МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«МИСиС»

НОВОТРОИЦКИЙ ФИЛИАЛ

Кафедра Математики и естествознания

А.В. Швалева
Т.П. Филоненко

МАТЕМАТИКА

Методические указания
по выполнению контрольной работы № 1
для студентов технических направлений подготовки
заочной формы обучения

Новотроицк 2020

УДК 373.6/.9

ББК 74.5 р

Ш 33

Рецензенты:

Доцент кафедры математики, информатики и физики ОГТИ (филиал) ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет», к.ф.-м.н.

В.В. Пергунов

Зав. кафедрой математики и естествознания Новотроицкого филиала ФГАОУ ВО НИТУ «МИСиС», доцент, к.ф.-м.н.

Д.А. Гюнтер

А.В. Швалёва, Т.П. Филоненко. Математика: методические указания по выполнению контрольной работы № 1 для студентов технических направлений подготовки заочной формы обучения. – Новотроицк: НФ НИТУ «МИСиС», 2020. – 39 с.

В методических указаниях излагаются требования к структуре и содержанию контрольной работы, даны 20 вариантов контрольной работы, а также предложен разбор нулевого варианта, что существенно облегчает самостоятельную работу студента.

Рекомендовано Методическим советом НФ НИТУ «МИСиС»

Содержание

Введение

Контрольная работа является одной из форм текущего контроля успеваемости студентов. В соответствии с учебным планом овладение курсом математики включает выполнение студентами трех контрольных работ: по одной в каждом из первых трех семестров обучения. Успешное выполнение контрольных работ свидетельствует об освоении студентами соответствующего теоретического материала и его применения для решения математических и прикладных задач.

В соответствии с учебным планом, выполнение контрольной работы №1 предусмотрено в 1 семестре. Исходя из содержания курса математики, задания контрольной работы включают в себя проверку знаний и умений по разделам: «Определители и матрицы. Системы линейных уравнений», «Векторная алгебра и аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

1 Требования к оформлению текста контрольной работы, определение варианта

Контрольная работа оформляется либо на листах формата А4, либо в тетради в клетку в рукописном или в распечатанном на персональном компьютере варианте (по желанию студента). Образец титульного листа контрольной работы представлен в приложении данных указаний, а также на сайте НФ МИСиС.

Текст выполненной контрольной работы включает подробные решения всех задач. Последовательность решенных задач контрольной работы – произвольная, но при этом сохраняется номер задачи, под которым представлено ее условие в тексте варианта. Оформление решения каждой задачи включает: указание номера задачи, запись ее условия. После слова «Решение» приводится подробное решение задачи с объяснением каждого из шагов. Завершается оформление решения каждой задачи записью ответа. Листы, на которых представлено решение задач контрольной работы, должны быть пронумерованы. Титульный лист не нумеруется.

Определение варианта контрольной работы

Вариант контрольной работы № 1 выбирается по последним двум цифрам номера зачетной книжки. Ниже приведена таблица выбора варианта контрольной работы № 1.

Последние цифры	№ варианта
01; 11; 21; 31; 41	1
02; 12; 22; 32; 42	2
03; 13; 23; 33; 43	3
04; 14; 24; 34; 44	4
05; 15; 25; 35; 45	5
06; 16; 26; 36; 46	6
07; 17; 27; 37; 47	7
08; 18; 28; 38; 48	8
09; 19; 29; 39; 49	9
10; 20; 30; 40; 50	10
51; 61; 71; 81; 91	11
52; 62; 72; 82; 92	12
53; 63; 73; 83; 93	13
54; 64; 74; 84; 94	14
55; 65; 75; 85; 95	15
56; 66; 76; 86; 96	16
57; 67; 77; 87; 97	17
58; 68; 78; 88; 98	18
59; 69; 79; 89; 99	19
60; 70; 80; 90; 00	20

Критерии оценки

Студент должен выполнить все задания, включенные в контрольную работу. Контрольная работа считается зачтенной, если все задачи решены правильно. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи. Контрольные работы, выполненные не в полном объеме, а также содержащие задачи не своего варианта не могут быть зачтены. Если работа не зачтена, то она возвращается студенту на доработку. Ошибки, допущенные студентом в решении задач, указываются преподавателем в рецензии. Работа над ошибками выполняется студентом после рецензии. В работе над ошибками необходимо правильно решить только те задачи, в которых были допущены ошибки и повторно сдать контрольную работу на проверку. Вносить исправления в сам текст работы после рецензирования запрещается.

