисциплин
Орского филиала ФГАОУ ВПО
«Самарский государственный университет путей сообщения»

Изаак Д.Д., старший преподаватель
кафедры математики и естествознания ФГАОУ ВПО «Национальный
исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал

Швалёва, А.В. Математический анализ. Введение в специальность. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: курс лекций / А.В. Швалёва, Т.П. Филоненко, 2013. –100 с.

В курсе лекций рассмотрены теоретические сведения (определения, формулы и их вывод, теоремы и их доказательства) по разделу «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной» математического анализа. Пособие предназначено для обеспечения самостоятельной работы студентов как очной, так и заочной формы обучения и ориентировано, прежде всего, на студентов технических специальностей.

Рекомендовано Методическим советом НФ НИТУ «МИСиС»

ISBN

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Данное пособие написано авторами на основе опыта чтения лекций, ведения практических занятий по математике для студентов заочной формы обучения. Авторы пособия предлагают вам помощь в изучении учебного курса: «Математика ч.1» («Высшая математика ч.1») в виде учебно-методического пособия «Математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Пособие содержит минимальный объем теоретического материала с подробным разбором решения типовых задач по темам:

– производная и дифференциал функции;

– применение производной к исследованию функций.

На основе данных тем составлена вторая часть контрольной работы № 1.

В начале каждой темы кратко излагаются основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения задач. Формулировки определений и теорем в основном приведены по книге, которая предлагается как основной учебник для студентов нашего филиала всех технических направлений: *Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст]: учебник для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2001. – 479 с.*

В пособии приводятся решения типовых задач, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения. При подборе задач были использованы различные сборники задач, которые указаны в библиографическом списке.

Пособие может быть использовано как для изучения перечисленных тем на практических занятиях под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения данного материала.

Прежде чем приступать к выполнению задач контрольной работы № 1, изучите теоретическую часть необходимой вам темы, разберите решения предлагаемых примеров, выполните примеры для самостоятельной работы. Если у вас не возникло вопросов, то вы можете приступать к выполнению второй части контрольной работы № 1. Все вопросы, возникающие при подготовке, вы можете задать преподавателю на индивидуальной консультации.

Авторы выражают надежду, что это учебно-методическое пособие существенно поможет студентам в изучении основ высшей математики и выполнении контрольной работы № 1.

ГЛАВА I. МНОЖЕСТВА. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1.1. Множество. Операции над множествами

Одним из основных понятий математики является множество. Понятие множества (как и понятия точки, числа, и т.д.) является аксиоматическим, то есть не имеющим определения. Объекты, составляющие множество, называются его *элементами*. Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Их элементами могут быть буквы, числа, атомы, уравнения, углы и т.д. В качестве примеров можно привести следующие: множество студентов на курсе, множество клеток человеческого организма, множество всех треугольников на плоскости и т.д.

Множество может быть задано перечислением его элементов: $M = \{1, 2\}$. Но не все множества можно задать списком. Если во множестве бесконечное количество элементов, то такой список составить нельзя. Множество считается заданным, если указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты. Такое свойство называется *характеристическим свойством множества*: $M = \{x|, P(x)\}$. Например, $A = \{x|, x^2 - 5x + 6 = 0\}$, то есть множество A состоящее из элементов x, удовлетворяющих уравнению $x^2 - 5x + 6 = 0$. Предложенное множество A можно задать и перечислением элементов $A = \{2, 3\}$.

Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, его элементы – строчечными. Если a – элемент множества A, то символически это можно записать следующим образом: $a \in A$, если элемент a не принадлежит множеству A, то это обозначают $a \notin A$.

Определение 1.1.1. Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым множеством и обозначают $\{\ \varnothing\ \}$.

Определение 1.1.2. Если каждый элемент множества A является в то же время элементом множества B, то говорят, что A – подмножество множества B и обозначают: $A \subset B$.

Каждое непустое множество A имеет по крайней мере два подмножества: пустое множество $\{\ \varnothing\ \}$ и само множество A. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Приведем примеры подмножеств:

1) $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A = \{2,3\}$, тогда $A \subset B$

2) множество всех равнобедренных треугольников является подмножеством множества всех треугольников и др.

Графической интерпретацией отношения $A \subset B$ может служить диаграмма Эйлера-Венна (рисунок 1.1.1).

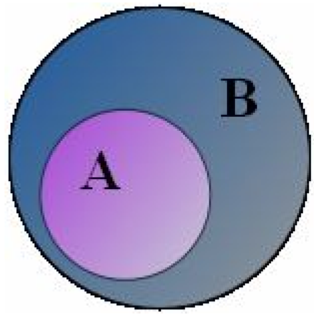


Рисунок 1.1.1 – Графическая интерпретация отношения $A \subset B$

Операции над множествами

Над множествами можно совершать различные операции, в результате которых из исходных множеств получаются новые. Рассмотрим некоторые из них.

Определение 1.1.3. Объединением двух множеств *A* и *B*, называют множество *X*, состоящее из элементов, которые входят хотя бы в одно из этих множеств.

Обозначение: $A \cup B = \{x|, x \in A \quad или \quad x \in B\}$

Пример: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{8,9\}$. Тогда $A \cup B = \{1,2,3,8,9\}$

Определение 1.1.4. Пересечением двух множеств *A* и *B* называют множество *X*, содержащие только те элементы, которые входят и во множество *A* и во множество *B*.

Обозначение: $A \cap B = \{x|, x \in A \quad и \quad x \in B\}$

Пример: $A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,8,9\}$. Тогда $A \cap B = \{1,2\}$

Определение 1.1.5. Разностью двух множеств *A* и *B* называют множество *X,* в которое входят все элементы множества *A*, не принадлежащие множеству *B*.

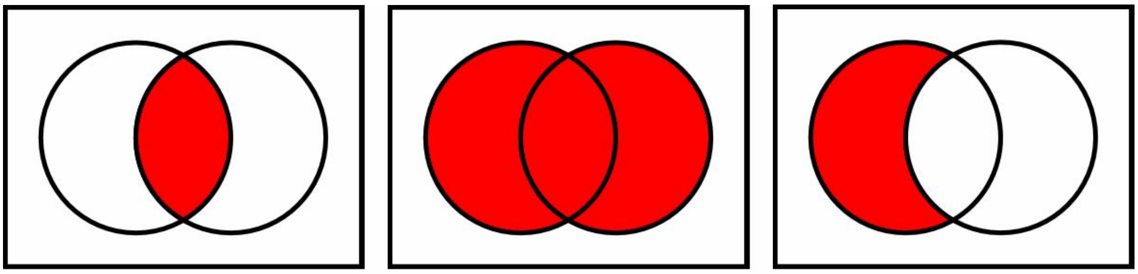
Обозначение: $A/B = \{x|, x \in A \quad и \quad x \notin B\}$

Пример: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,8,9\}$. Тогда $A/B = \{3\}$.

Определение 1.1.6. Декартовым произведением двух множеств *A* и *B* называют множество *X*, состоящее из пар (x, y), где *x* из множества *A*, а *y* из множества *B*.

Обозначение: $A \times B = \{(x, y)|, x \in A, y \in B\}$

Для лучшего понимания смысла этих операций используются диаграммы Эйлера-Венна (рисунок 1.1.2).



$A \cap B$ $A \cup B$ A / B

Рисунок 1.1.2. – Графическая интерпретация операций над множествами

В математике особую роль играют множества, элементами которых являются числа, это так называемые *числовые множества*. Рассмотрим примеры числовых множеств.

1. Множество натуральных чисел $N = \{1;2;3;4;5...;n;...\}$. Данное множество имеет наименьший элемент; не имеет наибольшего элемента; упорядоченное; не плотное.

2. Множество целых чисел $Z = \{... -3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$, то есть множество, которое получается как объединение множества натуральных чисел, множества противоположных чисел и нуля. Данное множество не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов, упорядоченное, не плотное.

3. Множество рациональных чисел $Q = \left\{\frac{m}{n} \middle|, \mathrm{m} \in \mathrm{Z}, \mathrm{n} \in N\right\}$. Данное множество не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов; упорядоченное; плотное (то есть для любых элементов p и $q \in Q$, найдется хотя бы одно рациональное число $a \in Q$, которое можно поместить между p и q, то есть $\mathrm{p} < \mathrm{a} < \mathrm{q}$). Рациональные числа могут быть представлены в виде конечных или бесконечных периодических дробей ($0,(35) = \frac{35}{99}$; $0,3 = \frac{3}{10}$)

4. Числа, которые представляются бесконечными, но непериодическими десятичными дробями, называются иррациональными числами. Множество иррациональных чисел символически обозначается I.

5. Объединение рациональных и иррациональных чисел называется множеством действительных чисел и обозначается $R = Q \cup I$. Данное множество не имеет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, упорядоченное, плотное.

Наряду с перечисленными числовыми множествами, часто употребляемыми являются также отрезок и интервал.

Определение 1.1.7. Пусть даны два числа a и b, причем $a < b$. Отрезком (сегментом) называется множество таких x, для которых выполняется неравенство $a \le x \le b$.

Обозначение: $[a,b] = \{x|,\ a \le x \le b\}$.

Определение 1.1.8. Пусть даны два числа a и b, причем $a < b$. Интервалом называется множество таких x, для которых выполняется неравенство $a < x < b$.

Обозначение: $(a,b) = \{x|,\ a < x < b\}$.

Определение 1.1.9. Бесконечными интервалами называются множества таких x, для которых выполняются неравенства $x > a$; $x \ge a$; $x < b$; $x \le b$

Определение 1.1.10. Окрестностью точки x_0 во множестве действительных чисел R, называется любой интервал, содержащий точку x_0.

Все рассмотренные множества называются промежутками.

Грани числовых множеств

Определение 1.1.10. Числовое множество A называется ограниченным сверху, если существует такое число C, что для любого элемента $x \in A$ выполняется неравенство: $x \le C$.

Число C называется верхней гранью множества.

Если множество ограничено сверху, то оно имеет бесчисленное множество верхних граней.

Наименьшая из верхних граней множества называется *точной верхней гранью* множества и обозначается $SupA$ (от латинского *supretum* – наивысший).

Определение 1.1.11. Числовое множество A называется ограниченным снизу, если существует такое число c, что для любого элемента $x \in A$ выполняется неравенство: $x \ge c$.

Число c называется нижней гранью множества.

Если множество ограничено снизу, то оно имеет бесчисленное множество нижних граней.

Наибольшая из нижних граней множества называется *точной нижней гранью* множества и обозначается $InfA$ (от латинского *infinum* – наименьший).

Пример: Определите, является ли множество $A=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};....;\frac{n}{n+1};...\right\}$ ограниченным. Если является, установите, какие числа являются его гранями. Найдите точные верхнюю и нижнюю грани этого множества.

Решение. При любом натуральном n выполняется неравенство $\frac{1}{2}\le\frac{n}{n+1}\le 1$, поэтому данное множество A ограничено. В качестве верхней грани может быть значение 2 или 3 и т.д., однако наименьшей из всех верхних граней является значение 1, то есть $SupA=1$. В качестве нижней грани может быть значение 0,-1 и т.д., однако наибольшей их всех нижних граней является значение $\frac{1}{2}$, то есть $InfA=\frac{1}{2}$.

Следует отметить, что множество, ограниченное снизу, имеет бесчисленное множество нижних граней, однако точная нижняя грань – одна (множество, ограниченное сверху, имеет бесчисленное множество верхних граней, однако точная верхняя грань – одна). Точная нижняя грань (точная верхняя грань) может как принадлежать множеству, так и не принадлежать ему. Так, в предыдущем примере, $InfA=\frac{1}{2}\in A$, а $SupA=1\notin A$.

1.2 Числовая последовательность. Основные понятия

Последовательность, как и множество, также является одним из ключевых понятий математики.

Определение 1.2.1. Если каждому числу n из множества натуральных чисел поставлено в соответствие действительное число a_n, то множество таких действительных чисел называется числовой последовательностью.

Обозначение: $\{a_n\}$. Другими словами, последовательность – упорядоченное множество действительных чисел.

Последовательность считается заданной, если указан закон, по которому каждому натуральному числу ставится в соответствие действительное число a_n. Наиболее простой способ задания последовательности – *аналитический*, то есть её задание с помощью формулы общего члена.

Например: $\left\{a_n=\frac{n}{n+1}\right\}=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\frac{5}{6};....;\frac{n}{n+1};...\right\}$.

Другим важным способом задания последовательности является так называемый *рекуррентный* (от латинского слова рекурсия – возврат) способ, при котором задается выражение, связывающее n-ый член последовательности с одним или несколькими предыдущими. Вычисляя новый, очередной член последовательности, мы как бы возвращается назад, к уже вычисленным, предыдущим членам.

Например: Дано рекуррентное соотношение $a_n = a_{n-1} + 2$ вместе с условием $a_1 = 1$. Найдем несколько первых членов последовательности.

$a_2 = a_1 + 2 \to a_2 = 1 + 2 = 3$;

$a_3 = a_2 + 2 \to a_3 = 3 + 2 = 5$;

$a_4 = a_3 + 2 \to a_4 = 5 + 2 = 7; \ldots$

Таким образом, заданная последовательность будет иметь вид:

$\{a_n\} = \{1;3;5;7;....\}$, то есть получили последовательность нечетных чисел.

Последовательность может быть задана *словесным описанием*, в котором определяется процесс построения членов последовательности.

Например: «a_n – это *n-ое* простое число». Данная последовательность задается следующими членами: $\{a_n\} = \{2;3;5;7;11;13;....\}$; значения членов берутся из таблицы простых чисел.

Элементы числовой последовательности можно изображать графически точками числовой прямой.

Действия над последовательностями

1. Умножение последовательности на число.

Рассмотрим последовательность $\{a_n\} = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5;....; a_n;...\}$ и число c. Тогда произведением последовательности на число называется последовательность вида:

$$c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\} = \{ca_1; ca_2; ca_3; ca_4; ca_5;....; ca_n;...\}$$

2. Сложение и вычитание последовательностей.

Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Суммой $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность вида:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3; a_4 + b_4; a_5 + b_5;....; a_n + b_n;...\}$$

Разностью $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность вида:

$$\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\} = \{a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3; a_4 - b_4; a_5 - b_5;....; a_n - b_n;...\}$$

3. Умножение и деление последовательностей.

Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Произведением последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность вида:

$$\{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_n\cdot b_n\}=\{a_1\cdot b_1;a_2\cdot b_2;a_3\cdot b_3;a_4\cdot b_4;a_5\cdot b_5;....;a_n\cdot b_n;...\}$$

Частным двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называется последовательность вида (если все члены последовательности $\{b_n\}$ отличны от нуля):

$$\{a_n\}\div\{b_n\}=\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}=\{a_1/b_1;a_1/b_2;a_3/b_3;a_4/b_4;a_5/b_5;....;a_n/b_n;...\}.$$

1.3 Свойства числовых последовательностей

Определение 1.3.1. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует число M (m) такое, что любой элемент последовательности удовлетворяет неравенству $a_n \le M$ ($a_n \ge m$).

Пример: $\{a_n = \ln n\} = \{\ln 1; \ln 2; \ln 3; \ln 4;...\}$ – является ограниченной снизу, так как можно указать такое число m, что все элементы последовательности располагаются правее этого числа, например $m = 0$.

Определение 1.3.1. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу, то есть для неё найдутся такие значения m и M, что любой элемент последовательности удовлетворяет неравенству $m \le a_n \le M$.

Геометрически это означает, что все элементы ограниченной последовательности находятся на сегменте конечной длины с концами m и M.

Пример: $\left\{a_n = \frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};...\right\}$ – является ограниченной последовательностью, так как все её элементы можно разместить на сегменте конечной длины, например $[0;1]$.

Определение 1.3.2. Последовательность $\{a_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого положительного числа k, найдется элемент последовательности a_n, для которого выполняется неравенство $|a_n| > k$.

Геометрически это означает, что для любого сегмента конечной длины $[-k;k]$ существуют элементы a_n данной последовательности, расположенные за пределами этого сегмента; то есть элементы неограниченной последовательности невозможно поместить на сегмент конечной длины.

Пример: $\{a_n = (-1)^{n+1} \cdot n\} = \{1;-2;3;-4;5;-6;7;..\}$ – является неограниченной последовательностью.

Определение 1.3.3. Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей*, если каждый последующий член последовательности больше предыдущего, то есть $\forall_{n \in N}$ справедливо неравенство $a_{n+1} > a_n$.

Пример: $\left\{a_n = \dfrac{n}{2n+1}\right\} = \left\{\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{5};\dfrac{3}{7};\dfrac{4}{9};...\right\}$ – является монотонно возрастающей последовательностью.

Определение 1.3.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется *убывающей*, если каждый последующий член последовательности меньше предыдущего, то есть $\forall_{n \in N}$ справедливо неравенство $a_{n+1} < a_n$.

Пример: $\left\{a_n = \dfrac{n}{5^n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{5};\dfrac{2}{25};\dfrac{3}{125};\dfrac{4}{625};...\right\}$ – является монотонно убывающей последовательностью.

Определение 1.3.5. Последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей*, если каждый последующий член последовательности больше или равен предыдущему члену последовательности, то есть $\forall_{n \in N}$ справедливо неравенство $a_{n+1} \geq a_n$.

Определение 1.3.6. Последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей*, если каждый последующий член последовательности меньше или равен предыдущему члену последовательности, то есть $\forall_{n \in N}$ справедливо неравенство $a_{n+1} \leq a_n$.

Невозрастающие, неубывающие, возрастающие, убывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями, возрастающие и убывающие называются *строго монотонными* последовательностями.

1.4 Предел последовательности

В этом параграфе мы рассмотрим одно из основных понятий математического анализа – понятие предела числовой последовательности.

Рассмотрим примеры некоторых числовых последовательностей.

<u>Пример 1.4.1.</u> $x_n = \dfrac{1}{n}; \{x_n\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, ...\right\}$.

Изобразим элементы этой последовательности графически (рисунок 1.4.1).

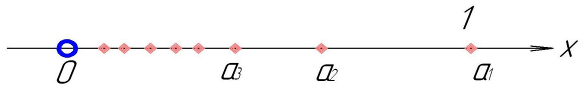


Рисунок 1.4.1 – Графическое изображение элементов последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$

График состоит из отдельных точек, расположенных на числовой прямой. Из графика видно, что элементы этой последовательности с возрастанием номера становятся близкими к нулю или говорят, что элементы x_n стремятся к нулю. Символически эту фразу можно записать следующим образом $x_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 1.4.2. $b_n = \dfrac{n}{n+1}; \{b_n\} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots\right\}.$

Отметим элементы последовательности на числовой прямой (рисунок 1.4.2).

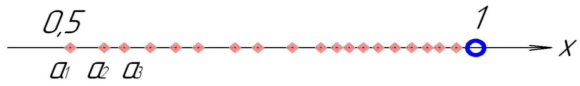


Рисунок 1.4.2 – Графическое изображение элементов последовательности $b_n = \dfrac{n}{n+1}$

Очевидно, что с возрастанием номера, элементы данной последовательности стремятся к единице, то есть $b_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Пример 1.4.3. $y_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}; \ \{y_n\} = \left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \ldots\right\}.$

Нанесем элементы последовательности на числовую прямую (рисунок 1.4.3).

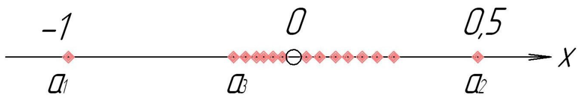


Рисунок 1.4.3 – Графическое изображение элементов последовательности $y_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$

График последовательности свидетельствует нам о том, что с возрастанием порядкового номера, её элементы стремятся к нулю, то есть $y_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Из приведенных примеров видно, что с возрастанием номера элементы этих последовательностей стремятся к некоторому числу, то есть имеют конечный предел.