Для того чтобы успешно справиться с решением контрольной работы студенту необходимо изучить теоретический материал по данным темам и решить достаточное количество задач. В помощь студенту можно рекомендовать учебно–методические пособия, в которых детально изложены теоретические основы учебного курса, приводятся примеры решения задач, разбирается решение нулевого варианта контрольной работы. Использование данных пособий в процессе выполнения контрольной работы способствует развитию навыков решения математических задач и применению их в нахождении способов решения профессиональных задач.

2 Разбор нулевого варианта контрольной работы № 1

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}.$$

Решение:

1) Найдем решение с помощью формул Крамера.

Для этого сначала вычислим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 2 - 4\cdot(-1)\cdot 1 =$$

$$2+8-1-1-4+4 = 8 \neq 0$$

Таким образом, система совместна и определена. Найдем определители при неизвестных:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot 7 - 7\cdot 1\cdot 1 - 4\cdot(-1)\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot 2 =$$

$$= 6+8-7-7+12-4 = 8$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 7 & 2\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot2+2\cdot7\cdot1+3\cdot(-1)\cdot1-1\cdot2\cdot1-7\cdot(-1)\cdot1-2\cdot3\cdot2=$$

$$=4+14-3-2+7-12=8$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 7\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot7+2\cdot4\cdot3+1\cdot2\cdot1-1\cdot1\cdot3-4\cdot2\cdot1-2\cdot1\cdot7=$$

$$=7+24+2-3-8-14=8$$

Подставляя полученные значения в формулы Крамера, найдем решение системы:

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{8}{8}=1$$
$$x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{8}{8}=1$$
$$x_2=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=\frac{8}{8}=1$$

Решением системы служит тройка чисел (1;1;1).

2) Найдем решение с помощью обратной матрицы

В матричной форме данную систему линейных уравнений можно записать в виде $A\cdot X=B$, где:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 7\end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы можно найти по формуле: $X=A^{-1}\cdot B$. Для решения системы необходимо найти обратную матрицу. Воспользуемся формулой: $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\left(A^V\right)^T$

Сначала необходимо убедиться, что данная матрица имеет обратную. Для этого найдем определитель исходной матрицы A:

$$detA=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot2+2\cdot4\cdot1+1\cdot(-1)\cdot1-1\cdot1\cdot1-2\cdot1\cdot2-4\cdot(-1)\cdot1=$$

$$=2+8-1-1-4+4=8\neq0$$

Так как $detA\neq0$ следовательно, матрица имеет обратную.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}$=6; $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}$=-5; $A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}$=7;

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}$=2; $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}$=1; $A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}$=-3;

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3;\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1.$

Составим присоединенную матрицу:

$$A^{V}=\begin{pmatrix}6 & -5 & 7\\ 2 & 1 & -3\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Транспонированная присоединенная матрица будет иметь вид:

$$(A^{V})^{T}=\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ -5 & 1 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}.$$

Составим обратную матрицу по предложенной выше формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ -5 & 1 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы будет иметь вид:

$$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ -5 & 1 & 3\\ 7 & -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 7\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}6\cdot3+2\cdot2-2\cdot7\\ -5\cdot3+1\cdot2+3\cdot7\\ 7\cdot3-3\cdot2-1\cdot7\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8\\ 8\\ 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы нашли решение системы *$x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$,* то есть тройка чисел *(1;1;1)* – является единственным решением системы. Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденные значения неизвестных удовлетворяют данной системе уравнений.

3) Решим данную систему методом Гаусса. Найдем ранги матрицы системы *A* и расширенной матрицы системы *B*, выполняя элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса.