Определение 1.4.1 Число a называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер, зависящий от ε, $N = N(\varepsilon)$, что для всех элементов числовой последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Символически предел числовой последовательности обозначают следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a .$$

Из сформулированного определения следует его *геометрический смысл*:

Если числовая последовательность $\{a_n\}$ имеет пределом число a, то это означает, что для любого, выбранного нами положительного числа ε, можно указать номер элемента последовательности $n = N + 1$, начиная с которого, бесчисленное множество элементов последовательности $\{a_{N+!}, a_{N+2}, a_{N+3}, ...\}$ находятся в интервале $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, а также можно указать конечное число элементов $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_N\}$, которые останутся за пределами указанного интервала.

Определение 1.4.2 Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется ε – окрестностью точки a.

Характер стремления элементов числовой последовательности к своему пределу может быть различным. Так, например, последовательность $\{x_n\}$, рассмотренная в примере 1.4.1, стремится к нулю, убывая. Последовательность $\{b_n\}$, которую мы рассмотрели в примере 1.4.2, стремится к своему пределу, к единице, возрастая. Числовая последовательность $\{y_n\}$, с которой мы встретились в примере 1.4.3, стремится к нулю таким образом, что её элементы становятся поочередно то больше нуля, то меньше нуля.

Докажем, что предел последовательности $x_n = \dfrac{1}{n}$ равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Для доказательства выберем произвольное положительное число ε. Тогда по определению предела числовой последовательности 1.4.1

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{, то есть}$$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Найдем номер элемента $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Из последнего неравенства следует, что можно указать номер N, равный целой части числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$, то есть $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Таким образом, элементы числовой последовательности с номерами $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ попадут в ε – окрестность числа $a = 0$. Итак, мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n} = 0$.

Предлагаем Вам сделать это самостоятельно.

Определение 1.4.3. Числовая последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся; не имеющая конечного предела – расходящейся.

Отметим важные свойства сходящихся последовательностей:

1. Последовательность, имеющая предел, ограничена.
2. Последовательность может иметь только один предел.
3. Любая неубывающая (невозрастающая) и ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел.
4. Всякая постоянная последовательность, элементы которой равны числу a, сходится к этому числу, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$.

Сформулируем также теоремы о пределах, которые будут помогать нам при вычислении пределов числовых последовательностей.

Теорема 1.4.1. Алгебраическая сумма сходящихся числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность $\{x_n + y_n\}$, предел которой равен алгебраической сумме пределов этих последовательностей, то есть

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 1.4.2. Произведение сходящихся числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность $\{x_n y_n\}$, предел которой равен произведению пределов этих последовательностей, то есть

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\leftarrow\infty} y_n .$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть

$$\lim_{n\to\infty} Cx_n = C\lim_{n\to\infty} x_n, \text{ где } C = const .$$

Теорема 1.4.3. Частное сходящихся числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, предел которой равен частному пределов этих последовательностей, при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} .$$

Рассмотрим предельный переход в неравенствах.

Теорема 1.4.4. Если элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера удовлетворяют неравенству $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$, то и предел этой последовательности также удовлетворяет неравенству $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq b$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b\right)$.

Следствие 1.4.4.-1. Если элементы сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \leq y_n$, то и их пределы также удовлетворяют неравенству $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Следствие 1.4.4.-2. Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ сходятся на отрезке $[a,b]$, то и её предел также находится на этом отрезке.

Теорема 1.4.5. Пусть соответствующие элементы трёх сходящихся последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ удовлетворяют неравенству $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех $n \in N$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ также сходится к этому пределу, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

1.5 Бесконечно большие и бесконечно малые числовые последовательности, их свойства

При рассмотрении числовых последовательностей, особую роль играют, так называемые, бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности. Рассмотрим эти понятия.

Определение 1.5.1. Числовая последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого положительного числа ε существует номер элемента N такой, что для всех элементов числовой последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Из определения бесконечно малой числовой последовательности следует, что её предел равен нулю при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Из рассмотренных ранее в пункте 1.4 примеров следует, что числовые последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ являются бесконечно малыми, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых последовательностей.

Теорема 1.5.1. Алгебраическая сумма двух бесконечно малых числовых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Эта теорема означает, что если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ также является бесконечно малой.

Символически это можно записать следующим образом $0 \pm 0 = 0$.

Замечание. Эта теорема справедлива для любого конечного числа бесконечно малых последовательностей.

Теорема 1.5.2. Произведение двух бесконечно малых числовых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Из теоремы следует, что если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то последовательность $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ - бесконечно малая.

Символически эта теорема выглядит так: $0 \cdot 0 = 0$.

Замечание. Произведение любого конечного числа бесконечно малых числовых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Теорема 1.5.3. Произведение бесконечно малой числовой последовательности на ограниченную последовательность есть последовательность бесконечно малая.

Таким образом, если последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, а последовательность $\{b_n\}$ – ограниченная, то числовая последовательность $\{\alpha_n \cdot b_n\}$ является бесконечно малой.

Замечание. Очевидно, что произведение бесконечно малой последовательности на постоянное число является последовательностью бесконечно малой, то есть если последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, C – некоторое число, то последовательность $\{C\alpha_n\}$ является бесконечно малой.

Наряду с бесконечно малыми числовыми последовательностями существуют и бесконечно большие последовательности.

Определение 1.5.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A существует номер N такой, что для всех элементов этой последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > A$.

Это означает, что если число A является пределом последовательности $\{x_n\}$, то все элементы последовательности с номерами больше числа N, то есть $\{x_{N+1}, x_{N+2}, ...\}$ будут находиться $x_n \in (-\infty; -A) \cup (A; +\infty)$.

Очевидно, что если числовая последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Например, числовая последовательность $\{x_n\} = \{2n\} = \{2,4,6,..\}$ является бесконечно большой, так как с возрастанием номера элементы этой последовательности стремятся к плюс бесконечности, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Очевидно, что числовая последовательность $\{x_n\} = \{-2n\} = \{-2,-4,-6,..\}$ также является бесконечно большой, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Причем, если рассмотреть числовую последовательность $\{x_n\} = \left\{(-1)^n 2n\right\} = \{-2,4,-6,..\}$, то совершенно очевидно, что элементы этой последовательности при $n \to \infty$ стремятся к бесконечности, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Таким образом, все рассмотренные выше числовые последовательности являются бесконечно большими.

Отметим некоторые свойства бесконечно больших последовательностей.

Теорема 1.5.4. Сумма двух бесконечно больших числовых последовательностей есть последовательность бесконечно большая.

Формулировка теоремы означает, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечно большие последовательности, то числовая последовательность $\{x_n + y_n\}$ также является бесконечно большой. Символически эту теорему можно записать следующим образом: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$,то есть $\infty + \infty = \infty$.

Теорема 1.5.5. Произведение двух бесконечно больших числовых последовательностей есть последовательность бесконечно большая.

Из теоремы вытекает, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечно большие последовательности, то числовая последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ также является бесконечно большой. Символически эту теорему можно записать следующим образом: если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \infty$, то есть $\infty \cdot \infty = \infty$.

Замечание. Теоремы 1.5.4 (1.5.5) справедливы для любого конечного числа слагаемых (сомножителей).

Теорема 1.5.6. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность и все её члены отличны от нуля, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая, и. наоборот, если последовательность $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая $\alpha_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая.

Символически это можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\infty} = 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{0} = \infty .$$

1.6 Второй замечательный предел. Число е

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Найдем несколько первых элементов этой последовательности

$$\{x_n\} = \left\{2; \frac{9}{4}; \frac{64}{27}; \ldots\right\}.$$

Можно доказать, что эта последовательность будет возрастающей $x_{n+1} > x_n$ и ограниченной сверху $x_n < 3$, а следовательно сходящейся, то есть она имеет предел.

Причем $2 \le \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$. Было доказано, что пределом этой последовательности является иррациональное число, которое обозначают буквой e. Его приближенное значение с точностью до 10^{-6} составляет $e \approx 2{,}718282$.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Этот предел называется вторым замечательным пределом. С помощью этого предела устраняют математическую неопределенность вида $\left[1^\infty\right]$.

Число e играет большую роль в математике. В частности оно является основанием показательной функции $y=e^x$, основанием натурального логарифма $\ln x = \log_e x$.

1.7 Числовые последовательности и их пределы в задачах

<u>Пример 1.7.1.</u> Напишите первые четыре члена последовательности $\{a_n\}$, если:

1) $a_n = \frac{n+1}{n^2}$; 2) $a_n = 2^{n+1}$; 3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 4) $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$.

Решение. 1) Для отыскания первого члена последовательности с общим членом $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ необходимо вместо n в формуле общего члена поставить значение 1:

$$a_1 = \frac{1+1}{1^2} = \frac{2}{1} = 2.$$

Для отыскания второго члена последовательности в формулу вместо n необходимо подставить значение 2:

$$a_2 = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}.$$

Аналогичным образом найдем третий и четвертый члены последовательности:

$$a_3 = \frac{3+1}{3^2} = \frac{4}{9};$$

$$a_4 = \frac{4+1}{4^2} = \frac{5}{16}.$$

2) Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = 2^{n+1}$. Определим первые четыре члена последовательности. Для этого в общий член последовательности вместо n подставим числовые значения 1,2,3 и 4 соответственно:

$$a_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4;$$

$$a_2 = 2^{2+1} = 2^3 = 8;$$

$$a_3 = 2^{3+1} = 2^4 = 16;$$

$$a_4 = 2^{4+1} = 2^5 = 32.$$

3) Для отыскания первого члена последовательности с общим членом $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ подставим вместо n значение 1:

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Для отыскания второго члена последовательности подставим вместо n значение 2:

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично определим третий и четвертый члены последовательности:

$$a_3 = \frac{(-1)^3}{3} = \frac{-1}{3}; \qquad a_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

4) Определим первые четыре члена последовательности $a_n = \sin\frac{\pi n}{2}$.

$$a_1 = \sin\frac{1\cdot\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1; \quad a_2 = \sin\frac{2\cdot\pi}{2} = \sin\pi = 0;$$

$$a_3 = \sin\frac{3\cdot\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2} = -1; \qquad a_4 = \sin\frac{4\cdot\pi}{2} = \sin 2\pi = 0.$$

Пример 1.7.2. Напишите первые три члена последовательности, если: 1) $a_n = a_{n-1} + 2$, и $a_1 = 1$; 2) $a_n = -n\cdot a_{n-1}$, и $a_1 = 1$.

Решение. 1) Для первого случая известно, что $a_1 = 1$. Найдем по предложенной формуле $a_n = a_{n-1} + 2$ значение второго члена последовательности:

$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3.$$

Третий член последовательности определим опять опираясь на формулу $a_n = a_{n-1} + 2$, учитывая, что $a_2 = 3$:

$$a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5.$$

2) Определим второй член последовательности, используя равенства $a_n = -n \cdot a_{n-1}$ и $a_1 = 1$:

$$a_2 = -2 \cdot a_1 = -2 \cdot 1 = -2.$$

Третий член последовательности определится аналогичным образом:

$$a_3 = -3 \cdot a_2 = -3 \cdot (-2) = 6.$$

<u>Пример 1.7.3.</u> Зная несколько первых членов последовательности $\{a_n\}$, напишите формулу её общего члена: 1) 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$…; 2) 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$,…; 3) -1,2,-3,4,-5, …

Решение. 1) Рассмотрим последовательность 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$…; и проанализируем её. Первый член последовательности можно представить в виде $1 = \frac{1}{1}$, тогда числитель каждого члена последовательности равен единице. Рассмотрим знаменатели членов последовательности: 1,3,5,7 …– представляют собой арифметическую прогрессию с первым членом равным единице, и знаменателем, равным двум. Любой член арифметической прогрессии можно отыскать по формуле: $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$. Для нашей прогрессии $a_1 = 1$, $d = 2$, тогда $a_n = a_1 + d \cdot (n-1) = 1 + 2 \cdot (n-1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.

Тогда общий член последовательности можно записать в виде: $\left\{a_n = \frac{1}{2n-1}\right\} = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots\right\}$.

2) Определим общий член последовательности 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$,… Первый член последовательности можно представить в виде $1 = \frac{1}{1}$, тогда числитель каждого члена последовательности равен единице. Рассмотрим знаменатели членов последовательности: 1, 4, 9, 16, 25… – эти значения представляют собой квадраты натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5 … Общий член последовательности можно записать в виде: $\left\{a_n = \frac{1}{n^2}\right\} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$

3) Рассмотрим последовательность -1,2,-3,4,-5, …. Отметим, что члены этой последовательности чередуются по знаку, поэтому общий член последовательности

будет содержать множитель $(-1)^n$. Общий член последовательности можно записать в виде: $\{a_n = (-1)^n \cdot n\} = \{-1,2,-3,4,...\}$

<u>Пример 1.7.4.</u> Найдите последовательности $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$, если $a_n = (-1)^n$, а $b_n = (-2)^n$.

Решение. Членами последовательности $a_n = (-1)^n$ будут являться значения $a_n = (-1)^n = \{-1;1;-1;1;-1...\}$; членами последовательности $b_n = (-2)^n = \{-2;4;-8;16;-32...\}$. Рассмотрим последовательность вида $\{a_n + b_n\}$:

$$\{a_n + b_n\} = \{a_n\} + \{b_n\} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3; a_4 + b_4; a_5 + b_5;....; a_n + b_n;...\} =$$
$$= \{-1 + (-2); 1 + 4; -1 + (-8); 1 + 16; -1 + (-32)...\} = \{-3;5;-9;17;-33...\}.$$

Определим вид последовательности $\{a_n - b_n\}$:

$$\{a_n - b_n\} = \{a_n\} - \{b_n\} = \{a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3; a_4 - b_4; a_5 - b_5;....; a_n - b_n;...\} =$$
$$= \{-1 - (-2); 1 - 4; -1 - (-8); 1 - 16; -1 - (-32)...\} = \{1;-3;7;-15;31...\}.$$

Определим последовательность вида: $\{a_n \cdot b_n\}$:

$$\{a_n \cdot b_n\} = \{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_1 \cdot b_1; a_2 \cdot b_2; a_3 \cdot b_3; a_4 \cdot b_4; a_5 \cdot b_5;....; a_n \cdot b_n;...\} =$$
$$= \{-1 \cdot (-2); 1 \cdot 4; -1 \cdot (-8); 1 \cdot 16; -1 \cdot (-32)...\} = \{2;4;8;16;32...\}.$$

Определим последовательность вида: $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$.

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \{a_n\} \div \{b_n\} = \{a_1/b_1; a_1/b_2; a_3/b_3; a_4/b_4; a_5/b_5;....; a_n/b_n;...\} =$$
$$= \left\{\frac{-1}{-2}; \frac{1}{4}; \frac{-1}{-8}; \frac{1}{16}; \frac{-1}{-32};...\right\} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32};...\right\}.$$

<u>Пример 1.7.5</u>. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{3n^2 + 5}$.

Решение. Воспользуемся теоремами 1.4.3 и 1.4.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3n^2 + 5} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} 3n^2 + \lim\limits_{n\to\infty} 5} = \frac{2}{\infty + 5} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

<u>Пример 1.7.6.</u> Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + n - 7}{3n^2 + 5}$.

Решение. Воспользуемся теоремами 1.4.3 и 1.4.1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-7}{3n^2+5}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2n^2+\lim\limits_{n\to\infty}n-\lim\limits_{n\to\infty}7}{\lim\limits_{n\to\infty}3n^2+\lim\limits_{n\to\infty}5}=\frac{\infty}{\infty+5}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Говорят, что в этом случае мы имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Чтобы вычислить предел необходимо устранить неопределенность. Для её устранения нужно числитель и знаменатель дроби $\frac{2n^2+n-7}{3n^2+5}$ почленно разделить на старшую степень n, то есть на n^2. Получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-7}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^2}}{3+\frac{5}{n^2}}=\frac{2+\frac{1}{\infty}-\frac{7}{\infty}}{3+\frac{5}{\infty}}=\left[т.к.\frac{1}{\infty}=0\right]=\frac{2+0-0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

<u>Пример 1.7.7</u>. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{4n^3+7}$.

Решение. Воспользуемся теоремами 1.4.3 и 1.4.1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-1}{4n^3+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{bmatrix}поделим & почленно\\ на & n^3\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{4+\frac{7}{n^3}}=$$

$$=\frac{0+0-0}{4+0}=\frac{0}{4}=0.$$

<u>Пример 1.7.8.</u> Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-2}{n-4}$.

Решение. Воспользуемся теоремами 1.4.3 и 1.4.1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n-2}{n-4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{bmatrix}поделим & почленно\\ на & n^2\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}}=\frac{3+0-0}{0+0}=\frac{3}{0}=\infty.$$

<u>Пример 1.7.9.</u> Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}$.

Решение. При $n\to\infty$ последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}\to 1^{\infty}$, то есть к математической неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$, Воспользуемся формулой второго замечательного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ и представим наш предел в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^3\right) = \left[\begin{matrix}\textit{воспользуемся} & \textit{теоремой} & \textit{о} \\ \textit{пределе} & \textit{произведения} & \end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = e\cdot 1^3 = e.$$

Пример 1.7.10. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$.

Решение: При $n\to\infty$ последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} \to 1^\infty$, то есть к математической неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$, которая устраняется с помощью второго замечательного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Представим наш предел в виде $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^3 = e^3$.

Пример 1.7.11. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{6n}$.

Решение. При $n\to\infty$ последовательность $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{6n} \to 1^\infty$, то есть к математической неопределенности вида $\left[1^\infty\right]$, которую можно устранить с помощью второго замечательного предела. Воспользуемся этой формулой $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Для этого представим наш предел в виде:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{6n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{12} = e^{12}.$$

Пример 1.7.12. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{5n}$.

Решение. При $n \to \infty$ последовательность $\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{5n} \to 1^{\infty}$, то есть к математической неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$. Для её устранения воспользуемся формулой второго замечательного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$ и представим наш предел в виде:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{3}}\right)^{\frac{3}{n+1}\cdot 5n} =$$

$$\begin{bmatrix} \textit{следуя} \quad \textit{формуле} \quad \textit{второго} \\ \textit{замечательного} \quad \textit{предела} \end{bmatrix} = e^{\frac{15n}{n+1}}.$$

Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n}{n+1}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15n}{n+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{bmatrix} \textit{поделим} \quad \textit{почленно} \\ \textit{на} \quad n \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{15}{1+\frac{1}{n}} = 15.$$

Тогда искомый предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n+1}\right)^{5n} = e^{15}$.

<u>Пример 1.7.13.</u> Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{3n+2}\right)^{2n-7}$.

Решение. При $n \to \infty$ последовательность $\left(1-\frac{4}{3n+2}\right)^{2n-7} \to 1^{\infty}$, то есть к математической неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$, устраним неопределенность с помощью второго замечательного предела.

Представим наш предел в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{3n+2}\right)^{2n-7} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{3n+2}\right)^{\frac{3n+2}{-4}}\right)^{\frac{-4}{3n+2}(2n-7)} =$$

$$\begin{bmatrix} \textit{по} \quad \textit{формуле} \quad \textit{второго} \\ \textit{замечательного} \quad \textit{предела} \end{bmatrix} == e^{\frac{-4(2n-7)}{3n+2}}.$$

Найдем предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4(2n-7)}{3n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4(2n-7)}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8n+28}{3n+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{bmatrix}\textit{поделим} & \textit{почленно}\\ \textit{на} & n\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{-8+\frac{28}{n}}{3+\frac{2}{n}}=-\frac{8}{3}.$$

Тогда искомый предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{3n+2}\right)^{2n-7}=e^{-\frac{8}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^8}}$.

Пример 1.7.14. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{3n+7}\right)^{4n-1}$.