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 2 & 7\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{I}\cdot(-2)+\mathrm{II}\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -3 & -4\\ 1 & 4 & 2 & 7\end{array}\right)\begin{array}{l}\mathrm{I}\cdot(-1)+\mathrm{III}\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -3 & -4\\ 0 & 3 & 1 & 4\end{array}\right)\mathrm{II}\cdot(3)+\mathrm{III}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -3 & -4\\ 0 & 0 & -8 & -8\end{array}\right).$$

Таким образом, *r(A)=r(B)=3=n*. Тогда по теореме Кронекера-Капелли система совместна и определена, то есть имеет единственное решение. Последней матрице соответствует система линейных уравнений, приведенная к треугольному виду и равносильная данной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -x_2 - 3x_3 = -4 \\ -8x_3 = -8 \end{cases}.$$

Из этой системы последовательно находим неизвестные:

$$x_3 = 1;$$

$$x_2 = 4 - 3x_3 = 4 - 3 = 1;$$

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1$$

Таким образом, тройка чисел (1;1;1) является единственным решением системы.

2. Дан тетраэдр DABC. Найдите: 1) объем тетраэдра; 2) площадь грани ABC; 3) высоту, опущенную из вершины D; 4) угол между ребрами AB и AD; 5) уравнение плоскости α*, такой, что* $A \in \alpha$ *и* $AB \perp \alpha$*; 6) уравнение плоскости* β *, такой, что точки* $A, B, C \in \beta$*; 7) уравнение прямой* l*, такой, что* $A \in l$*,* l *ІІ BC; если точки A, B, C, D имеют координаты: D(0;0;0), A(-2;1;0), B(-1;3;2), C(0;-5;1)* (рисунок 1).

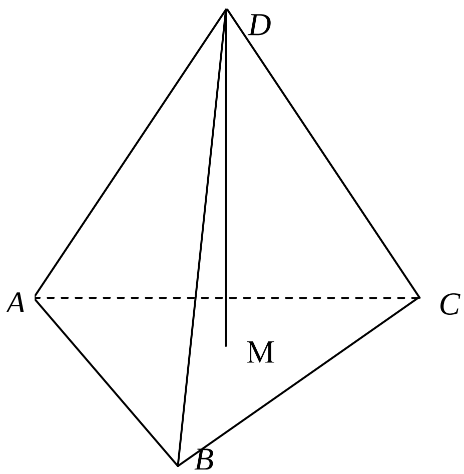

Рисунок 1 – Рабочий рисунок к задаче 2

Решение: Объем треугольной пирамиды составляет $\frac{1}{6}$ от объема параллелепипеда. В этой связи необходимо отыскать объем параллелепипеда, а затем полученный результат умножить на $\frac{1}{6}$ – это и будет искомый объём.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}(-1-(-2);3-1;2-0) = (1;2;2),$$

$$\overrightarrow{AC}(0-(-2);-5-1;1-0) = (2;-6;1),$$

$$\overrightarrow{AD}(0-(-2);0-1;0-0)=(2;-1;0).$$

Смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ будет равно:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0-4+4+24+1-0=25,$$

то есть объём параллелепипеда равен $V_{\text{пар-да}}=|25|=25$, тогда объем пирамиды $DABC$ можно найти

$$V_{\text{DABC}}=\frac{1}{6}\cdot 25=\frac{25}{6}$$

2) Найдем площадь грани ABC. Грань ABC представляет собой треугольник, площадь которого равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Координаты этих векторов были определены выше в пункте 1):

$\overrightarrow{AB}(-1-(-2);3-1;2-0)=(1;2;2)$; $\overrightarrow{AC}(0-(-2);-5-1;1-0)=(2;-6;1)$.

Найдём векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\bar{c}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 1\end{vmatrix}=14\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-10\cdot\vec{k}$$

Длина (или модуль) векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдётся следующим образом:

$$\left|\vec{\bar{c}}\right|=\sqrt{(14)^2+(3)^2+(-10)^2}=\sqrt{196+9+100}=\sqrt{305}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равна $S=\sqrt{305}$. Следовательно, площадь треугольника будет равна:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{305}=\frac{\sqrt{305}}{2}.$$

3) Вычислим высоту, опущенную из вершины D. Из школьного курса геометрии известно, что объём пирамиды находится по формуле:

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{осн}\cdot H,$$

где $S_{осн}$ – площадь основания пирамиды, а H – её высота.

Поэтому для отыскания высоты пирамиды $H= DM$, необходимо отыскать площадь основания пирамиды – площадь треугольника ABC и объём пирамиды.

Объём пирамиды был найден в первом пункте: составит:

$$V_{DABC}=\frac{1}{6}\cdot|25|=\frac{25}{6}.$$

Площадь треугольника была найдена в пункте 2):

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{305}=\frac{\sqrt{305}}{2}.$$

Выразим из школьной формулы объёма пирамиды высоту H:

$$H=\frac{3\cdot V_{DABC}}{S_{осн}}=\frac{3\cdot\frac{25}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{305}}=\frac{25}{\sqrt{305}}.$$

4) Найдем угол между ребрами *AB* и *AD:*

Угол между ребрами найдем с использованием скалярного произведения векторов:

$$cos(AB,\ AD)=\cos(\overline{AB};\overline{AD})=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|}.$$

Запишем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB}(1;2;2),\ \overrightarrow{AD}(2;-1;0)$$

Определим *cos(AB, AD):*

$$cos(AB,AD)=\frac{1\cdot 2+2\cdot(-1)+2\cdot 0}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(2)^2}\cdot\sqrt{(2)^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{2-2+0}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}}=0$$

Таким образом,

$$cos(AB,\ CM)=0,$$

а следовательно угол между ребрами *AB* и *AD* составляет:

$$\alpha=\arccos 0=\frac{\pi}{2}.$$

5) Составим уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$.

Уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором в общем виде:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

где $\vec{n}(a;b;c)$ - координаты нормального вектора, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - координаты точки, принадлежащей плоскости. В нашей задаче нормальным вектором плоскости служит вектор $\overrightarrow{AB}(1;2;2)$, а точка *A(-2;1;0)* – точка, принадлежащая плоскости. Подставим данные в уравнение:

$$1\cdot(x-(-2))+2\cdot(y-1)+2\cdot(z-0)=0,$$

$$1\cdot(x+2)+2\cdot(y-1)+2\cdot z=0$$

$$x+2+2\cdot y-2+2\cdot z=0$$

$$x+2y+2z=0.$$

Уравнение плоскости α выглядит: $x+2y+2z=0$.

6) Составим уравнение плоскости β, такой, что точки $A,B,C\in\beta$.

Уравнение плоскости, заданной тремя точками в общем виде:

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$, где $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ – координаты точек, принадлежащих плоскости. В нашем случае, такими точками являются точки *A(-2;1;0), B(-1;3;2) и C(0;-5;1).* Подставим координаты точек в уравнение:

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & y-1 & z-0 \\ -1-(-2) & 3-1 & 2-0 \\ 0-(-2) & -5-1 & 1-0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2)\cdot(2+12)-(y-1)\cdot(1-4)+z\cdot(-6-4)=0,$$

$$14\cdot(x+2)+3\cdot(y-1)-10\cdot z=0,$$

$$14x+28+3y-3-10z=0,$$

$$14x+3y-10z+25=0.$$

Таким образом, уравнение плоскости β: $14x+3y-10z+25=0$.

7) Составим уравнение прямой l, такой, что $A \in l$, l lI BC.

Запишем в общем виде уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором:

$\dfrac{x-x_0}{p_1}=\dfrac{y-y_0}{p_2}=\dfrac{z-z_0}{p_3}$, *где* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ - координаты точки, принадлежащей прямой, $\vec{p}(p_1;p_2;p_3)$ - координаты направляющего вектора.

Подставим координаты точки *A(-2;1;0)* и вектора $\overrightarrow{BC}(1;-8;-1)$ в уравнение:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-8}=\frac{z}{-1}$$

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую: а) $y^2-8x=0$

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A\cdot B=0\cdot 1$ равно нулю, то это уравнение параболического типа, следовательно, оно может определять или параболу, или пару параллельных прямых, или пару мнимых параллельных прямых, или пару совпадающих параллельных прямых.

2) Данное уравнение есть каноническое уравнение параболы вида: $y^2=2px$.