Решение. При $n\to\infty$ последовательность $\left(\dfrac{3n-5}{3n+7}\right)^{4n-1}\to 1^{\infty}$, то есть к математической неопределенности вида $\left[1^{\infty}\right]$. Как мы уже видели в предыдущих примерах этот вид неопределенности устраняется с помощью второго замечательного предела, то есть по формуле $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$. Представим заданный предел в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-5}{3n+7}\right)^{4n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-5}{3n+7}-1\right)^{4n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n-5-3n-7}{3n+7}\right)^{4n-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-12}{3n+7}\right)^{4n-1}==\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-12}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7}{-12}}\right)^{\frac{-12}{3n+7}(4n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-12}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7}{-12}}\right)^{\frac{-48n+12}{3n+7})}=e^{\frac{-48n+12}{3n+7}}.$$

Найдем предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-48n+12}{3n+7}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-48n+12}{3n+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{bmatrix}\textit{поделим} & \textit{почленно}\\ \textit{на} & n\end{bmatrix}=\lim_{n\to\infty}\frac{-48+\frac{12}{n}}{3+\frac{7}{n}}=-\frac{48}{3}=-16$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-5}{3n+7}\right)^{4n-1}=e^{-16}=\dfrac{1}{e^{16}}$.

ГЛАВА II. ФУНКЦИЯ. ЕЁ ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

2.1 Функция, её свойства

При изучении всевозможных явлений природы, решении технических задач, приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от другой.

Определение 2.1.1. Если каждому значению переменной x из некоторой области соответствует единственное значение другой переменной y, то y – есть функция от x, или в символической записи $y = f(x)$.

Переменная x называется независимой переменной или аргументом; y называют зависимой переменной; зависимость переменных x и y называют функциональной зависимостью; буква f в символической записи функциональной зависимости указывает, что над значением x нужно произвести какие-либо операции, чтобы получить значение y.

Определение 2.1.2. Совокупность значений x, для которых определяются значения функции y в силу правила $y = f(x)$, называется областью определения функции и обозначается $D(y)$ или $D(f)$.

<u>Пример 2.1.1.</u> Найдите область определения функции $y = \cos x$.

Решение. Функция $y = \cos x$ определена при всех значениях x, значит, её областью определения будет бесконечный интервал $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$.

<u>Пример 2.1.2.</u> Найдите область определения функции $y = \dfrac{\lg x}{x-5}$.

Решение. Область определения данной функции определится двумя условиями: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 5 \neq 0 \end{cases}$. Решая данную систему, получим область определения функции: $D(y): x \in (0;5) \cup (5;+\infty)$.

Способами задания функции являются:

1) табличный (в определенной последовательности записываются значения аргумента x и соответствующие значения функции y);

2) графический (в прямоугольной системе координат дана совокупность точек, причем никакие две точки не лежат на прямой, параллельной оси Oy – эта совокупность точек определяет некоторую однозначную функцию $y = f(x)$, где значениями аргумента являются абсциссы точек, значениями функции – соответствующие ординаты);

3) аналитический (с помощью формулы $y = f(x)$).

Определение 2.1.3. Основными элементарными функциями называются следующие аналитическим способом заданные функции:

- степенная функция ($y = x^{\alpha}$, где α – действительное число);
- показательная функция ($y = a^{x}$, где $a > 0, a \neq 1$);
- логарифмическая функция ($y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$);
- тригонометрические функции ($y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = ctgx$);
- обратные тригонометрические функции

($y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = arctgx$; $y = arcctgx$).

Определение 2.1.4. Элементарной функцией называется функция, которая может быть задана одной формулой вида $y = f(x)$, где в правой части находится выражение, составленное из элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.

К числу алгебраических функций относятся:

1) целая рациональная функция или многочлен

$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$, где $n \in N_0$, a_n – константы, называемые коэффициентами;

2) дробная рациональная функция, определяемая как отношение двух многочленов

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m};$$

3) иррациональная функция, где в правой части $y = f(x)$ производятся операции сложения вычитания, умножения, деления и возведения в степень с рациональными нецелыми показателями.

Замечание. Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной.

Свойства функции

Определение 2.1.5. Функция $y = f(x)$, заданная на симметричном относительно начала координат промежутке, называется четной, если для любого значения x из данного промежутка выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Например, дана функция $y = x^2 + 2$. Найдем значение $y(-x)$:

$$y(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = y(x),$$

то есть данная функция четная. Если обратиться к графику этой функции, то действительно можно заметить, что график симметричен относительно оси *Oy* (рисунок 2.1.1).

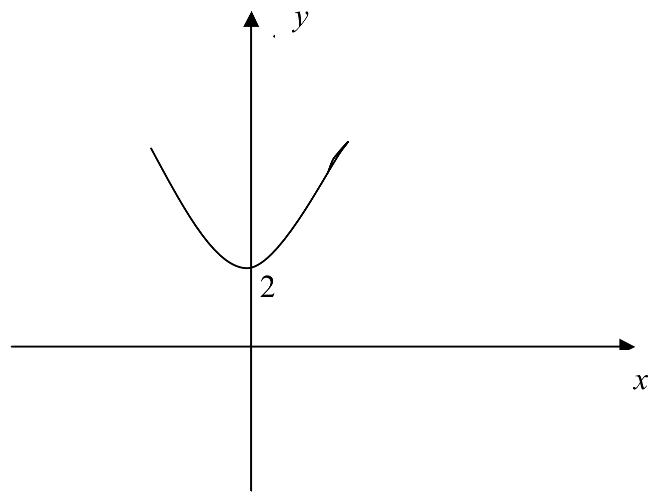


Рисунок 2.1.1 – График функции $y = x^2 + 2$

Определение 2.1.6. Функция $y = f(x)$, заданная на симметричном относительно начала координат промежутке, называется нечетной, если для любого значения *x* из этого промежутка выполняется равенство: $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Рассмотрим для примера функцию $y = x^3 + 2x$. Найдем значение $y(-x)$:

$$y(-x) = (-x)^3 + 2 \cdot (-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -y(x).$$

Выполняется равенство $y(-x) = -y(x)$, следовательно, данная функция – нечетная. Построим график данной функции (рисунок 2.1.2).

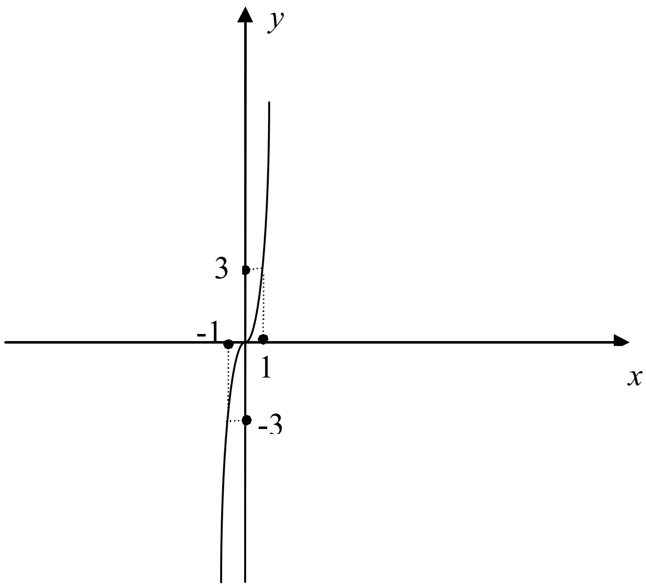


Рисунок 2.1.2 – График функции $y = x^3 + 2x$

Сумма и разность двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная). Произведение двух четных или нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную – есть нечетная функция.

На практике чаще встречаются функции, для которых не выполняется ни равенство $f(-x) = f(x)$, ни равенство $f(-x) = -f(x)$. Такие функции носят название *ни четных, ни нечетных функций* или *функций общего вида*.

Определение 2.1.7. Функция $y = f(x)$ возрастает на некотором интервале *X*, если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, таких что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Другими словами, большему значению аргумента *x* соответствует большее значение функции (рисунок 2.1.3).

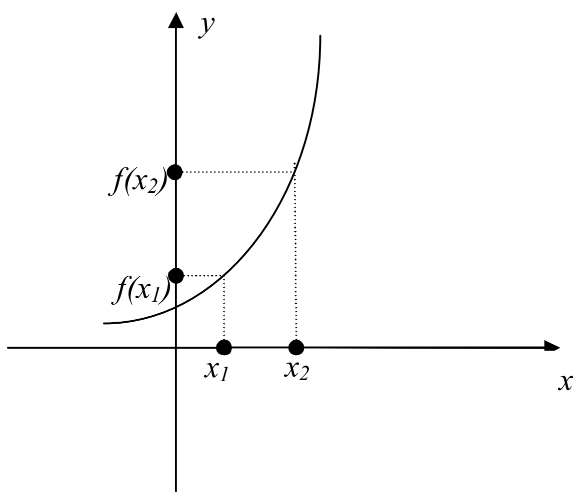


Рисунок 2.1.3 – График возрастающей функции

Определение 2.1.8. Функция $y = f(x)$ убывает на некотором интервале *X*, если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, таких что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Другими словами, большему значению аргумента *x* соответствует меньшее значение функции (рисунок 2.1.4.).

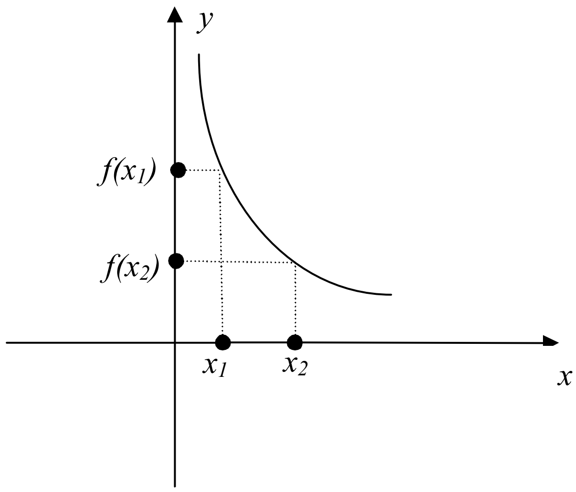


Рисунок 2.1.4 – График убывающей функции

Определение 2.1.9. Точку x_0 называют точкой максимума функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех *x* из этой окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Значение функции в точке максимума называют максимумом функции и обозначают $y_{\max}$.

Определение 2.1.10. Точку x_0 называют точкой минимума функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех *x* из этой окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \leq f(x)$. Значение функции в точке минимума называют минимумом функции и обозначают $y_{\min}$ (рисунок 2.1.5).

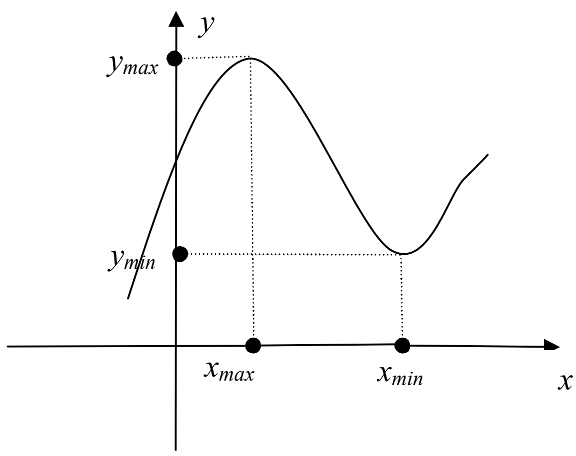


Рисунок 2.1.5 – Точки минимума и максимума функции

Точки минимума и максимума называют *точками экстремума*, а значения функции, соответствующие точкам экстремума, называют *экстремумами функции*.

Определение 2.1.11. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$ (период), что на всей области определения функции выполняется равенство: $f(x) = f(x+T)$.

Период функции определен неоднозначно, то есть если T – период функции, то и любое число $T_1 = T + T + ... + T = nT$ – также период. Наименьшее из всех значений называется основным (или главным) периодом функции.

2.2 Предел функции в точке, его геометрический смысл

Определение 2.2.1 Дельта δ – окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Символически такая окрестность обозначается $U(x_0; \delta)$.

Геометрически данный интервал можно изобразить следующим образом (рисунок 2.2.1):

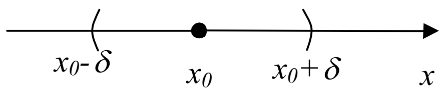


Рисунок 2.2.1 – δ – окрестность точки x_0 ($U(x_0; \delta)$)

Это множество значений переменной x можно записать с помощью неравенства $|x - x_0| < \delta$.

Определение 2.2.2 δ – окрестностью точки x_0 без самой точки называется объединение интервалов $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$.

Иначе эту окрестность называют δ – окрестностью с выколотой точкой.

Символическое обозначение окрестности $\overset{0}{U}(x_0; \delta)$.

Изобразим данный интервал геометрически (рисунок 2.2.2)

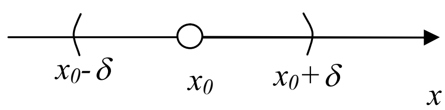


Рисунок 2.2.2 $-\delta$ – окрестность с выколотой точкой x_0 ($\overset{0}{U}(x_0; \delta)$)

Множество значений переменной x, принадлежащих данной окрестности, можно записать в виде неравенств ($|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$).

Определение 2.2.3 ε – окрестностью точки плюс бесконечность называется бесконечный интервал $(\varepsilon;+\infty)$, где $\varepsilon > 0$.

Символически окрестность точки плюс бесконечность обозначают $U(+\infty;\varepsilon)$. Изобразим окрестность геометрически (рисунок 2.2.3).

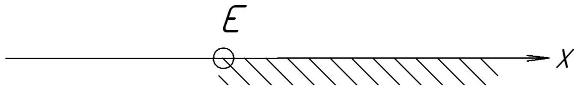


Рисунок 2.2.3 – ε – окрестность точки плюс бесконечность

Все значения переменной x, входящие в эту окрестность удовлетворяют неравенству $x > \varepsilon$.

Определение 2.2.4 ε – окрестностью точки минус бесконечность называется бесконечный интервал $(-\infty;-\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Символическое обозначение окрестности $U(-\infty;\varepsilon)$.

Изобразим окрестность геометрически (рисунок 2.2.4).

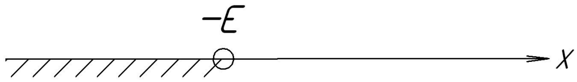


Рисунок 2.2.4 – ε – окрестность точки минус бесконечность

Значения переменной x из этой окрестности, удовлетворяют неравенству $x < -\varepsilon$.

Определение 2.2.5 ε – окрестностью точки бесконечность называется объединение интервалов $(-\infty;-\varepsilon)\cup(\varepsilon;+\infty)$, где $\varepsilon > 0$.

Символически данную окрестность обозначают $U(\infty;\varepsilon)$.

Изобразим окрестность геометрически (рисунок 2.2.5).

Рисунок 2.2.5 – ε – окрестность точки бесконечность

Окрестность точки бесконечность можно представить в виде неравенства $|x| > \varepsilon$.

Определение 2.2.6 Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ (в точке $x = a$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое что для всех значений переменной x, взятых из проколотой δ – окрестности точки $x = a$, значения функции попадут в ε – окрестность числа b.

Символически предел функции в точке обозначают следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Выполним геометрическую иллюстрацию данного определения (рисунок 2.2.6).

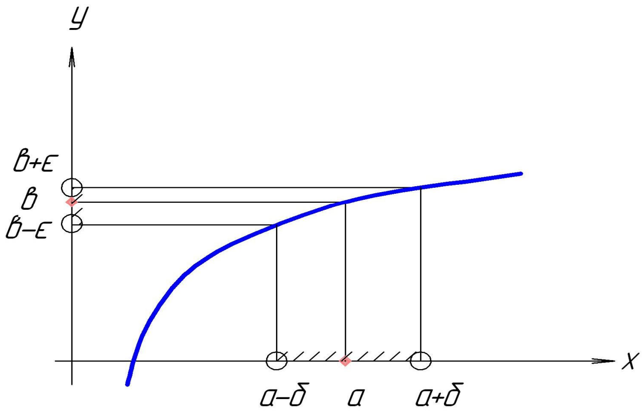


Рисунок 2.2.6 – Геометрическая иллюстрация предела функции в точке

Определение 2.2.6 можно записать с помощью неравенств

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое что для всех значений переменной x, удовлетворяющих неравенствам ($|x - a| < \delta$; $x \neq a$), значения функции, будут удовлетворять неравенству $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Это определение предела функции в точке сформулировано на языке $\varepsilon - \delta$ по Коши.

Определение 2.2.7 Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (на $+\infty$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое что для всех значений переменной x, взятых из δ – окрестности точки $+\infty$, значения функции попадут в ε – окрестность числа b.

Символически предел функции на плюс бесконечности можно обозначить следующим образом:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию предела функции при $x \to +\infty$ (рисунок 2.2.7).

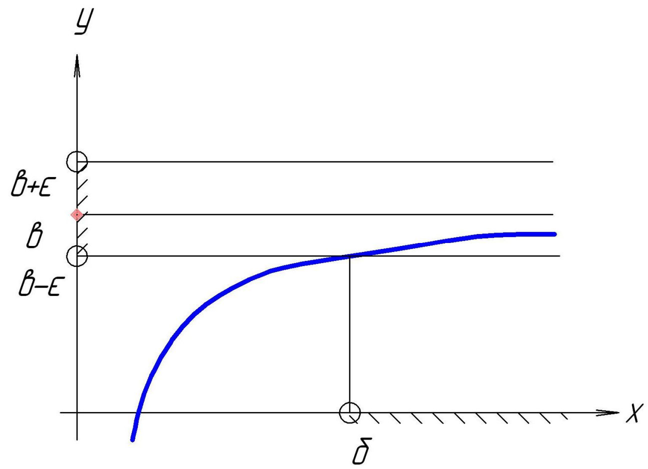


Рисунок 2.2.7 – Геометрическая иллюстрация предела функции при $x \to +\infty$

Запишем определение предела функции на плюс бесконечности с помощью неравенств:

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое что для всех значений переменной x, удовлетворяющих неравенству $x > \delta$, значения функции будут удовлетворять неравенству $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Аналогично можно сформулировать определение предела функции на минус бесконечности.

Определение 2.2.8 Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ (на $-\infty$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое что для всех значений переменной x, взятых из δ-окрестности точки $-\infty$, значения функции попадут в ε – окрестность числа b.

Символически предел функции на минус бесконечности обозначают следующим образом:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Выполним геометрическую иллюстрацию данного определения (рисунок 2.2.8).

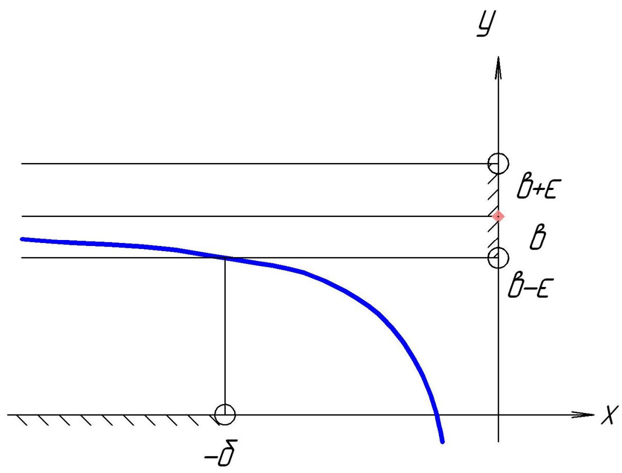


Рисунок 2.2.8 – Геометрическая иллюстрация предела функции при $x \to -\infty$

Теперь запишем определение предела на минус бесконечности, используя неравенства:

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое что для всех значений переменной x, удовлетворяющих неравенству $x < -\delta$, значения функции, будут удовлетворять неравенству $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 2.2.9 Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ (на ∞), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое что для всех значений переменной x, взятых из δ – окрестности точки ∞, значения функции попадут в ε – окрестность числа b.