3) Определим числовую характеристику параболы: $2p=8 \Rightarrow p=4$ – параметр параболы.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых параболы:

a) парабола не имеет центра симметрии;

b) осью симметрии параболы является прямая *y=0*;

c) вершиной параболы является точка *O(0;0);*

d) фокусом параболы является точка F($\frac{p}{2}$;0) = *(2;0);*

e) директрисой является прямая с уравнением ℓ: $x=-\frac{p}{2}$ или *x=-2.*

5) Выполним построение (рисунок 2):

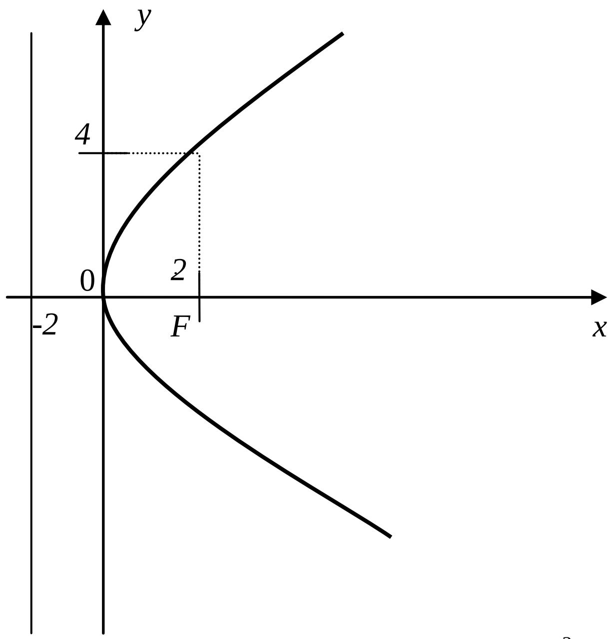

Рисунок 2 График функции $y^2 - 8x = 0$

б) Установите тип кривой, определите все характеристики для неё и выполните построение: $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Решение. 1) Так как произведение коэффициентов $A \cdot B = 9 \cdot (-16)$ отрицательно, то это уравнение гиперболического типа (по классификации кривых), следовательно, оно может определять или гиперболу, или пару пересекающихся прямых.

2) Приведем данное уравнение к каноническому виду. Для этого свободное слагаемое перенесем в правую часть равенства, а затем поделим обе части равенства на 144:

$$9x^2 - 16y^2 = 144;$$

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1;$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

3) Определим основные числовые характеристики гиперболы:

a) $a = 4$ – действительная полуось гиперболы; $b = 3$ – мнимая полуось гиперболы;

b) расстояние от центра до фокуса $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$;

c) эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

4) Найдем координаты замечательных точек и уравнения замечательных прямых:

a) центр кривой – точка с координатами $O(0;0)$;

b) уравнения осей симметрии гиперболы: прямая с уравнением $y=0$ – действительная ось, а прямая с уравнением $x=0$ – мнимая ось симметрии кривой;

c) вершины гиперболы: $A_1(-a;0) = (-4;0)$; $A_2(a;0) = (4;0)$;

d) координаты фокусов $F_1(-c;0)$, то есть $F_1(-5;0)$; $F_2(c;0)$, то есть $F_2(5;0)$.

e) составим уравнения директрис гиперболы:

$$\ell_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon} \text{ или } \ell_1 : x = -\frac{4}{\frac{5}{4}};\ x = -\frac{16}{5}.$$

$$\ell_2 : x = \frac{a}{\varepsilon} \text{ или } \ell_2 : x = \frac{4}{\frac{5}{4}};\quad x = \frac{16}{5}.$$

f) составим уравнения асимптот гиперболы:

$$y_1 = -\frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{b}{a}x.$$

Для нашей гиперболы: $y_1 = -\frac{3}{4}x$ и $y_2 = \frac{3}{4}x$.

5) Выполним построение кривой (рисунок 3):

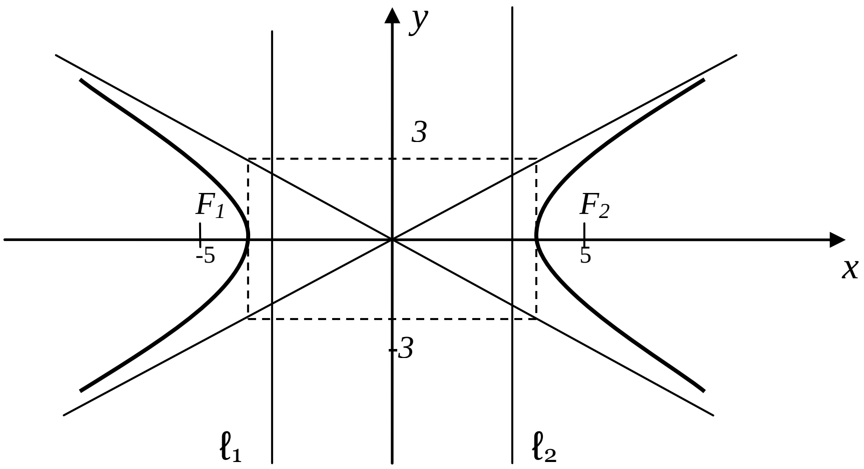

Рисунок 3 – схематичный график функции $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

4. Найдите пределы функции 1) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$ *а)* $x_0 = 1$; *б)* $x_0 = 2$; *в)* $x_0 = \infty$; *2)* $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3 - x}{\sqrt{5x+1} - 2\sqrt{x+1}}$; *3)* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg 3x}{e^{5x} - 1}$; *4)* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-4} \right)^{3x-2}$

Решение. 1) *Найдите пределы функции 1)* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$

а) В данном случае применим теорему о пределе дроби. Совершенно очевидно, что при $x \to 1$ предел числителя дроби

$$\lim_{x \to 1} \left(x^2 - 5x + 6 \right) = \lim_{x \to 1} x^2 - 5 \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 6 = 2$$

и предел знаменателя

$$\lim_{x \to 1} \left(x^2 - 12x + 20 \right) = \lim_{x \to 1} x^2 - 12 \lim_{x \to 1} x + \lim_{x \to 1} 20 = 9.$$

Поэтому результатом предела будет значение: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \frac{2}{9}$

б) В данном примере нельзя применить теорему о пределе дроби, так как непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Совершенно очевидно, что при $x \to 2$ предел числителя дроби

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-5x+6\right)=\lim_{x\to 2}x^2-5\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}6=0$$

и предел знаменателя

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-12x+20\right)=\lim_{x\to 2}x^2-12\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}20=0.$$

Поэтому нахождение предела этой дроби сводится к раскрытию неопределенности вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для этого преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{-1}{-8}=\frac{1}{8};$$

в) При подстановке $x_0=\infty$, получим неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для её устранения числитель и знаменатель поделим почленно на x^2:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{1-\frac{12}{x}+\frac{20}{x^2}}=1$, (так как $\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{12}{x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{20}{x^2}=0$).

2) Найдите предел функции $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{5x+1}-2\sqrt{x+1}}$.

Решение. Здесь мы также имеем математическую неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Чтобы раскрыть неопределенность в данном примере необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное знаменателю, чтобы избавиться от иррациональности.

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{5x+1}-2\sqrt{x+1}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{5x+1}+2\sqrt{x+1}\right)}{(\sqrt{5x+1}-2\sqrt{x+1})\left(\sqrt{5x+1}+2\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{5x+1}+2\sqrt{x+1}\right)}{(\sqrt{5x+1})^2-(2\sqrt{x+1})^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{5x+1}+2\sqrt{x+1}\right)}{5x+1-4(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{5x+1}+2\sqrt{x+1}\right)}{x-3}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+2\sqrt{x+1}\right)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{-\left(\sqrt{5x+1}+2\sqrt{x+1}\right)}{1}=-8$$

3) Найдите предел функции $\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{e^{5x}-1}$

Решение: При вычислении пределов трансцендентных функций часто пользуются таблицей эквивалентных бесконечно малых.