Символически предел функции на бесконечности обозначают следующим образом:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b.$$

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию предела функции при $x \to +\infty$ (рисунок 2.2.7)

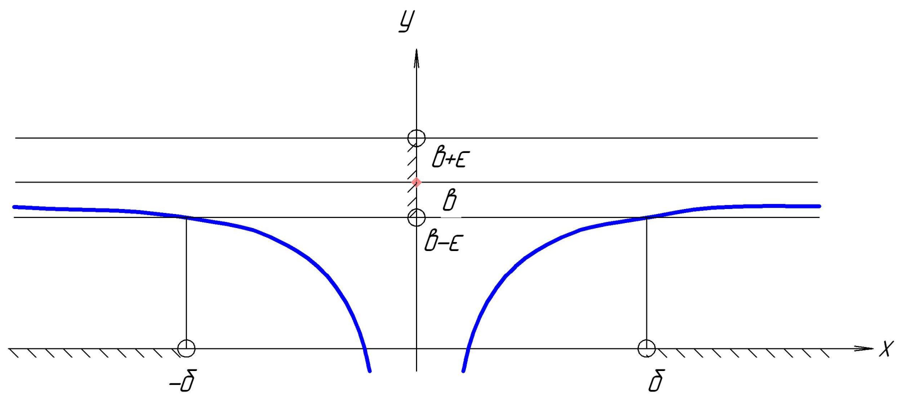


Рисунок 2.2.9 – Геометрическая иллюстрация предела функции при $x \to \infty$

Воспользовавшись соответствующими неравенствами запишем определение предела функции на бесконечности:

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое что для всех значений переменной x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \delta$, значения функции будут удовлетворять неравенству $|f(x) - b| < \varepsilon$.

2.3 Бесконечно большие и бесконечно малые функции и их свойства

В предыдущем пункте мы рассмотрели случаи, когда функция $y = f(x)$ стремится к некоторому числу при $x \to a$ или при $x \to +\infty$, $x \to -\infty, x \to \infty$. Теперь рассмотрим случай, когда функция стремится к бесконечности при некотором способе изменения аргумента.

Определение 2.3.1 Функция $y = f(x)$ стремится к плюс бесконечности при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих неравенствам ($|x - a| < \delta$; $x \neq a$) значения функции удовлетворяют неравенству $f(x) > \varepsilon$.

Геометрически это определение можно проиллюстрировать на рисунке 2.3.1

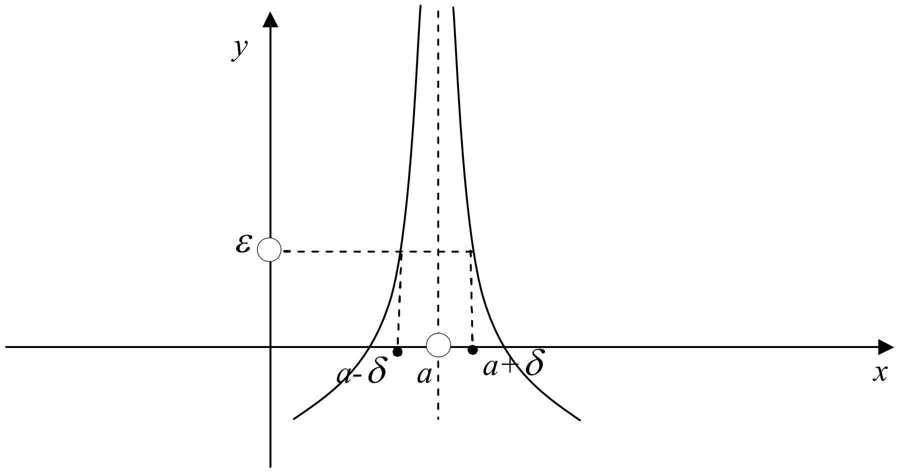


Рисунок 2.3.1 – Графическое изображение $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Определение 2.3.2 Функция $y = f(x)$ стремится к минус бесконечности при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих неравенствам ($|x-a| < \delta;\ x \neq a$) значения функции удовлетворяют неравенству $f(x) < -\varepsilon$.

Геометрическая интерпретация этого определения приведена на рисунке 2.3.2.

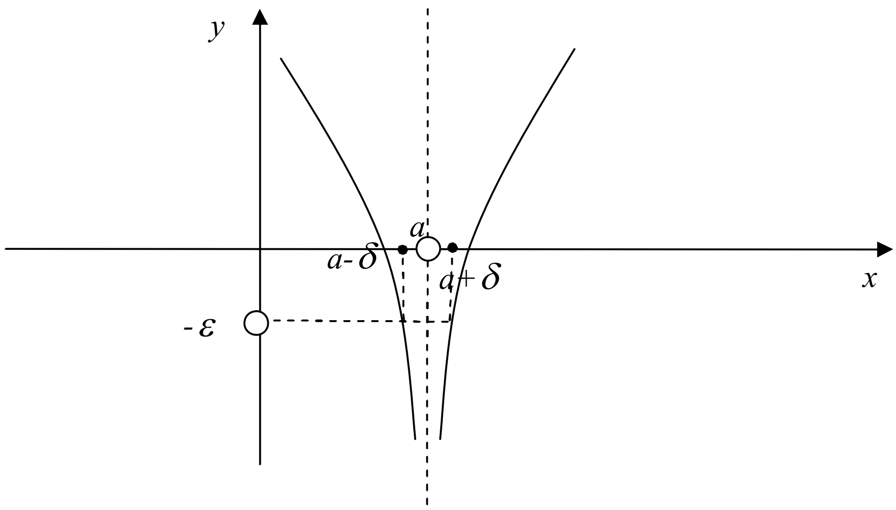


Рисунок 2.3.2 – Графическое изображение $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$

Определение 2.3.3 Функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих неравенствам ($|x-a| < \delta;\ x \neq a$) значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x)| > \varepsilon$.

Определения аналогичные 2.3.1 – 2.3.3 можно сформулировать при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Определение 2.3.4 Функции имеющие пределом плюс бесконечность, минус бесконечность или бесконечность называются бесконечно большими функциями.

Отметим некоторые свойства бесконечно больших функций:

1. Сумма двух бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая.

2. Произведение двух бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая.

3. Сумма бесконечно большой функции и числа есть функция бесконечно большая.

Определение 2.3.5 Функция $y = \alpha(x)$ называется бесконечно малой, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех значений аргумента x, удовлетворяющих неравенствам ($|x - a| < \delta$; $x \neq a$) значения функции удовлетворяют неравенству $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Из определения бесконечно малой функции следует, что $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$

Аналогичные определения бесконечно малых функций можно сформулировать при $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Можно отметить некоторые свойства бесконечно малых функций:

1. Алгебраическая сумма двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

2. Произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая.

4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями также как и между соответствующими последовательностями, существует связь:

1. Если функция $y = f(x)$ бесконечно большая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая;

2. Если функция $y=\alpha(x)$ бесконечно малая и не обращается в нуль, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая.

2.4 Основные теоремы о пределах. Ззамечательные пределы математического анализа

Теорема 2.4.1. Для того, чтобы число A было пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представима в виде $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$.

Теорема 2.4.2. Предел постоянной величины равен самой постоянной.

Теорема 2.4.3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x\to a$, то при $x\to a$ имеют пределы также их сумма $f_1(x)+f_2(x)$, произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)$ и при условии $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0$ частное $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, причем

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+f_2(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x); \qquad (2.4.1)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x); \qquad (2.4.2)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \qquad (2.4.3)$$

Следствие 1. Если функция $y=f(x)$ имеет предел при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n \qquad (2.4.4)$$

Следствие 2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to a}\left(C\cdot f_1(x)\right)=C\lim_{x\to a} f_1(x) \qquad (2.4.5)$$

Замечательные пределы

Можно доказать, что для бесконечно малых функций справедливо равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (2.4.6),$$

называемое в математике *первым замечательным пределом*. Первый замечательный предел устраняет математическую неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Можно доказать, что для функции $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при непрерывном изменении аргумента x и стремлении его к плюс бесконечности пределом будет служить число $e\approx 2{,}7$, то есть

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (2.4.7)$$

Эта формула устраняет математическую неопределенность $\left[1^\infty\right]$ и называется *вторым замечательным пределом*.

Второй замечательный предел можно записать иначе

$$\lim_{x\to a}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e, \text{ если } \alpha(x)\to 0 \text{ при } x\to a.$$

2.5 Сравнение бесконечно малых

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые при $x\to a$ (или при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to\infty$). Рассмотрим предел отношения этих функций при $x\to a$ и введем следующие определения.

Определение 2.5.1 Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка малости при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ конечен и отличен от нуля.

Например, функции $\alpha(x)=x^2-9$ и $\beta(x)=2x^2-5x-3$ являются бесконечно малыми одного порядка малости при $x\to 3$ так как:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x^2-5x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(2x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{6}{7}\neq 0.$$

Это означает, что функции примерно с одной скоростью стремятся к нулю, при $x\to 3$.

Определение 2.5.2 Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости при $x\to a$, чем $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$.

Функция $\alpha(x)=x^2$ при $x\to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем функция $\beta(x)=6x$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{6x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{6}=0$. Из этого примера можно сделать вывод, что функция $\alpha(x)$ стремится к нулю быстрее, чем функция $\beta(x)$, если $x\to 0$.

Определение 2.5.3 Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка малости при $x \to a$, чем $\beta(x)$ если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$.

Рассмотрим функции $\alpha(x) = 2x^3$ и $\beta(x) = 5x^4$, которые являются бесконечно малыми при $x \to 0$, причем функция $\alpha(x)$ бесконечно малая более низкого порядка малости, чем функция $\beta(x)$. Это легко доказать, если вычислить предел отношения этих функций: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3}{5x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{5x} = \dfrac{1}{0} = \infty$.

Определение 2.5.4 Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются несравнимыми бесконечно малыми при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует и не равен ∞.

Примером несравнимых бесконечно малых функций являются функции $\alpha(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ и $\beta(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \to +\infty$, так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ не существует.

Определение 2.5.5 Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

Из последнего определения следует, что эквивалентные бесконечно малые функции имеют одинаковый порядок малости. Эквивалентные функции символически будем обозначать $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Например, функции $x, \sin x, tgx$ являются эквивалентными бесконечно малыми при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел, формула 2.4.6) и

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Таким образом, $\sin x \sim x$ и $tgx \sim x$.

Для эквивалентных бесконечно малых функций можно сформулировать несколько очень важных теорем.

Теорема 2.5.1. Если существует предел отношения (произведения) бесконечно малых функций, то будет существовать и предел отношения (произведения) эквивалентных им бесконечно малых функций, причем эти пределы равны.

Из теоремы следует, что если $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ бесконечно малые функции при $x \to a$, причем $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \tag{2.5.1}$$

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)\cdot\beta(x)=\lim_{x\to a}\alpha_1(x)\beta_1(x) \tag{2.5.2}$$

Теорема 2.5.2. Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков малости эквивалентна слагаемому низшего порядка малости.

Составим таблицу эквивалентных бесконечно малых функций.

Таблица 2.5.1 – Эквивалентные бесконечно малые

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$
$tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a$
$1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}$	$\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$
$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$(1+\alpha(x))^n-1\sim n\alpha(x)$
$arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$	$\sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\dfrac{\alpha(x)}{n}$

Приведенные в таблице 2.5.1 формулы справедливы при $\alpha(x)\to 0$.

2.6 Непрерывность и точки разрыва функции

Представление о непрерывности функции так или иначе связано с тем, что её график представляет собой плавную, нигде не прерывающуюся линию, которую можно пройти, не отрывая карандаша. Если рассмотреть график такой функции $y=f(x)$, то мы увидим, что близким значениям аргумента соответствуют близкие значения функции. Таким образом, если аргумент x приближается к точке x_0 или, как говорят, стремится к точке x_0, то значения функции $y=f(x)$ неограниченно приближается к значению функции в точке x_0, то есть к числу $f(x_0)$. Однако существует строгое определение непрерывности функции, причем таких определений можно сформулировать несколько.

Определение.2.6.1 Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 если:

1) она определена в точке $x=x_0$;

2) определена в окрестности этой точки;

3) предел функции при $x\to x_0$ равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

Определение.2.6.2 Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_o, если:

1) она определена в точке $x=x_o$;

2) определена в окрестности точки $x=x_o$;

3) левосторонний предел равен правостороннему и равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Определение.2.6.3. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = x_o$, если:

1) она определена в точке $x=x_o$;

2) определена в окрестности точки $x=x_o$;

3) бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется точкой непрерывности данной функции.

Если хотя бы одно из трех условий определений 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3 не выполняется, то функция в точке x_0 называется разрывной, а сама точка x_0 называется точкой разрыва функции.

Точки разрыва можно разбить на два типа.

Определение.2.6.4. Точка разрыва x_0 функции $y = f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Определение.2.6.5. Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.

Таким образом, если $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ существует, но функция $f(x)$ в точке x_0 не определена или определена, но так, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 является точкой разрыва I рода, называемой точкой устранимого разрыва.

Если $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ не существует, но существуют оба односторонних предела в точке x_0, причем $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то разрыв в точке x_0 является разрывом первого рода, который называется скачком:

в) если хотя бы один из односторонних пределов не существует (в частности, равен бесконечности), и, следовательно, не существует и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то в точке x_0 функция терпит разрыв второго рода.

Пример 2.6.1. Найдите точки разрыва функции, если они существуют, определите вид точек разрыва. Выполните чертеж: $y=\begin{cases} -(x+1)^2, & x\le 0 \\ x-1, & 0<x<2 \\ 3, & x\ge 2 \end{cases}$.

Решение. Эта функция является непрерывной во всех точках, кроме, быть может, точек $x=0$ или $x=2$. Исследуем их.

1) рассмотрим точку $x=0$.

$f(0)=-(0+1)^2=-1$, то есть функция определена в точке $x=0$

Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(-(x+1)^2)=-1$

$$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x-1)=-1$$

Получили, что $f(0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, то есть данная функция являетя непрерывной в точке $x=0$.

2) рассмотрим точку $x=2$.

$f(2)=3$, то есть функция определена в точке $x=2$

Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x-1)=1$;

$$\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0} 3=3$$

Получили случай, когда функция определена в точке $x=2$, имеет конечные односторонние пределы в этой точке, но они не равны между собой: $f(2)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$. То есть в точке $x=2$ (по определению 2.6.2) нарушено третье условие, следовательно, это точка является точкой разрыва первого рода.

Выполним чертеж (рисунок 2.6.1).

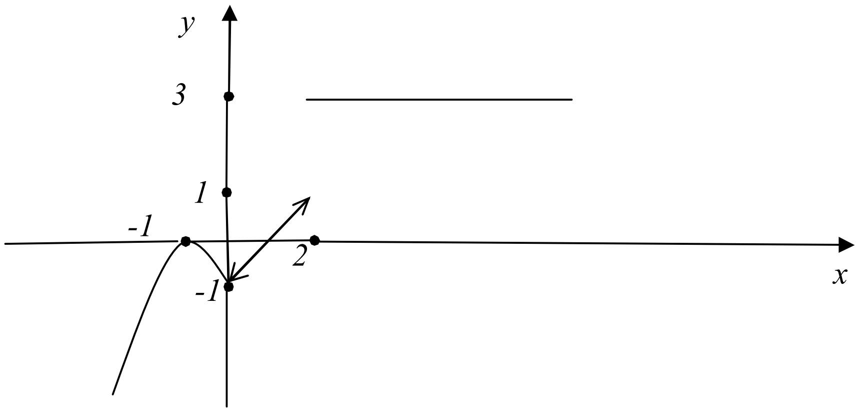


Рисунок 2.6.1 – График функции $y=\begin{cases}-(x+1)^2, & x\le 0\\ x-1, & 0<x<2\\ 3, & x\ge 2\end{cases}$

Пример 2.6.2. Исследуйте на непрерывность и найдите точки разрыва функции $y=\dfrac{x}{x^2-9}$, определите их вид. Выполните схематично чертеж.

Решение. Эта функция является дробно-рациональной, и поэтому она непрерывна во всех точках, в которых знаменатель отличен от нуля. В точках x_1=–3 и x_2=3 функция не определена, и поэтому терпит разрыв. Нетрудно проверить, что в обеих этих точках односторонние пределы бесконечные:

$$\lim_{x\to -3-0}\frac{x}{x^2-9}=-\infty,\ \lim_{x\to -3+0}\frac{x}{x^2-9}=+\infty\ ;\ \lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x^2-9}=-\infty,\ \lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x^2-9}=+\infty$$

Следовательно, $x = \pm\, 3$ – точки разрыва второго рода (рисунок 2.6.2).

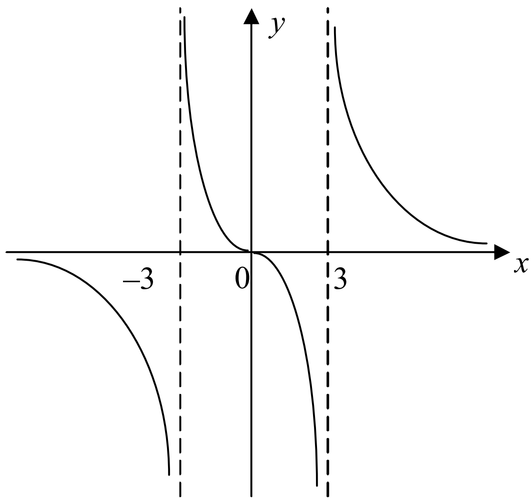


Рисунок 2.6.2 – График функции $y=\dfrac{x}{x^2-9}$

Пример 2.6.3. Исследуйте функцию $y=7^{\frac{1}{x-4}}$ на непрерывность, найдите точки разрыва функции и определите их вид. Выполните схематично чертеж.

Решение. Для исследования функции $y=7^{\frac{1}{x-4}}$ на непрерывность необходимо проверить три условия определения функции непрерывной в точке (определение 2.6.2):

1) функция определена в точке $x=x_o$;

2) функция определена в окрестности точки $x=x_o$;

3) левосторонний предел равен правостороннему и равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Для проверки первых двух условий достаточно найти область определения функции:

$$D(y):\ x\neq 4 \text{ или } x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty).$$

Из области определения функции следует, что в точке $x=4$ функция неопределена, то есть не выполняется первое условие определения непрерывной функции в точке (2.6.2).Это означает, что в точке $x=4$ функция терпит разрыв. Определим вид разрыва. Для этого проверим третье условие определения (2.6.2).

Найдем левосторонний предел функции в точке $x=4$:

$$\lim_{x\to 4-0} 7^{\frac{1}{x-4}}=\left[7^{\frac{1}{4-0-4}}=7^{\frac{1}{-0}}=7^{-\infty}=\frac{1}{7^{\infty}}=\frac{1}{\infty}\right]=0$$

Найдем правосторонний предел фуекции в точке $x=4$:

$$\lim_{x\to 4+0} 7^{\frac{1}{x-4}}=\left[7^{\frac{1}{4+0-4}}=7^{\frac{1}{+0}}=7^{+\infty}\right]=+\infty$$

Согласно определению (2.6.2) в точке $x=4$ функция $y=7^{\frac{1}{x-4}}$ терпит разрыв II рода, то есть прямая $x=4$ является вертикальной асимптотой функции.

Для схематичного построения графика функции определим поведение функции на плюс и минус бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} 7^{\frac{1}{x-4}}=\left[=7^{\frac{1}{+\infty}}=7^{0}\right]=1;$$

$$\lim_{x\to-\infty} 7^{\frac{1}{x-4}}=\left[=7^{\frac{1}{-\infty}}=7^{0}\right]=1.$$

То есть при $x\to+\infty$, функция $y=7^{\frac{1}{x-4}}$ стремится к единице, оставаясь больше единицы (сверху); при $x\to-\infty$, функция $y=7^{\frac{1}{x-4}}$ стремится к единице, оставаясь меньше единицы (снизу). Это означает, что прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой функции.

Пользуясь полученными результатами, построим график функции (рисунок 2.6.3).

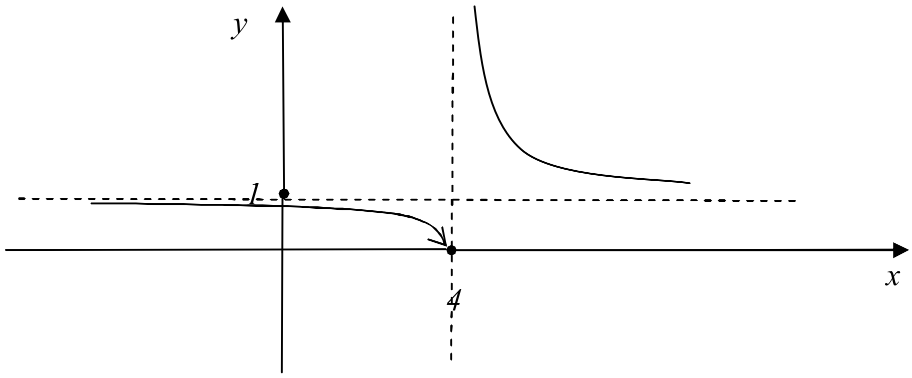


Рисунок 2.6.3 – Схематичный график функции $y=7^{\frac{1}{x-4}}$

Пример 2.6.4. Исследуйте функцию $y=5^{\frac{1}{4-x}}$ на непрерывность, найдите точки разрыва функции и определите их вид. Выполните схематично чертеж.

Решение. Для исследования функции $y=5^{\frac{1}{4-x}}$ на непрерывность необходимо проверить три условия определения функции непрерывной в точке (определение 2.6.2):

1) функция определена в точке $x=x_0$;

2) функция определена в окрестности точки $x=x_0$;

3) левосторонний предел равен правостороннему и равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Для проверки первых двух условий достаточно найти область определения функции:

$$D(y):\ x\neq 4 \text{ или } x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty).$$

Из области определения функции следует, что в точке $x=4$ функция неопределена, то есть не выполняется первое условие определения непрерывной функции в точке (2.6.2).Это означает, что в точке $x=4$ функция терпит разрыв. Определим вид разрыва. Для этого проверим третье условие определения (2.6.2).

Найдем левосторонний предел функции в точке $x=4$:

$$\lim_{x\to 4-0} 5^{\frac{1}{4-x}}=\left[5^{\frac{1}{4-4+0}}=5^{\frac{1}{+0}}=5^{+\infty}\right]=+\infty$$

Найдем правосторонний предел фуекции в точке $x=4$:

$$\lim_{x\to 4+0} 5^{\frac{1}{4-x}} = \left[5^{\frac{1}{4-4-0}} = 5^{\frac{1}{-0}} = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} \right] = 0$$

Согласно определению (2.6.2) в точке $x=4$ функция $y=5^{\frac{1}{4-x}}$ терпит разрыв II рода, то есть прямая $x=4$ является вертикальной асимптотой функции.

Для схематичного построения графика функции определим поведение функции на плюс и минус бесконечности:

$$\lim_{x\to+\infty} 5^{\frac{1}{4-x}} = \left[= 5^{\frac{1}{-\infty}} = 5^{-0} \right] = 1;$$

$$\lim_{x\to-\infty} 5^{\frac{1}{4-x}} = \left[= 5^{\frac{1}{+\infty}} = 5^{+0} \right] = 1.$$

То есть при $x\to+\infty$, функция $y=5^{\frac{1}{4-x}}$ стремится к единице, оставаясь меньше единицы (снизу); при $x\to-\infty$, функция $y=5^{\frac{1}{4-x}}$ стремится к единице, оставаясь больше единицы (сверху). Это означает, что прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой функции.

Пользуясь полученными результатами, построим график функции (рисунок 2.6.4).

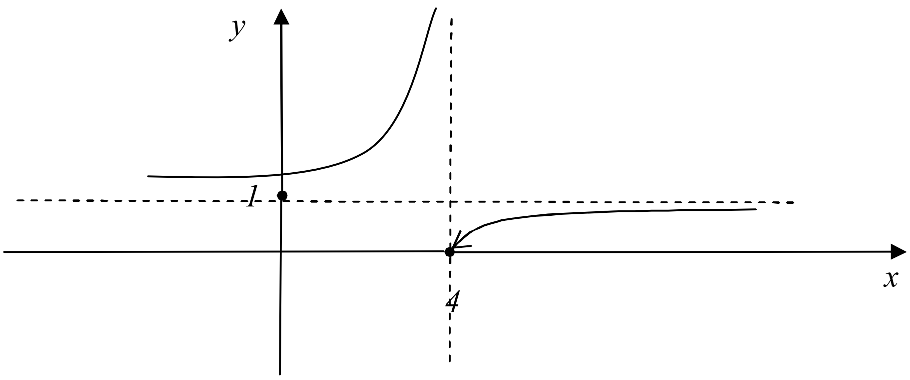


Рисунок 2.6.4 – Схематичный график функции $y=5^{\frac{1}{4-x}}$

<u>Пример 2.6.5.</u> Исследуйте функцию $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}$ на непрерывность, найдите точки разрыва функции.

Решение. Для исследования функции $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}$ на непрерывность, необходимо проверить три условия определения функции непрерывной в точке (определение 2.6.2):

1) функция определена в точке $x=x_0$;

2) функция определена в окрестности точки $x=x_0$;

3) левосторонний предел равен правостороннему и равен значению функции в этой точке, то есть

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

Для проверки первых двух условий достаточно найти область определения функции:

$$D(y):\ x\neq -4 \text{ или } x\in(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty).$$

Из области определения функции следует, что в точке $x=-4$ функция неопределена, то есть не выполняется первое условие определения непрерывной функции в точке (2.6.2). Это означает, что в точке $x=-4$ функция терпит разрыв. Определим вид разрыва. Для этого проверим третье условие определения (2.6.2).

Найдем левосторонний предел функции в точке $x=-4$:

$$\lim_{x\to -4-0}\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}=\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{-4-0+4}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{-0}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{-\infty}=7^{+\infty}\right]=+\infty$$

Найдем правосторонний предел функции в точке $x=-4$:

$$\lim_{x\to -4+0}\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}=\left[\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{-4+0+4}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{+0}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{+\infty}\right]=0$$

Согласно определению (2.6.2) в точке $x=-4$ функция $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}$ терпит разрыв II рода, то есть прямая $x=-4$ является вертикальной асимптотой функции.

Для схематичного построения графика функции определим поведение функции на плюс и минус бесконечности:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}=\left[=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{+\infty}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{+0}\right]=1;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}=\left[=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{-\infty}}=\left(\frac{1}{7}\right)^{-0}\right]=1.$$

То есть при $x\to+\infty$, функция $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}$ стремится к единице, оставаясь больше единицы (сверху); при $x\to-\infty$, функция $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}$ стремится к единице, оставаясь меньше единицы (снизу). Это означает, что прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой функции.

Пользуясь полученными результатами, построим график функции (рисунок 2.6.5).

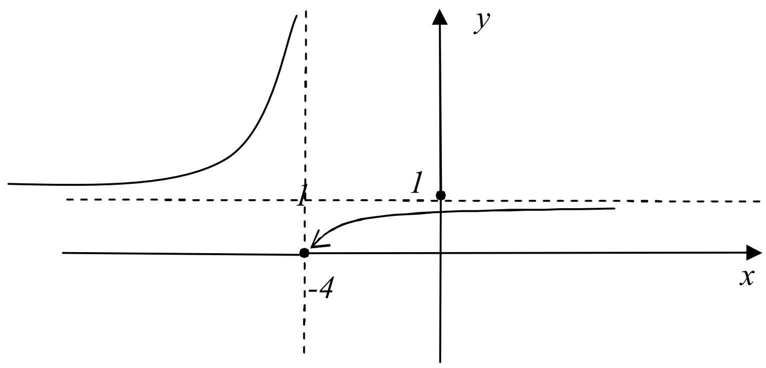


Рисунок 2.6.5 – Схематичный график функции $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x+4}}$

2.7 Функция и её предел в задачах

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Часто, однако, подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, которые называются математическими неопределенностями

Нахождение предела функции в этих случаях называют раскрытием или устранением математических неопределённостей того или иного вида. Часто приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

Пример 2.7.1. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

Решение. В данном примере нельзя непосредственно применить теорему о пределе дроби, так как непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Совершенно очевидно, что при $x \to 2$ предел числителя дроби

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2 - 5x + 6\right) = \lim_{x\to 2} x^2 - 5\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 6 = 0$$

и предел знаменателя

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2 - 12x + 20\right) = \lim_{x\to 2} x^2 - 12\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 20 = 0.$$

Поэтому нахождение предела этой дроби сводится к раскрытию неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для этого преобразуем дробь, разложив числитель, и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8};$$

Пример 2.7.2. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{\sqrt{5x+1} - 4}$.

Решение. Здесь мы также имеем математическую неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Чтобы раскрыть неопределенность в данном примере необходимо разложить числитель на множители, как было сделано в предыдущем примере и умножить числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное знаменателю, чтобы избавиться от иррациональности.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2 - 5x - 3}{\sqrt{5x+1} - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{(\sqrt{5x+1}-4)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)} =$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{(\sqrt{5x+1})^2 - 4^2} = \lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{5x+1-16} =$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{5x-15} = \lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{5(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{5} =$$

$$\frac{7\cdot 8}{5} = \frac{56}{5}$$

Пример 2.7.3. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$

Решение. Очевидно, что при вычислении предела мы имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$; Для ее раскрытия, умножаем числитель, и знаменатель дроби на выражения, сопряженные числителю и знаменателю.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\left(\sqrt{x^2+16}\right)^2-4^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{8}{2}=4\,.$$

Пример 2.7.4. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-1}{x^2-6x-1}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для её устранения числитель и знаменатель поделим почленно на x^2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+5x-1}{x^2-6x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}=3,$$ (так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$).

Пример 2.7.5. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{e^{5x}-1}$

Решение. При вычислении пределов трансцендентных функций часто пользуются теоремой 2.5.1, то есть формулой 2.5.1 и таблицей 2.5.1 эквивалентных бесконечно малых

Можно заметить, что при $x\to 0$ числитель дроби $tgx\to 0$ и знаменатель дроби $e^{5x}-1\to 0$. Таким образом, получаем математическую неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. По теореме 2.5.1 всякую бесконечно малую функцию можно заменить эквивалентной бесконечно малой функцией. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{e^{5x}-1}=\begin{bmatrix} tg\alpha(x)\sim\alpha(x)\\ e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}.$$

Пример 2.7.6. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{1-\cos 4x}$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg3x}{1-\cos 4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c} arctg\alpha(x)\sim\alpha(x) \\ 1-\cos\alpha(x)\sim\dfrac{(\alpha(x))^2}{2}\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\frac{(4x)^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{8x}=\frac{3}{0}=\infty .$$

Пример 2.7.7. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{4\text{ч}}-1}{\ln(1-5x)}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{7^{4\text{ч}}-1}{\ln(1-5x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{c} a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a \\ \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{7^{4\text{ч}}-1}{\ln(1+(-5x))}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cdot\ln 7}{-5x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\ln 7}{-5}=-\frac{4}{5}\ln 7 .$$

Пример 2.7.8. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{\arcsin 8x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{-2x}}{\arcsin 8x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}\left(e^{6x}-1\right)}{\arcsin 8x}=\left[\begin{array}{c} \arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x) \\ e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\end{array}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}\cdot 6}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} .$$

Пример 2.7.9. Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x-2}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x-2}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5}{2x-4}-1\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5-2x+4}{2x-4}\right)^{3x-2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{3x-2}=\left[\begin{array}{c}\textit{воспользуемся формулой второго} \\ \textit{замечательного предела}\end{array}\right]=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{\frac{2x-4}{9}}\right)^{\frac{9}{2x-4}\cdot(3x-2)}=e^{\frac{27x-18}{2x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{27x-18}{2x-4}}=e^{\frac{27}{2}}=\sqrt{e^{27}} .$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{\frac{2x-4}{9}}\right]^{\frac{27x}{2x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27x}{2x-4}}=e^{\frac{27}{2}};$$

ГЛАВА 3. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

3.1. Определение производной, её геометрический и физический смысл

Существует круг задач, например задача о скорости движущейся точки; задача о касательной к данной кривой и другие, для решения которых применяется одна и та же математическая операция. Выясним аналитическую сущность этой операции, отвлекаясь от конкретного смысла задач.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b). Возьмем какое-либо значение переменной $x \in (a,b)$. Найдем значение функции в этой точке $f(x)$. Затем выберем новое значение аргумента $x + \Delta x \in (a,b)$, придавая первоначальному значению аргумента x приращение Δx (положительное или отрицательное). Этому значению аргумента соответствует новое значение функции $f(x + \Delta x)$. Теперь запишем изменение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, называемое приращением функции. Составим отношение приращение функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

которое является функцией от Δx, и перейдем к пределу.

Определение 3.1.1. Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется производной функци $y = f(x)$ в точке x и обозначается

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3.1.1)$$

Действие нахождения производной функции называется дифференцированием функции.

Можно сформулировать *механический смысл производной*: скорость v прямолинейного движения точки есть производная пути s по времени t, то есть

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Геометрический смысл производной: Угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 есть значение производной функции в этой точке $f'(x_0)$. Таким образом $k = f'(x_0)$.

Уравнение касательной к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где x_0 – абсцисса точки касания,

$f(x_0)$ – значение функции в точке с абсциссой x_0 (в точке касания),

$f'(x_0)$ – значение производной в точке касания x_0,

(x, y) – координаты любой точки, лежащей на касательной.

Определение 3.1.2. Прямая, перпендикулярная к касательной к данной кривой, проведенной в точке касания, называется нормалью к данной кривой.

Уравнение нормали к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f(x_0)}(x - x_0).$$

3.2. Понятия сложной и обратной функций. Их производные

Пусть переменная y зависит от переменной u и эта зависимость задана аналитическим выражением $y = f(u)$. Причем переменная u в свою очередь зависит от переменной x, то есть $u = \varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u, следовательно, будет меняться y. Таким образом, y является функцией аргумента x $y = f(\varphi(x))$при определенных условиях.

Определение 3.2.1. Если на некотором промежутке X определена функция $u = \varphi(x)$ с множеством значений U, а на множестве значений U определена функция $y = f(u)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ называется сложной функцией от x, а переменная u – промежуточной переменной сложной функции.

Таким образом $y = f(\varphi(x))$, при $x \in D(\varphi)$.

Термин «сложная функция» можно заменить равнозначными терминами «композиция или суперпозиция функций», которые обозначаются $f \circ \varphi$.

<u>Пример 3.2.1.</u> Если $y = \cos u$, а $u = x^3$, то функция $y = \cos x^3$ есть сложная функция независимой переменной x. Причем эта функция определена на всей числовой прямой, так как областью определения и множеством значений функции $u = x^3$ является вся числовая прямая.

<u>Пример 3.2.2.</u> Если $y = \ln u$, $u = \sin x$, то сложная функция $y = \ln \sin x$ определена лишь для тех значений x, при которых $u = \sin x > 0$, так как логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента.

Для дифференцирования сложных функций применяют следующую теорему.

Терема 3.2.1. Если функция $u=\varphi(x)$ имеет в точке x производную $u'_x=\varphi'(x)$, а функция $y=f(u)$ имеет производную $y'_u=f'(u)$ в соответствующей точке u, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая находится по следующей формуле:

$$y'_x=y'_u\,u'_x=f'(u)\varphi'(x) \tag{3.2.1}$$

Рассмотрим понятие обратной функции. Пусть $y=f(x)$ есть функция независимой переменной x. Это означает, что, задавая значения x, мы можем определить значения зависимой переменной y. Поступим наоборот, будем считать независимой переменную y, а зависимой переменную x. Тогда x будет являться функцией переменной y, которая называется функцией, обратной к данной. Предполагая, что уравнение $y=f(x)$ разрешимо относительно x, получим явное выражение обратной функции $x=\varphi(y)$. Функция, обратная однозначной функции, может быть многозначной, то есть данному значению y может соответствовать несколько значений переменной x. Однако иногда удаётся сделать обратную функцию однозначной, вводя дополнительные ограничения на её значения.

Пример 3.2.3. Для однозначной функции $y=x^2$ обратной является двузначная функция $x=\pm\sqrt{y}$. Если условиться для корня брать только арифметическое значение, то обратная функция будет однозначной.

Функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ являются взаимно обратными.

Иногда придерживаются стандартных обозначений, то есть под x понимают независимую переменную или аргумент, а под y – зависимую переменную или функцию. В этом случае взаимно обратные функции будут иметь вид $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$. Так, например, взаимно обратные функции, рассмотренные в примере 1.2.3 можно задать следующим образом $y=x^2$ и $y=\pm\sqrt{x}$.

Рассмотрим теорему, которая позволяет находить производные взаимно обратных функций.

Теорема 3.2.2. Пусть $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ взаимно обратные функции. Тогда если функция $y=f(x)$ имеет отличную от нуля производную $f'(x)$, то обратная функция имеет производную $\varphi'(y)$, причем справедливо равенство

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)} \qquad (3.2.2)$$

3.3 Таблица производных

Рассмотрим производные основных элементарных функций на примерах.

Пример 3.3.1. Найдите производную функции $y=\cos x$, используя определение (3.1.1).

Решение. Согласно определению, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=$

$$=\left[\begin{array}{l} \quad\textit{Применим}\qquad\qquad \textit{формулу} \\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}: \\ \cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin x\cdot\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin x\cdot\Delta x}{\Delta x\cdot 2}=-\sin x.$$

Таким образом, $(\cos x)'=-\sin x$.

Пример 3.3.2. Найдите производную функции $y=tgx$, используя определение (3.1.1).

Решение. Согласно определению, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{tg(x+\Delta x)-tgx}{\Delta x}=$

$$=\left[\begin{array}{l} \quad\textit{Применим}\qquad\qquad \textit{формулу} \\ tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}: \\ tg(x+\Delta x)-tgx=\frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=\frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x} \end{array}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}\right):\Delta x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x\cdot\Delta x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом, $(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Пример 3.3.3. Найдите производную функции $y = \log_a x$, используя определение (3.1.1).

Решение. Согласно определению, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\log_a (x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Таким образом, $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

Аналогично, можно найти производные других элементарных функций и составить таблицу производных (предлагаем Вам это сделать самостоятельно).

Таблица производных некоторых функций

1. $(C)' = 0$
2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
6. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
8. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
9. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
10. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
11. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
12. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
13. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
14. $\left(e^x\right)' = e^x$

Опираясь на определение сложной функции и теорему о дифференцировании сложной функции, рассмотренные в пункте 3.2, и таблицу производных некоторых функций, приведенной выше в данном пункте, составим таблицу производных сложных функций.

Таблица производных сложных функций

1. $(C)' = 0$
2. $(U^n)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$
3. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$
4. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$
5. $(tgU)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} \cdot U'$
6. $(ctgU)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} \cdot U'$
7. $(\arcsin U)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
8. $(\arccos U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} \cdot U'$
9. $(arctgU)' = \dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
10. $(arcctgU)' = -\dfrac{1}{1+U^2} \cdot U'$
11. $(\log_a U)' = \dfrac{1}{U \cdot \ln a} \cdot U'$
12. $(\ln U)' = \dfrac{1}{U} \cdot U'$
13. $(a^U)' = a^U \cdot U' \cdot \ln a$
14. $(e^U)' = e^U \cdot U'$

3.4 Правила дифференцирования функций

Существуют теоремы, которые упрощают процее дифференцирования функций.