Можно заметить, что при $x\to 0$ числитель дроби $tg3x\to 0$ и знаменатель дроби $e^{5x}-1\to 0$. Таким образом, получаем математическую неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Всякую бесконечно малую функцию можно заменить эквивалентной бесконечно малой функцией. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{e^{5x}-1}=\begin{bmatrix} tg\alpha(x)\sim\alpha(x) \\ e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}.$$

4) Найдите предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x-2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-4}\right)^{3x-2}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5}{2x-4}-1\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+5-2x+4}{2x-4}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{3x-2}=$$

$$\left[\begin{matrix}\textit{воспользуемся формулой второго} \\ \textit{замечательного предела}\end{matrix}\right]=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{\frac{2x-4}{9}}\right)^{\frac{9}{2x-4}\cdot(3x-2)}=e^{\frac{27x-18}{2x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{27x-18}{2x-4}}=e^{\frac{27}{2}}=\sqrt{e^{27}}.$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{2x-4}\right)^{\frac{2x-4}{9}}\right]^{\frac{27x}{2x-4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27x}{2x-4}}=e^{\frac{27}{2}}.$$

5. Вычислите производные функций: а) $y=\left(7x^4-2x\right)^5$; *б)* $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}}$;

в) $y=\arccos 4x-\sqrt{1-2x^2}$; *г)* $y=5^{c\operatorname{tg}x}+x^2\cdot\sin 4x$.

Решение:

а) Для нахождения производной, воспользуемся таблицей производных сложных функций:

$$y'=\frac{dy}{dx}=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{воспользуемся табличной производной} \\ \text{сложной степенной функции} \\ \left(\mathrm{U^n}\right)'=n\cdot U^{n-1}\cdot U'\end{bmatrix}=$$

$$=5\left(7x^4-2x\right)^4\left(7x^4-2x\right)'==5\left(7x^4-2x\right)^4\left(7\cdot 4x^3-2\cdot 1\right)==5\left(7x^4-2x\right)^4\left(28x^3-2\right).$$

б) Прежде чем найти производную, преобразуем функцию $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}}$ с помощью свойств логарифма степени и дроби:

$$y=\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\sin x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\ln(1+\cos x)-\ln(1-\sin x)\right).$$

Применяя правила дифференцирования функций $\left(C\cdot f(x)\right)'=C\cdot f'(x)$ и $(U+V)'=U'+V'$, а также табличные производные $(\ln U)'=\dfrac{1}{U}\cdot U'$, получим:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\left(\left(\ln(1+\cos x)\right)'-\left(\ln(1-\sin x)\right)'\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^2 x-\sin x+\cos x+\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\sin x)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\sin x+\cos x}{(1+\cos x)(1-\sin x)}$$

в) Для отыскания производной функции $y=\arccos 4x-\sqrt{1-2x^2}$ воспользуемся правилом дифференцирования суммы $(U-V)'=U'-V'$ и таблицей производных сложных функций:

$$y'=(\arccos 4x-\sqrt{1-2x^2})'=(\arccos 4x)'-(\sqrt{1-2x^2})'=(\arccos 4x)'-((1-2x^2)^{\frac{1}{2}})'=$$

$$=\left[\begin{array}{lll}\text{воспользуемся} & \text{табличными} & \text{производными} \\ \text{сложных} & & \text{функций} \\ (\mathrm{U}^{\mathrm{n}})'=nU^{n-1}\cdot U'; & (\arccos U)'=-\dfrac{U'}{\sqrt{1-U^2}} & \end{array}\right]=-\frac{(4x)'}{\sqrt{1-(4x)^2}}\;-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot(1-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-2x^2)'=-\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}-\frac{1}{2}\cdot(1-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4x)=-\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}+2\cdot x\cdot(1-2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

г) Для отыскания производной функции $y=5^{c\,\mathrm{tg}\,x}+x^2\cdot\sin 4x$ необходимо вспомнить правило дифференцирования произведения $(U\cdot V)'=U'V-UV'$ (для отыскания производной второго слагаемого $x^2\cdot\sin 4x$) и табличные производные $(a^U)'=a^U\cdot U'\cdot\ln a$, $(\sin U)'=\cos U\cdot U'$, $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$:

$$y'=(5^{c\,\mathrm{tg}\,x}+x^2\cdot\sin 4x)'=(5^{ctgx})'+(x^2\cdot\sin 4x)'=5^{ctgx}\cdot(ctgx)'\cdot\ln 5+(x^2)'\cdot\sin 4x+x^2\cdot(\sin 4x)'=$$

$$=5^{ctgx}\cdot(-\frac{1}{\sin^2 x})\cdot\ln 5+2x\cdot\sin 4x+x^2\cdot\cos 4x\cdot 4.$$

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-6x$ на отрезке $x\in[-2{,}0]$.