Теорема 3.4.1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, то есть

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x) \tag{3.4.1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = C \cdot f(x)$. Дадим переменной x приращение Δx, тогда приращение функции примет вид:

$$\Delta y = C \cdot f(x+\Delta x) - C \cdot f(x) = C\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)$$

Найдем производную функции:

$$y' = (C \cdot f(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)}{\Delta x} =$$

$$= C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \cdot f'(x)$$

Теорема 3.4.2. Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных, то есть

$$(U+V+....+W)'=U'+V'+...+W' \quad (3.4.2)$$

Теорема 3.4.3. Производная от произведения двух дифференцируемых функций равна:

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V' \quad (3.4.3)$$

Теорема 3.4.4. Производная частного равна:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2} \quad (3.4.4)$$

Рассмотренные выше теоремы называются правилами дифференцирования функций.

3.5 Дифференцирование степенно-показательных функций

Определение 3.5.1 Функция вида $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые функции аргумента x, называется степенно-показательной функцией.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные $u'(x)$ и $v'(x)$ в точке x. Найдем производную степенно-показательной функции. Для этого её сначала прологарифмируем:

$$\ln y = \ln u(x)^{v(x)} \text{ или } \ln y = v(x)\ln u(x) .$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$(\ln y)' = (v(x)\ln u(x))' .$$

Получим:

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Тогда производная степенно-показательной функции

$$y' = y\,(\,v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}).$$

Или

$$y' = u(x)^{v(x)}(\,v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}) \quad (3.5.1)$$

После преобразований получим формулу для отыскания производной степенно-показательной функции:

$$y' = u(x)^{v(x)} v'(x)\ln u(x) + v(x)u(x)^{v(x)-1} u'(x).$$

Можно заметить, что производная степенно-показательной функции представляет собой сумму производных показательной и степенной функций.

Отыскание производной с предварительным логарфмированием функции называется логарифмическим дифференцированием функции.

<u>Пример 3.5.1.</u> Найдите производную функции $y = (\sin x)^{x^2}$

Решение. Данная функция является степенно-показательной, поэтому воспользуемся методом логарифмического дифференцирования функции.

Прологарифмируем функцию

$$\ln y = \ln(\sin x)^{x^2}$$

Воспользуемся свойством логарифма степени $\ln x^{\alpha} = \alpha \ln x$

Получим

$$\ln y = x^2 \ln \sin x .$$

Продифференцируем последнее равенство

$$(\ln y)' = (x^2 \ln \sin x)'$$

Воспользуемся формулами

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u};\ (u^n)' = nu^{n-1}u';\ (\sin u)' = u' \cos u$$

И правилом дифференцирования произведения функций

$$(uv)' = u'v + v'u .$$

Будем иметь

$$\frac{y'}{y} = (x^2)' \ln \sin x + (\ln \sin x)' x^2$$

Или

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + \frac{(\sin x)'}{\sin x} x^2$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} x^2$$

Из последнего равенства найдем производную

$$y' = y(2x \ln \sin x + x^2 ctgx)$$

Подставим вместо y заданную функцию

$$y' = (\sin x)^{x^2}\left(2x\ln\sin x + x^2 ctgx\right).$$

3.6 Техника дифференцирования функций

Опираясь на предложенный выше теоретический материал, рассмотрим нахождение производных для различных функций.

Пример 3.6.1.. Найдите производные $\frac{dy}{dx}$ следующих функций:

а) $y = \sqrt[5]{x^3 - 3x^2} - \sqrt[3]{5x-4}$; *б)* $y = \cos\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}\right)$;

в) $y = \left(\sin 2x + x^2\right)^{2x}$; *г)* $y = \ln\sqrt[3]{\frac{1+\cos x}{1-\sin x}}$;

д) $y\cdot\cos 3x - x^2\cdot\sin y = 0$.

Решение. *а)* Очевидно, что данная функция $y = \sqrt[5]{x^3 - 3x^2} - \sqrt[3]{5x-4}$ является алгебраической суммой степенных функций с дробными показателями:

$$y = \left(x^3 - 3x^2\right)^{\frac{1}{5}} - (5x-4)^{\frac{1}{3}}$$

Для нахождения производной, воспользуемся правилом дифференцирования суммы функций:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left[(U+V)' = U' + V'\right] = \left((x^3 - 3x^2)^{\frac{1}{5}}\right)' - \left((5x-4)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{воспользуемся} & \text{табличной} & \text{производной} \\ \text{сложной} & \text{степенной} & \text{функции} \\ & \left(\mathrm{U}^{\mathrm{n}}\right)' = n\cdot U^{n-1}\cdot U' & \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^3 - 3x^2\right)^{-\frac{4}{5}}\left(x^3 - 3x^2\right)' - \frac{1}{3}(5x-4)^{-\frac{2}{3}}(5x-4)' =$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^3 - 3x^2\right)^{-\frac{4}{5}}\left(3x^2 - 6x\right) - \frac{1}{3}(5x-4)^{-\frac{2}{3}}\cdot 5 = \frac{3x(x-2)}{5\cdot\sqrt[5]{\left(x^3 - 3x^2\right)^4}} - \frac{5}{3\cdot\sqrt[3]{(5x-4)^2}}.$$

б) Функция $y = \cos\left(\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}\right)$ представляет собой сложную тригонометрическую функцию. Для отыскания производной этой функции воспользуемся табличной формулой 4 из таблицы производных сложных функций $(\cos U)' = -\sin U\cdot U'$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left(\cos(arctg^2 \frac{x}{2})\right)' = -\sin \mathrm{arctg}^2 \frac{x}{2} \cdot \left(arctg^2 \frac{x}{2}\right)'.$$

Найдём производную функции $U_1 = \mathrm{arctg}^2 \frac{x}{2}$. Данную функцию можно переписать в виде: $U_1 = \left(arctg \frac{x}{2}\right)^2$ – это сложная степенная функция. Воспользуемся табличной производной сложной степенной функции: $\left(U^n\right)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$.

$$U_1' = \left(\mathrm{arctg}^2 \frac{x}{2}\right)' = \left(\left(arctg \frac{x}{2}\right)^2\right)' = 2 \cdot \mathrm{arctg} \frac{x}{2} \cdot \left(\mathrm{arctg} \frac{x}{2}\right)'$$

Найдём производную функции $U_2 = arctg \frac{x}{2}$ по табличной производной $\left(arctgU\right)' = \frac{1}{1+U^2} \cdot U'$:

$$U_2' = \left(\mathrm{arctg} \frac{x}{2}\right)' = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{2}{x^2+4}.$$

Тогда искомая производная функции $y = \cos\left(\mathrm{arctg}^2 \frac{x}{2}\right)$ примет вид:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\sin arctg^2 \frac{x}{2} \cdot 2\mathrm{arctg} \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x^2+4} = \frac{-4 \cdot \sin \mathrm{arctg}^2 \frac{x}{2} \cdot arctg \frac{x}{2}}{x^2+4}$$

Таким образом, при нахождении производной сложной функции главной задачей является умение правильно выделить последнюю операцию, с которой и начинается дифференцирование в виде цепочки простых функций. Это помогает правильно вычислить производную, не потеряв ни одного промежуточного аргумента.

в) Функция $y = \left(\sin 2x + x^2\right)^{2x}$ является степенно-показательной функцией типа $y = u(x)^{v(x)}$, $u(x)$ и $v(x)$ – функции от аргумента x. Для нахождения производных подобных функций воспользуемся приемом логарифмического дифференцирования.

$$\ln(y) = \ln(u(x)^{v(x)}).$$

Воспользуемся логарифмическим свойством $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$:

$$\ln y = v(x) \cdot \ln u(x).$$

Дифференцируя последнее соотношение, получим:

$$\frac{y'}{y} = v \cdot \frac{u'}{u} + v' \cdot \ln v.$$

Умножая обе части равенства на y и заменяя затем y через u^v, получаем окончательно после очевидных преобразований.

$$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'$$

Применяя этот метод для нашей задачи, получим:

$$\ln y = 2x \cdot \ln\left(\sin 2x + x^2\right)$$

Продифференцируем обе части равенства. Учитывая, что в левой части равенства стоит логарифм от функции, имеем:

$$\frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln\left(\sin 2x + x^2\right) + 2x \cdot \frac{\left(\sin 2x + x^2\right)'}{\sin 2x + x^2};$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln\left(\sin 2x + x^2\right) + 2x \cdot \frac{\cos 2x \cdot 2 + 2x}{\sin 2x + x^2};$$

$$\frac{y'}{y} = \ln\left(\sin 2x + x^2\right)^2 + \frac{4x\left(\cos 2x + x\right)}{\sin 2x + x^2};$$

$$y' = y \cdot \left(\ln\left(\sin 2x + x^2\right)^2 + \frac{4x\left(\cos 2x + x\right)}{\sin 2x + x^2}\right);$$

$$y' = \left(\sin 2x + x^2\right)^{2x} \cdot \left(\ln\left(\sin 2x + x^2\right)^2 + \frac{4x\left(\cos 2x + x\right)}{\sin 2x + x^2}\right)$$

г) Преобразуем функцию $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}}$ с помощью свойств логарифма степени и дроби:

$$y = \ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\sin x}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\ln\left(1+\cos x\right) - \ln\left(1-\sin x\right)\right).$$

Применяя правила дифференцирования функций $\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x)$ и $(U+V)' = U' + V'$ получим:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\left(\ln\left(1+\cos x\right)\right)' - \left(\ln\left(1-\sin x\right)\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-\sin x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2 x - \sin x + \cos x + \cos^2 x}{\left(1+\cos x\right)\left(1-\sin x\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-\sin x + \cos x}{\left(1+\cos x\right)\left(1-\sin x\right)}$$

.

д) В данном случае $y \cdot \cos 3x - x^2 \cdot \sin y = 0$ – зависимость между аргументом x и функцией y задана уравнением, которое не разрешено относительно функции y, то есть функция задана неявно. Чтобы отыскать производную y' следует дифференцировать по x обе части заданного уравнения, считая при этом y функцией от x, а затем полученное уравнение решить относительно искомой производной y'. Характерно, что производная неявной функции выражается через x и y. Имеем

$$\underline{y' \cdot \cos 3x} - 3y \cdot \sin 3x - 2x \cdot \sin y - \underline{x^2 \cdot \cos y \cdot y'} = 0;$$

$$y' \cdot \left(\cos 3x - x^2 \cdot \cos y\right) = 3y \cdot \sin 3x + 2x \cdot \sin y;$$

$$y' = \frac{3y \cdot \sin 3x + 2x \cdot \sin y}{\cos 3x - x^2 \cdot \cos y}.$$

3.7 Понятие дифференциала

Рассмотрим дифференцируемую в точке x_0 функцию $y = f(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A \tag{3.7.1}$$

Равенство (3.7.1) можно переписать в виде: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ или

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \tag{3.7.2}$$

Определение 3.7.1. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если её приращение Δy в этой точке можно представить в виде (1.7.2): $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Слагаемое $A \cdot \Delta x$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой одного порядка с Δx (при $A \neq 0$), а также линейно относительно Δx. Слагаемое $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ при $\Delta x \to 0$ бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. В этой связи первое слагаемое $A \cdot \Delta x$ (при $A \neq 0$) является главной частью приращения функции $y = f(x)$.

Определение 3.7.2. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции в этой точке:

$$dy = A \cdot \Delta x \tag{3.7.3}$$

Так как $A = f'(x)$ (это видно из равенства (3.7.1)), и учитывая, что дифференциалом dx независимой переменной x называют приращение Δx этой переменной, равенство (3.7.3) примет вид:

$$dy = f'(x) \cdot dx \tag{3.7.4}$$

Используя равенство (3.7.4), производную $f'(x)$ можно представить как отношение дифференциала dy функции к дифференциалу dx независимой переменной, то есть

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

<u>Пример 3.7.1.</u> Вычислите дифференциал функции $y = \dfrac{\arccos\sqrt{1-x}}{x}$.

Решение. Для отыскания дифференциала функции (равенство (3.7.4)), необходимо отыскать производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{\arccos\sqrt{1-x}}{x}\right)' = \frac{\left(\arccos\sqrt{1-x}\right)' \cdot x - x' \cdot \arccos\sqrt{1-x}}{x^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)}} \cdot \left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)' \cdot x - 1 \cdot \arccos\sqrt{1-x}}{x^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) \cdot x - \arccos\sqrt{1-x}}{x^2} = \frac{\dfrac{-x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \arccos\sqrt{1-x}}{x^2}.$$

Таким образом, дифференциал функции в точке будет равен:

$$dy = \frac{\dfrac{-x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \arccos\sqrt{1-x}}{x^2} \cdot dx$$

<u>Пример 3.7.2.</u> Найдите дифференциал функции $y = (\cos 2x)^3$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Для того, чтобы найти дифференциал функции в точке, воспользуемся формулой:

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$$

Найдем производную данной функции, а затем найти значение производной в точке x_0.

$$y' = \left((\cos 2x)^3\right)' = \begin{bmatrix} \text{Воспользуемся табличной} \\ \text{производной } \left(U^n\right)' = nU^{n-1} \cdot U' \end{bmatrix} = 3 \cdot (\cos 2x)^2 \cdot (\cos 2x)' =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Воспользуемся табличной} \\ \text{производной } (\cos U)' = -\sin U \cdot U' \end{bmatrix} = -3 \cdot \cos^2 2x \cdot \sin 2x \cdot (2x)' = -6\cos^2 2x \cdot \sin 2x.$$

Вычислим значение производной в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

$$y'(\frac{\pi}{6}) = -6\left(\cos 2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot \sin 2 \cdot \frac{\pi}{6} = -6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Таким образом, дифференциал функции будет равен:

$$dy = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot dx$$

Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Из определения дифференциала следует, что он зависит от Δx линейно и является главной частью приращения функции Δy. Причем, $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем $A \cdot \Delta x$, поэтому им можно пренебречь: $\Delta y \approx dy$.

В ряде задач приращение функции в данной точке приближенно заменяют дифференциалом функции в этой точке: $\Delta y \approx dy$.

Известно, что дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 представляет собой главную часть приращения функции Δy в этой точке. Если приращение аргумента x мало по абсолютной величине, то приращение функции приближенно равно дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$.

Так как $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, а $dy = f'(x_0)dx$, то имеет место приближенное равенство:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x.$$

Если $a = x_0 + \Delta x$, то $\Delta x = a - x_0$.

Тогда

$$f(a) - f(x_0) \approx f'(x_0)(a - x_0)$$

или

$$f(a) \approx f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) \qquad (3.7.5)$$

Полученное приближенное равенство дает возможность найти значение функции при $x=a$, если известно значение функции и ее производной при $x=x_o$.

Пример 3.7.3. Вычислите значение функции $y=\sqrt[4]{x}$ в точке $a=2386$, заменив приращение функции в точке дифференциалом в точке $x_0=2401$.

Решение. Воспользуемся равенством (3.7.5). Положим x_o=2401, a=2386, тогда Δx=2386–2401=–15

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[4]{x}$.

Её производная

$$f'(x)=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}};$$

$$f'(x_o)=\frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{2401^3}}=\frac{1}{1372}.$$

Значение функции $f(x)=\sqrt[4]{x}$ в точке a=2386 определим, подставив найденные компоненты в равенство (1.9.4):

$$f(a)=f(2386)\approx\sqrt[4]{2401}-\frac{55}{4\cdot\sqrt[4]{2401^3}}\approx 7-\frac{55}{1372}\approx 6{,}959.$$

3.8 Дифференцирование параметрических функций

Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрически, то есть обе переменные x и y заданы как функции некоторой третьей переменной t, то есть

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \tag{3.8.1}$$

При этом переменную t называют параметром. Предположим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют нужное число производных по параметру t, в рассматриваемом промежутке изменения параметра, причем $x'(t)\neq 0$. Будем также считать, что функция $x=x(t)$ имеет обратную функцию $t=\varphi(x)$, что позволяет рассматривать переменную y как функцию переменной x, то есть $y=y(\varphi(x))$. Следовательно, можно найти производную параметрически заданной функции y'_x.

Найдем производную y'_x. Так как $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$, причем $dy=y'(t)dt$, $dx=x'(t)dt$, то

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Таким образом,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)} \qquad (3.8.2)$$

Формула (3.8.2) позволяет находить производную функции, заданной параметрически.

Пример 3.8.1. Найдите производную функции y'_x , заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} y = 3\sin 2t \\ x = 4\cos 2t \end{cases}$$

Решение. Воспользовавшись формулой (1.8.2), получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{(3\sin 2t)'}{(4\cos 2t)'}=\frac{6\cos 2t}{-8\sin 2t}=-\frac{3}{4}ctg 2t$$

3.9 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке. Значение $f'(x)$ производной, вообще говоря, тоже зависит от *x*, то есть производная $f'(x)$ представляет собой тоже функцию от *x*. Дифференцируя эту функцию, мы получаем так называемую вторую производную от функции $f(x)$.

Обозначается:

$$y''=(y')'=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Производная от второй производной называется производной третьего порядка или третьей производной:

$$y'''=(y'')'=\frac{d^3y}{dx^3}.$$

Вообще, производной *n*-го порядка от функции $f(x)$ называется производная первого порядка от производной *(n-1)* порядка и обозначается символически $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Для производных высших порядков имеют место следующие правила дифференцирования:

1. $\left(U+V\right)^{(n)}=U^{(n)}+V^{(n)}$

2. $(C\cdot U)^{(n)}=C\cdot\left(U\right)^{(n)}$

3. $\left(U\cdot V\right)^{(n)}=U^{(n)}\cdot V+n\cdot U^{(n-1)}\cdot V'+\dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}U^{(n-2)}\cdot V''+...+U\cdot V^{(n)}$ (Данное равенство носит название формулы Лейбница).

Пример 3.9.1. Найдите третью производную y''' функции $y=\sin^2 3x$.

Решение. Найдем первую производную y' от данной функции:

$$y'=\left(\sin^2 3x\right)'=\left((\sin 3x)^2\right)'=2\cdot\sin 3x\cdot(\sin 3x)'=2\cdot\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3=3\sin 6x.$$

При упрощении первой производной была использована формула: $\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

Найдем вторую производную:

$$y''=\left(y'\right)'=\left(3\sin 6x\right)'=3\cdot\cos 6x\cdot 6=18\cdot\cos 6x.$$

Найдем третью производную функции:

$$y'''=\left(y''\right)'=\left(18\cdot\cos 6x\right)'=-18\cdot\sin 6x\cdot 6=-108\cdot\sin 6x$$

Пример 3.9.2. Найдите вторую производную y'' функции $y=\dfrac{2x^2}{1-\cos x}$.

Решение. Найдем первую производную y', воспользовавшись формулой (1.4.4) дифференцирования частного:

$$y'=\left(\frac{2x^2}{1-\cos x}\right)'=\frac{(2x^2)'\cdot(1-\cos x)-2x^2\cdot(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}=$$

$$=\frac{4x\cdot(1-\cos x)-2x^2\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}=\frac{4x}{1-\cos x}-\frac{2x^2\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}.$$

Найдем вторую производную, воспользовавшись правилами дифференцирования суммы (3.4.2), произведения (3.4.3) и частного (3.4.4):

$$y''=\left(y'\right)'=\left(\frac{4x}{1-\cos x}-\frac{2x^2\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}\right)'=\frac{(4x)'\cdot(1-\cos x)-4x\cdot(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}-$$

$$-\frac{(2x^2\cdot\sin x)'\cdot(1-\cos x)^2-2x^2\cdot\sin x\cdot((1-\cos x)^2)'}{(1-\cos x)^4}=\frac{4\cdot(1-\cos x)-4x\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}-$$

$$-\frac{(4x\cdot\sin x+2x^2\cdot\cos x)\cdot(1-\cos x)^2-2x^2\cdot\sin x\cdot 2(1-\cos x)\cdot\sin x}{(1-\cos x)^4}.$$

С помощью формулы (3.5.2) можно находить и производные высших порядков для функций, заданных параметрически. Рассмотрим нахождение второй производной $\frac{d^2y}{dx^2}$. По определению второй производной имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

Так как $\frac{dy}{dx}=f(t)$, то для нахождения второй производной её нужно рассматривать как функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=f(t) \\ x=x(t) \end{cases}$$

Поэтому при нахождении второй производной по формуле (3.5.2) вместо y следует подставить $\frac{dy}{dx}$.

Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} \tag{3.9.1}$$

<u>Пример 3.9.3.</u> Найдите вторую производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} y=3\sin 2t \\ x=4\cos 2t \end{cases}$$

Решение. В примере (3.5.1) мы нашли первую производную заданной функции

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{4}ctg2t$$

Для нахождения второй производной, воспользуемся формулой (3.5.3)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}=\frac{\left(-\frac{3}{4}ctg2t\right)'}{(4\cos 2t)'}=\frac{\frac{3}{4}\frac{2}{\sin^2 2t}}{-8\sin 2t}=-\frac{3}{16\sin^3 2t}.$$

Рассмотрим способы отыскания дифференциалов высших порядков.

Известно, что $dy = f'(x) \cdot dx$, то есть дифференциал функции есть некоторая функция от x (от x может зависеть только первый сомножитель $f'(x)$, второй же сомножитель dx является приращением независимой переменной и от её значения не зависит).

Так как дифференциал dy есть функция от x, то мы вправе говорить о дифференциале этой функции, то есть о дифференциале от дифференциала:

$$d^2 y = d(dy)$$

Таким образом, дифференциал второго порядка можно отыскать по формуле:

$$d^2 y = f''(x) \cdot (dx)^2 = f''(x) \cdot dx^2 \qquad (3.9.2)$$

Дифференциал третьего порядка можно найти по формуле:

$$d^3 y = f'''(x) \cdot (dx)^3 = f'''(x) \cdot dx^3 \qquad (3.9.3)$$

Вообще, дифференциалом n-го порядка называется первый дифференциал от дифференциала *(n-1)* порядка и его можно отыскать по формуле:

$$d^n y = f^{(n)} \cdot (dx)^n$$

Пример 3.9.4. Найдите дифференциал второго порядка от функции $y = arctg 3x$.

Решение. Для отыскания дифференциала второго порядка, воспользуемся равенством (3.9.2). Найдем вторую производную от данной функции:

$$y' = (arctg 3x)' = \frac{(3x)'}{1+9x^2} = \frac{3}{1+9x^2}$$

$$y'' = (y')' = \left(\frac{3}{1+9x^2}\right)' = \frac{3' \cdot (1+9x^2) - 3(1+9x^2)'}{(1+9x^2)^2} = \frac{-3 \cdot 18x}{(1+9x^2)^2}$$

Таким образом, дифференциал второго порядка будет равен:

$$d^2 y = f''(x) \cdot dx^2 = \frac{-54x}{(1+9x^2)^2} \cdot dx^2 .$$

ГЛАВА IV. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ

4.1 Признаки монотонности и экстремумы функции

В пункте 2.1. учебно-методического пособия «Введение в математический анализ» (тех же авторов) мы ввели понятия возрастающих и убывающих функций. Однако для определения промежутков монотонности функции пользоваться определением возрастающих и убывающих функций весьма затруднительно. Поэтому при исследовании функции на монотонность пользуются необходимыми и достаточными условиями (признаками, критериями) возрастания и убывания функции. Сформулируем эти условия в виде теорем.

Теорема 4.1.1. (необходимое условие возрастания функции). Если дифференцируемая в интервале (a,b) функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале, то её производная не может быть отрицательной ни в одной точке данного интервала, то есть $f'(x) \geq 0$ для $a < x < b$.

Теорема 4.1.2. (необходимое условие убывания функции). Если дифференцируемая в интервале (a,b) функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале, то её производная не может быть положительной ни в одной точке данного интервала, то есть $f'(x) \leq 0$ для $a < x < b$.

Сформулируем достаточные признаки монотонности функции.

Теорема 4.1.3. (достаточное условие возрастания функции). Если непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет положительную производную, то эта функция возрастает на сегменте $[a,b]$.

Теорема 4.1.4. (достаточное условие убывания функции). Если непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция $y = f(x)$ в каждой внутренней точке этого сегмента имеет отрицательную производную, то эта функция убывает на сегменте $[a,b]$.

Так как возрастающие и убывающие функции называются монотонными функциями, то теоремы 2.1.1 – 2.1.4 называются условиями монотонности функции.

<u>Пример 4.1.1.</u> Определить интервалы монотонности функции $y = 2x^3 - 6x$.

Решение. Начиная любое исследование функции, находим область определения функции $D(f)$. Область определения нашей функции – любое действительное число, то есть $D(f)$: $x \in (-\infty;+\infty)$.

Теперь найдем производную функции и точки, в которых эта производная равна нулю.

$$y' = \left(2x^3 - 6x\right)' = 6x^2 - 6$$

$$6x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Разобъем область определения функции, полученными точками, на интервалы и определим знаки производной в каждом полученном интервале. Результаты этой операции удобнее заносить в таблицу:

Таблица 4.1.1 – Результаты исследования функции $y = 2x^3 - 6x$

x	$-\infty < x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x < \infty$
знак производной y'	+	0	-	0	+
поведение функции y	*возрастает*		*убывает*		*возрастает*

Замечание: Для определения знака производной на любом интервале достаточно выбрать произвольное значение аргумента x, принадлежащего данному интервалу, и вычислить значение производной в точке x. Например, определим знак производной на интервале $x \in (-\infty; -1)$. Выберем значение аргумента $x = -2 \in (-\infty; -1)$ и вычислим значение производной в этой точке

$$y'(-2) = 6(-2)^2 - 6 = 24 - 6 = 18 > 0.$$

Так как получили положительное число, то в соответствующую ячейку таблицы поставим знак плюс.

Аналогично, выберем значение аргумента $x = 0 \in (-1; 1)$ и, вычисляя значение производной в данной точке, получим

$$y'(0) = 6(0)^2 - 6 = 0 - 6 = -6 < 0$$

Таким образом, получили отрицательное значение производной, поэтому в соответствующей ячейке таблицы поставим знак минус.

Определим знак производной в последнем интервале. Для этого найдем значение производной в точке $x = 2 \in (1; +\infty)$.

$$y'(2) = 6 \cdot 2^2 - 6 = 24 - 6 = 18 > 0.$$

Получили положительное значение производной, поэтому в соответствующей ячейке поставим знак плюс.

Применяя достаточные признаки монотонности функции (теоремы 2.1.3; 2.1.4) определяем поведение функции на интервалах и отмечаем это в таблице.

Экстремумы функции

Рассмотрим график непрерывной функции $y = \sin x$, изображенный на рисунке 2.1.1. Как видно из рисунка, значение функции в точке $x = \frac{\pi}{2}$ больше, чем значения функции в соседних точках, лежащих как слева, так и справа от точки $x = \frac{\pi}{2}$. В этом случае говорят, что функция имеет в точке $x = \frac{\pi}{2}$ максимум.

В точке $x = \frac{3\pi}{2}$ значение функции меньше, чем в соседних точках, лежащих вблизи данной точки, как слева, так и справа. Тогда говорят, что в точке $x = \frac{3\pi}{2}$ функция имеет минимум.

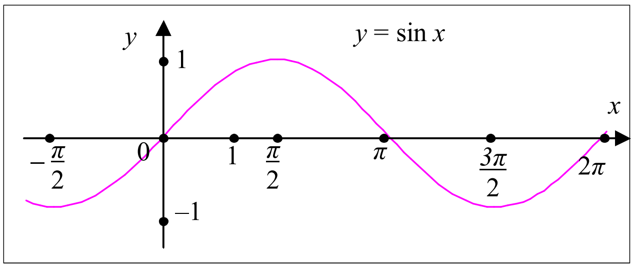


Рисунок 4.1.1 График функции $y = \sin x$

Рассмотрим строгое математическое определение максимума и минимума функции.

Определение 4.1.1. Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума или просто точкой максимума функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x = x_0$, что для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Определение 4.1.2. Точка $x = x_0$ называется точкой локального минимума или просто точкой минимума функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки $x = x_0$, что для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Определение 4.1.3. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума функции, а значения функции в этих точках называются экстремумами функции.

Необходимо отметить, что если в некоторой точке функция имеет максимум, то это не означает, что в этой точке функция имеет самое большое значение в области её определения. Это именно локальный максимум функции, то есть максимум «местного» значения. Таким образом, если в некоторой точке $x = x_0$ функция имеет максимум, то это самое большое значение функции, по сравнению с точками, лежащими достаточно близко к данной точке. При этом в области определения функции могут быть точки, в которых значения функции будут превышать значения локального максимума функции. Причем функция может иметь несколько точек максимума, а может не иметь их ни одной. Совершенно аналогичные замечания можно сделать относительно локального минимума функции. Причем интересен тот факт, что локальный максимум функции может оказаться меньше локального минимума функции.

Однако для отыскания экстремумов функции не пользуются определениями , приведенными выше. Существует ряд теорем, позволяющих более просто находить экстремумы функции. Эти теоремы носят названия условий или признаков или критериев существования экстремумов функции.

Теорема 4.1.5. (необходимый признак существования экстремума функции). Если дифференцируемая в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет в этой точке максимум или минимум, то её производная в данной точке обращается в нуль, то есть $f'(x_0) = 0$.

Определение 4.1.4. Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками функции первого рода.

Таким образом, из теоремы 2.1.5 следует, что если функция имеет экстремум, то он может быть только лишь в критических точках функции первого рода.

Однако теорема 2.1.5 является необходимым условием существования экстремума функции, но не является достаточным. Например, функция $y = x^3$ имеет производную $y' = 3x^2$, которая обращается в нуль при $x = 0$, но в этой точке экстремума не имеет. Из всего сказанного можно сделать вывод, что если функция имеет экстремум, то он может существовать только лишь в критических точках функции, но не во всякой критической точке функция может иметь экстремум.

Рассмотрим достаточные условия существования экстремума функции.

Теорема 4.1.6. (достаточный признак существования экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x\ )$ во всех точках некоторого интервала, содержащего критическую точку первого рода $x = x_0$ (кроме может быть самой точки), и если производная при переходе аргумента слева направо через критическую точку меняет знак с плюса на минус, то функция в этой точке имеет максимум, а при перемене знака с минуса на плюс – минимум.

Замечание. Если при переходе через критическую точку производная функции не меняет знак, то функция в этой точке не имеет экстремума.

Исходя из всего сказанного выше, можно составить план исследования функции на монотонность и экстремумы:

1. Найдите область определения функции $y = f(x)$;
2. Найдите производную функции $f'(x)$;
3. Найдите критические точки функции первого рода, исходя из определения 2.1.4;
4. Разбейте область определения функции критическими точками на интервалы;
5. Определите знак производной в каждом интервале;
6. Используя достаточные признаки возрастания, убывания и существования экстремума функции (теоремы 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6), определите промежутки монотонности функции и её экстремумы;
7. Полученные результаты исследования занесите в таблицу.

Пример 4.1.2. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

Решение. Воспользуемся планом исследования функции на монотонность и экстремум, приведенном выше.

1. Найдем область определения функции. Совершенно очевидно, что функция определена на всей числовой прямой, то есть

$$D(f): x \in (-\infty;+\infty)$$

2. Найдем производную функции $f'(x)=x^2-x-2$

3. Найдем критические точки функции первого рода, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.

$$x^2-x-2=0$$

$$D=1+8=9$$

$$x_1=-1; x_2=2.$$

Очевидно, что производная существует во всех точках области определения функции. Таким образом, функция имеет две критические точки первого рода $x_1=-1; x_2=2$.

4. Эти критические точки разбивают область определения функции на три интервала: $x \in (-\infty;-1)$, $x \in (-1;2)$, $x \in (2;+\infty)$.

5. В каждом из этих интервалов производная сохраняет свой знак, так как смена знака может произойти только при переходе через критическую точку. Определим знак производной во всех интервалах.

Для определения знака производной выберем значение аргумента, например $x = -2 \in (-\infty;-1)$ и вычислим значение производной в этой точке

$$f'(-2) = 4 + 2 - 2 = 4 > 0.$$

Аналогично, вычислим значение производной при $x = 0 \in (-1;2)$

$$f'(0) = 0 - 0 - 2 < 0$$

И при $x = 3 \in (2;+\infty)$

$$f'(3) = 9 - 3 - 2 = 4 > 0.$$

6. Таким образом, по значениям производной в выбранных точках, применяя теоремы 2.1.3 и 2.1.4, можем определить поведение функции в каждом интервале:

функция возрастает при $x \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$,

функция убывает для $x \in (-1;2)$.

Так как при переходе через критическую точку $x_1 = -1$, производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Вычислим его

$$y_{\max} = f(-1) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + 1 = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}.$$

При переходе через критическую точку $x_2 = 2$ производная меняет знак с минуса на плюс, то по теореме 2.1.6 в этой точке функция имеет минимум:

$$y_{\min} = f(2) = \frac{8}{3} - 2 - 4 + 1 = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}.$$

7. Полученные результаты заносим в таблицу (таблица 2.1.2):

Таблица 4.1.2 – Результаты исследования функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

x	$x \in (-\infty;-1)$	$x = -1$	$x \in (-1;2)$	$x = 2$	$x \in (2;+\infty)$
знак производ. $f'(x)$	+	0	-	0	+
поведение функции $f(x)$	*возрастает* ↗	*максимум* $y_{\max} = \frac{13}{6}$	*убывает* ↘	*минимум* $y_{\min} = -\frac{7}{3}$	*возрастает* ↗

Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на отрезке $[a,b]$. Всякая непрерывная на отрезке функция достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений. Очевидно, что это значение может достигаться либо на границе отрезка, либо внутри него. Если наибольшее или наименьшее значения функции достигаются внутри отрезка, то это может быть лишь в точках максимума или минимума функции. Из приведенных рассуждений можно составить план исследования функции:

1. Найдите область определения функции $y = f(x)$ и убедитесь в том, что она непрерывна на заданном отрезке $[a,b]$.
2. Найдите все критические точки функции первого рода, принадлежащие заданному отрезку $[a,b]$.
3. Вычислите значения функции в полученных критических точках и на концах отрезка, то есть в точках $x = a$ и $x = b$.
4. Из полученных значений функции отберите наибольшее и наименьшее.

Пример 4.1.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 - 6x$ на отрезке $x \in [-2,0]$.

Решение**.** Воспользуемся планом исследования функции на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

1. Найдем область определения функции.

Функция определена на всей числовой оси, то есть для $x \in (-\infty;+\infty)$.

Из этого следует, что функция непрерывна на отрезке $x \in [-2,0]$ и достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

2. Найдем критические точки функции первого рода.

Для этого найдем производную функции:

$$f'(x) = 6x^2 - 6$$

$$6x^2 - 6 = 0$$

$x_1 = -1; x_2 = 1$ – критические точки функции первого рода.

Отберем критические точки, принадлежащие заданному отрезку:

$$x_1 = -1 \in [-2;0]$$

$$x_2 = 1 \notin [-2;0].$$

3. Вычислим значения функции в критической точке, принадлежащей отрезку, то есть в точке $x_1 = -1 \in [-2;0]$ и на концах отрезка в точках $x = -2$ и $x = 0$.

$$f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) = -2 + 6 = 4$$

$$f(-2)=2(-2)^3-6(-2)=-16+12=-4$$
$$f(0)=2\cdot 0-6\cdot 0=0$$

4. Из полученных значений выберем наибольшее и наименьшее. Таким образом, наибольшее значение функция достигает в критической точке, а наименьшее – на левом конце отрезка, то есть
$$y_{наиб}=f(-1)=4,\quad y_{наим}=f(-2)=-4.$$

4.2 Критерии выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции

Определение 4.2.1. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой своей касательной на этом интервале.

Определение 4.2.2. График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой своей касательной на этом интервале.

Так, например, график функции $y=x^2$ вогнутый на интервале $x\in(-\infty;+\infty)$, то есть во всей области определения этой функции; а парабола $y=-x^2$ имеет вогнутый график на интервале $x\in(-\infty;+\infty)$. Однако график функций может быть в одних интервалах выпуклым, в других – вогнутым. Например, график функции $y=\sin x$ (см. рисунок 2.1.1), рассматриваемый на интервале $x\in(0;2\pi)$ имеет промежуток выпуклости в интервале $x\in(0;\pi)$ и промежуток вогнутости на интервале $x\in(\pi;2\pi)$.

Рассмотрим достаточный признак выпуклости и вогнутисти графика функции, который позволит нам определять поведение графика функции на данном интервале.

Теорема 4.2.1. Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала $(a;b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x)<0$, то график функции выпуклый на этом интервале, если же $f''(x)>0$, то график функции вогнутый на этом интервале.

Определение 4.2.3 Точка графика непрерывной функции, отделяющая его выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба графика функции.

Отыскание точек перегиба графика функции основано на следующих теоремах.

Теорема 4.2.2. (необходимое условие существования точки перегиба). Пусть функция $y=f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда, если точка $x_0\in(a;b)$ является точкой перегиба графика данной функции, то $f''(x_0)=0$.

Теорема 4.2.3. (достаточное условие существования точки перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции меняет знак при переходе через точку с абсциссой $x=x_0$, то эта точка является точкой перегиба графика функции.

Определение 4.2.4. Внутренние точки области определения функции, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются критическими точками функции второго рода.

Исходя, из всего рассмотренного, можно составить план отыскания промежутков выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции:

1. Найдите область определения функции $y=f(x)$;
2. Найдите вторую производную функции $f''(x)$;
3. Найдите критические точки функции второго рода;
4. Разбейте область определения функции критическими точками второго рода на интервалы;
5. Определите знак второй производной $f''(x)$ в каждом интервале;
6. Используя достаточные условия выпуклости и вогнутости и существования точек перегиба графика функции (теоремы 2.2.1 и 2.2.3) определите промежутки выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба;
7. Полученные результаты занесите в таблицу.

Пример 4.2.1. Исследуйте на выпуклость, вогнутость и точки перегиба график функции $f(x)=2x^3-6x$.

Решение. Исследуем функцию по предложенному выше плану.

1. Область определения функции является интервал $x\in(-\infty;+\infty)$.
2. Найдем первую и вторую производные функции

$$f'(x)=6x^2-6, \qquad f''(x)=12x;$$

3. Найдем критические точки функции второго рода: $12x=0$; $x=0$ – критическая точка функции второго рода;
4. Разобъем область определения функции критической точкой второго рода на два интервала и $x\in(0;+\infty)$;
5. Определим знак второй производной на каждом интервале. Очевидно, что $12x>0$ для всех $x\in(0;+\infty)$ и $12x<0$ для всех $x\in(-\infty;0)$;

6. Таким образом, из теоремы 2.2.1 следует, что на интервале $x \in (-\infty;0)$ график функции выпуклый, а на интервале $x \in (0;+\infty)$ график функции вогнутый.

Так как при переходе через критическую точку второго рода вторая производная меняет знак, то точка $x=0$ является точкой перегиба графика функции;

7. Для наглядности полученные результаты занесем в таблицу (таблица 4.2.1)

Таблица 4.2.1 – Результаты исследования функции $f(x)=2x^3-6x$

x	$x \in (-\infty;0)$	$x=0$	$x \in (0;+\infty)$
знак второй производ. $f''(x)$	–	0	+
поведение функции $f(x)$	*график выпуклый*	*точка перегиба*	*график вогнутый*

4.3 Асимптоты функции

При исследовании поведения функции на бесконечности, то есть при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ или вблизи точек разрыва второго рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются асимптотами.

Определение 4.3.1. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние между точкой M графика функции и этой прямой при удалении точки M в бесконечность, стремится к нулю.

Различают два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

I. *Вертикальные асимптоты*

Определение 2.3.2. Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Для отыскания вертикальных асимптот функции $y=f(x)$ необходимо найти точки, в которых функция не существует и исследовать поведение функции в окрестности этих точек. Если выполняется хотя бы одно из условий определения (2.3.2) ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty$), то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой.

II. *Наклонные асимптоты*

Пусть кривая с уравнением $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту. Тогда уравнение её имеет вид:

$$y=kx+b \tag{4.3.1}$$

Тогда, если прямая (4.3.1) – наклонная асимптота, то числа k и b находятся по формулам:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \tag{4.3.2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right) \tag{4.3.3}$$

Если хотя бы один из пределов (4.3.2) или (4.3.3) не существует или равен ∞, то кривая наклонной асимптоты не имеет.

<u>Пример 4.3.1.</u> Найдите асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение. *а*). Определим вертикальные асимптоты.

Для этого найдем область определения функции. Дробь существует для всех *x*, в которых знаменатель не обращается в ноль: $x\neq 0$. Таким образом, область определения *D(y):* $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Исследуем поведение функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x=0$.

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\frac{-1}{-0}=+\infty;\ \lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x^2+2x-1}{x}=\frac{-1}{+0}=-\infty$$

Односторонние пределы функции равны «плюс бесконечности» и «минус бесконечности». Тогда по определению (4.3.2) прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.

б). Определим наклонные асимптоты.

Для этого найдем значения пределов (4.3.2), (4.3.3).

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x}=2.$$

Таким образом, по формуле (4.3.1) прямая $y=x+2$ – наклонная асимптота.

В результате получили, что данная функция $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$ имеет две асимптоты: $x = 0$ и $y = x + 2$.

Выполним построение кривой. Для исследования взаимного расположения кривой и асимптоты рассмотрим разность ординат кривой и асимптоты при одном и том же значении x:

$$y_{\text{кр}} - y_{\text{ас}} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x}$$

При $x > 0$ – эта разность меньше нуля, при $x < 0$ – эта разность положительна, то есть при $x > 0$ – кривая ниже асимптоты, при $x < 0$ – кривая выше асимптоты.

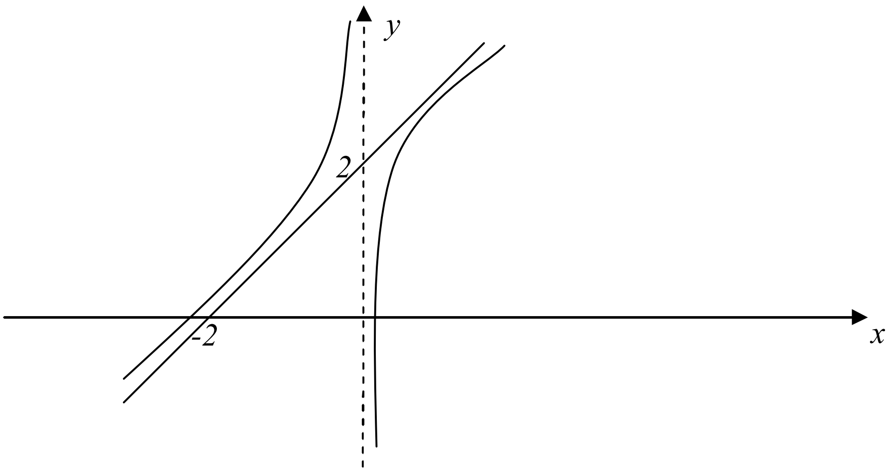


Рисунок 4.3.1 – График функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$

4.4 Общая схема исследования функции

Обобщим изложенные в пунктах 4.1–4.3 теоретические положения и составим общую схему исследования функции.

Схема исследования функции:

1. Нахождение области определения функции;
2. Исследование функции на четность, нечетность, периодичность;
3. Нахождение точек пересечения функции с осями координат;
4. Нахождение точек экстремума и определение интервалов монотонности;
5. Нахождение точек перегиба и определение направления выпуклости;
6. Отыскание асимптот;
7. Построение графика функции.

Пример 4.4.1. Исследуйте функцию $y=2x^3-9x^2+12x-9$ и постройте график.

Решение. Проведём исследование функции $f(x)=2x^3-9x^2+12x-9$ по предложенной выше схеме.

1. Область определения элементарной функции найдём, используя свойства элементарных функций: *D(y)*: $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Симметрия графика функции устанавливается проверкой следующих свойств функции:

а) функция $f(x)$ называется чётной, если область определения симметрична относительно оси *Oy* и для всех *x* из области определения выполняется равенство

$$f(-x)=f(x)$$

б) функция $f(x)$ называется нечетной, если её область определения симметрична относительно начала координат и для всех *x* из области определения выполняется равенство

$$f(-x)=-f(x)$$

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Наша функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$f(-x)=2(-x)^3-9(-x)^2+12(-x)-9=-2x^3-9x^2-12x-9=-\left(2x^3+9x^2+12x+9\right);$$

$$f(-x)\neq f(x),\quad f(-x)\neq -f(x).$$

Следовательно, функция $y=2x^3-9x^2+12x-9$ является функцией общего вида, то есть график функции симметрией не обладает.

3. *а*) Найдем точки пересечения функции с осью *Ox* (*y=0*). Для этого нужно решить уравнение $f(x)=0$ или

$$2x^3-9x^2+12x-9=0.$$

Умножим обе части уравнения на 4, получим уравнение:

$$(2x)^3-9(2x)^2+24(2x)-36=0;$$

Введем новую переменную $2x=t$. Получим уравнение вида:

$$t^3-9t^2+24t-36=0.$$

Разложим данное уравнение на множители:

$$t^3-9t^2+24t-36=(t-6)\left(t^2-3t+6\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t-6=0, \\ t^2-3t+6=0 \end{array}\right.$$

Уравнение $t^2-3t+6=0$ не имеет действительных корней, так как $D=b^2-4ac=-15<0$.

Получили один действительный корень t=6 или $2x$=6, x=3.
Таким образом, точкой пересечения графика функции с осью Ox является точка *A(3;0)*.

б) Найдем точки пересечения функции с осью Oy ($x=0$). Для этого в функцию всюду вместо x подставить значение 0:

$$y = 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 9 = -9 .$$

Таким образом, точкой пересечения функции с осью Oy будет точка *B(0;-9)*.

4. Интервалы монотонности и точки экстремума дифференцируемой функции находятся с помощью первой производной:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 .$$

Найдём критические точки функции I рода, то есть точки, при которых

$$f'(x)=0:$$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0;$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0;$$

$$(x-2)(x-1) = 0 .$$

Точки $x=2$, $x=1$ будут критическими точками I рода. Проверим достаточные условия существования экстремума. Найдём знак производной в каждом интервале (рисунок 4.4.1). Результаты исследования можно заносить в таблицу, как в пункте 2.1, а можно отметить на числовой прямой следующим образом:

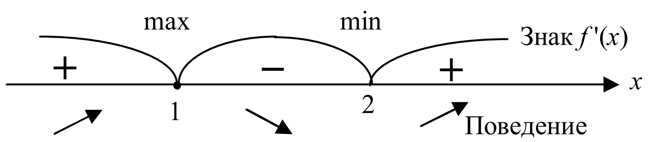


Рисунок 4.4.1 – Промежутки возрастания и убывания функции

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$$

$x \in (-\infty; 1)$, $f'(x) > 0$, функция возрастает;

$x \in (1; 2)$, $f'(x) < 0$, функция убывает;

$x \in (2; +\infty)$, $f'(x) > 0$, функция возрастает.

В точке $x=1$ функция имеет максимум, ее значение $y_{\max} = f(1) = 4$

В точке $x=2$ функция имеет минимум и ее значение $y_{\min} = f(2) = -3$

5. Определим точки перегиба и направление выпуклости графика функции. Найдем $f''(x)$: $f''(x) = 12x - 18 = 12\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Найдём критические точки II рода, то есть точки, в которых $f''(x) = 0$. Вторая производная обращается в нуль при $x = \frac{3}{2}$. Разобьем область определения D на два интервала.

Найдём знак $f''(x)$ в каждом интервале. $f''(x)<0$, при $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; $f''(x)>0$, $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, точка $x = \frac{3}{2}$ – критическая точка II рода (рисунок 4.4.2).

При переходе через точку $x = \frac{3}{2}$ вторая производная меняет свой знак. Это значение аргумента является абсциссой точки перегиба. Ордината этой точки равна $f\left(\frac{3}{2}\right) = -4{,}5$. Следовательно, точка $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ – точка перегиба графика функции. Отметим результаты исследования на числовой прямой (рисунок 2.4.2).

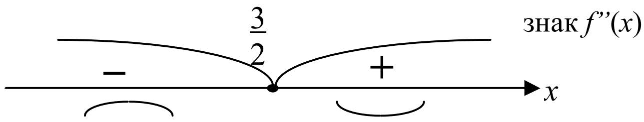


Рисунок 4.4.2 – Промежутки выпуклости, вогнутости функции
$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$

6. Найдем асимптоты функции.

а) Вертикальных асимптот функция не имеет, так как $D(f)$ $x \in R$, то есть нет точек разрыва II рода.

б) Уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$$

Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 9x^2 + 12x - 9}{x} = \infty .$$

Следовательно, наклонных и горизонтальных асимптот функция не имеет.

7. Построим график функции, используя полученные результаты исследования (рисунок 4.4.3).

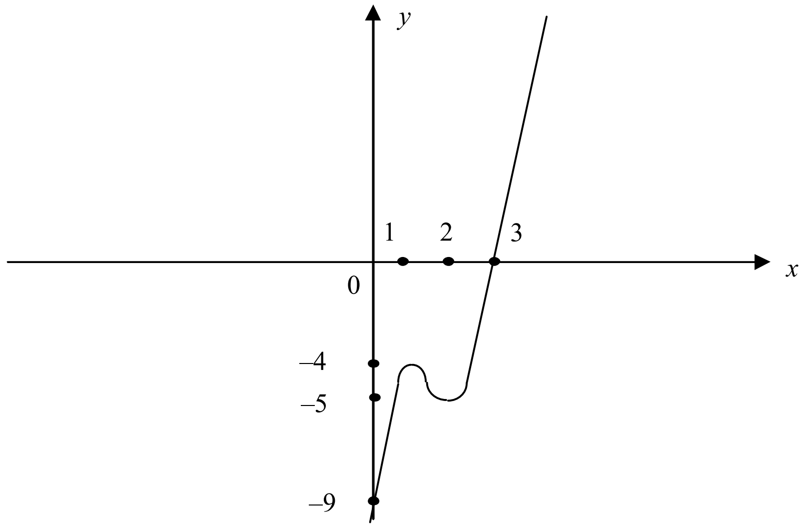


Рисунок 4.4.3 – График функции $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 9$

<u>Пример 4.4.2.</u> Исследуйте функцию $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ и постройте график.

Решение. Проведём исследование функции $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ по предложенной выше схеме.

1. Область определения функции исключает точки, в которых знаменатель дроби обращается в ноль.

$$x^2 - 1 \neq 0$$
$$x^2 \neq 1$$
$$x \neq \pm 1$$

Область определения данной функции можно записать: $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Симметрия графика функции устанавливается проверкой следующих свойств функции:

Наша функция является четной, так как

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1};$$

$$f(-x) = f(x).$$

Следовательно, график данной функции симметричен относительно оси ординат.

3. *а*) Найдем точки пересечения функции с осью *Ox* (*y=0*). Для этого нужно решить уравнение $f(x)=0$ или

$$\frac{x^2}{x^2-1}=0.$$

Дробь обращается в ноль, если её числитель равен нулю: $x^2=0$ или $x=0$.

Таким образом, точкой пересечения графика функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ с осью *Ox* является точка *O(0;0)*.

б) Найдем точки пересечения функции с осью *Oy* (*x=0*). Для этого в функцию всюду вместо *x* необходимо подставить значение 0:

$$y=\frac{0^2}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0.$$

Таким образом, точкой пересечения функции с осью *Oy* будет та же точка *O(0;0)*.

4. Интервалы монотонности и точки экстремума дифференцируемой функции находятся с помощью первой производной:

$$f'(x)=\frac{(x^2)'\cdot(x^2-1)-x^2\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-1)-x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-2x-2x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Найдём критические точки функции I рода, то есть точки, при которых

$f'(x)$=0 или $f'(x)$ не существует:

$$f'(x)=0 \Rightarrow -2x=0;$$

$$x=0 \in D(y).$$

$$f'(x) \text{ не существует} \Rightarrow (x^2-1)^2=0$$

$$x^2-1=0;$$

$$x^2=1;$$

$$x=\pm 1 \notin D(y)$$

Точка *x=0* является критической точкой I рода, точки *x=1*, *x=-1* не являются критическими, так как не принадлежат области определения. Проверим достаточные условия существования экстремума. Найдём знак производной в каждом интервале (рисунок 4.4.4):

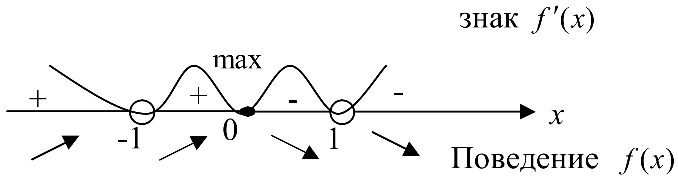


Рисунок 4.4.4 – Промежутки возрастания и убывания функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

$x\in(-\infty;\,-1)$, $f'(x)>0$, функция возрастает;

$x\in(-1;\,0]$, $f'(x)>0$, функция возрастает;

$x\in[0;\,1)$, $f'(x)<0$, функция убывает;

$x\in(1;\,+\infty)$, $f'(x)<0$, функция убывает.

В точке $x=0$ функция имеет максимум, ее значение $y_{\max}=f(0)=0$

5. Определим точки перегиба и направление выпуклости графика функции. Найдем $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{(-2x)'\cdot(x^2-1)^2-(-2x)\cdot((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4}=\frac{-2\cdot(x^2-1)^2+2x\cdot2(x^2-1)\cdot2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2-1)\cdot(4x^2-x^2+1)}{(x^2-1)^4}=\frac{2\cdot(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

Найдём критические точки II рода, то есть точки, в которых $f''(x)=0$ или $f''(x)$ не существует. Вторая производная не обращается в нуль ни при каких x; не существует в точках $x=\pm1\notin D(y)\Rightarrow$ критических точек II рода нет. Отметим на числовой оси точки, которые исключает область определения, и найдём знак $f''(x)$ в каждом интервале (рисунок 4.4.5) и определим поведение функции в этих интервалах.

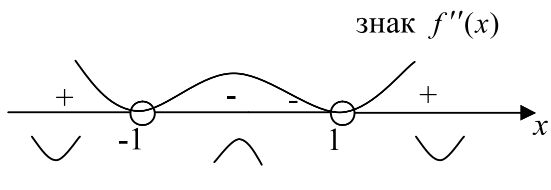


Рисунок 4.4.5 – Промежутки выпуклости, вогнутости функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

. $f''(x)<0$, при $x\in(-1;1)$ – выпуклая; $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty;-1)$ и $x\in(1;+\infty)$ – вогнутая.

6. Выясним вопрос о существовании асимптот.

а) Исследуем поведение функции вблизи точек разрыва $x = \pm 1$.
Для этого определим односторонние пределы функции при $x \to 1$ и при $x \to -1$:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{+0} = +\infty; \ \lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{-0} = -\infty; \ \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Таким образом, прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются вертикальными асимптотами.

б) Уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \ b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x^2-1)} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} - 0 \cdot x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1.$$

Таким образом, наклонная асимптота примет вид: $y = 1$ – горизонтальная асимптота, так как $k = 0$.

7. Построим график функции, используя полученные результаты исследования (рисунок 4.4.6).

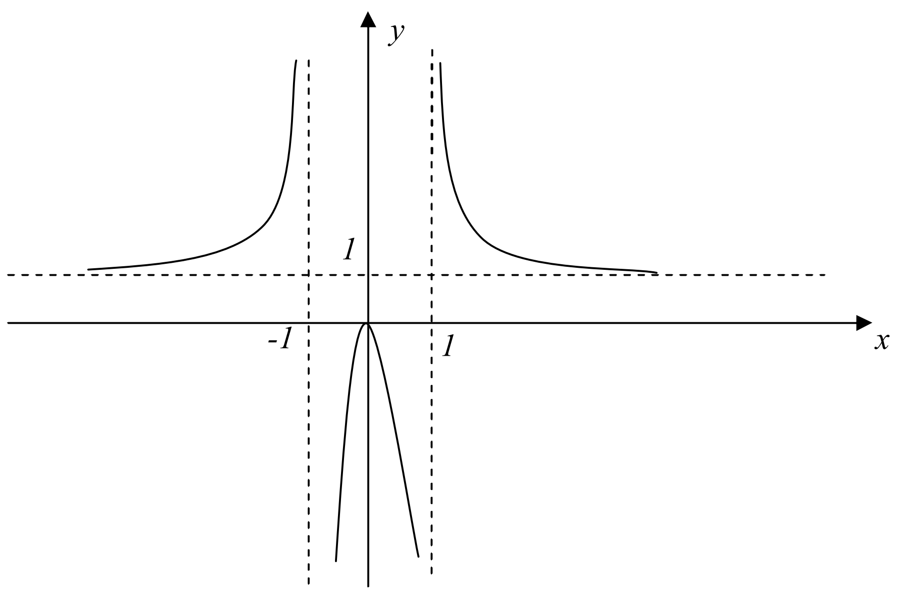


Рисунок 4.4.6 – График функции $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров, Я. С. Высшая математика [Текст] : сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – 3-е изд., испр. и доп. – Ростов-на-Дону : Издательство «Феникс», 1997. – 352 с.

2. Высшая математика [Текст] : учебно-методическое пособие / под ред. Л. З. Румшинского. – Москва, 1990. – 102 с.

3. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник для вузов / под ред. профессора Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 471 с.

4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учебное пособие для втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – 5-е изд., испр. – М. : «Высшая школа», 1999. – Часть 1. – 304 с.

5. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике [Текст] : учебное пособие / Л. А. Кузнецов. – 4-е изд.– М. : Издательство «Лань», 2005. – 240 с.

6. Линейная алгебра и основы математического анализа [Текст] : сборник задач по математике / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – М. : Издательство «Наука», 1981. – 464 с.

7. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс [Текст] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко. – 2-е изд., испр. – М. : Айрис-пресс, 2003. – 576 с.

8. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс [Текст] / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный, Ю. А. Шевченко / под ред. С. Н. Федина. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 592 с.

9. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] / В. П. Минорский. – М. : Издательство «Наука», 1964. – 360 с.

10. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике [Текст] / А. Д. Мышкис. – М. : Издательство «Наука», 1967. – 640 с.

11. Общий курс высшей математики для экономистов [Текст] : учебник / под ред. В. И. Ермакова. – М. : «Инфра М», 2002. – 656 с.

12. Шипачев, В. С. Высшая математика [Текст] : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа, 2001. – 479 с.

13. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике [Текст] : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. – 3-е изд.– М. : Издательство «Высшая школа», 2003. – 304 с.

ISBN

Учебное издание

Анна Викторовна Швалёва
Татьяна Павловна Филоненко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Введение в математический анализ
Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Курс лекций

Работа отпечатана с оригинал-макета,
предоставленного авторами

НФ НИТУ «МИСиС»
462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, дом 8