Решение**.** Воспользуемся планом исследования функции на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

1. Найдем область определения функции.

Функция определена на всей числовой оси, то есть для $x\in(-\infty;+\infty)$.

Из этого следует, что функция непрерывна на отрезке $x\in[-2{,}0]$ и достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

2.Найдем критические точки функции первого рода.

Для этого найдем производную функции:

$$f'(x)=6x^2-6$$

$$6x^2-6=0$$

$x_1=-1; x_2=1$ – критические точки функции первого рода.

Отберем критические точки, принадлежащие заданному отрезку:

$$x_1=-1\in[-2;0]$$

$$x_2=1\notin[-2;0].$$

3.Вычислим значения функции в критической точке, принадлежащей отрезку, то есть в точке $x_1=-1\in[-2;0]$ и на концах отрезка в точках $x=-2$ и $x=0$.

$$f(-1)=2(-1)^3-6(-1)=-2+6=4$$

$$f(-2)=2(-2)^3-6(-2)=-16+12=-4$$

$$f(0)=2\cdot 0-6\cdot 0=0$$

4. Из полученных значений выберем наибольшее и наименьшее. Таким образом, наибольшее значение функция достигает в критической точке, а наименьшее – на левом конце отрезка, то есть

$$y_{наиб}=f(-1)=4,\quad y_{наим}=f(-2)=-4.$$

7. Исследуйте функцию $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ *и постройте график.*

Решение: проведём исследование функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ по схеме исследования.

1. Область определения функции исключает точки, в которых знаменатель дроби обращается в ноль.

$$x^2-1\neq 0$$
$$x^2\neq 1$$
$$x\neq \pm 1$$

Область определения данной функции можно записать: $x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Симметрия графика функции устанавливается отысканием значения f(-x) функции.

Наша функция является четной, так как

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1};$$
$$f(-x)=f(x).$$

Следовательно, график данной функции симметричен относительно оси ординат *Oy*.

3. *а*) Найдем точки пересечения функции с осью *Ox* (*y=0*). Для этого нужно решить уравнение $f(x)=0$ или

$$\frac{x^2}{x^2-1}=0.$$

Дробь обращается в ноль, если её числитель равен нулю: $x^2=0$ или $x=0$.

Таким образом, точкой пересечения графика функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ с осью *Ox* является точка *O(0;0)*.

б) Найдем точки пересечения функции с осью *Oy* (*x=0*). Для этого в функцию всюду вместо *x* необходимо подставить значение 0:

$$y=\frac{0^2}{0^2-1}=\frac{0}{-1}=0.$$

Таким образом, точкой пересечения функции с осью *Oy* будет та же точка *O(0;0)*.

4. Интервалы монотонности и точки экстремума дифференцируемой функции находятся с помощью первой производной:

$$f'(x)=\frac{(x^2)'\cdot(x^2-1)-x^2\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-1)-x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=$$
$$=\frac{2x^3-2x-2x^3}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Найдём критические точки функции I рода, то есть точки, при которых

$f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует:

$$f'(x)=0\Rightarrow -2x=0;$$

$$x = 0 \in D(y).$$

$$f'(x) \text{ не существует} \Rightarrow (x^2-1)^2 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0;$$

$$x^2 = 1;$$

$$x = \pm 1 \notin D(y)$$

Точка *x=0* является критической точкой I рода, точки *x=1*, *x=-1* не являются критическими, так как не принадлежат области определения. Проверим достаточные условия существования экстремума. Найдём знак производной в каждом интервале (рисунок 4):

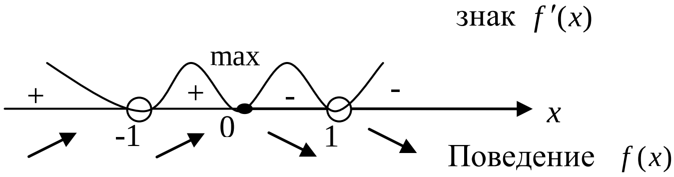

Рисунок 4 – Промежутки возрастания и убывания функции $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

$x \in (-\infty; -1)$, $f'(x)>0$, функция возрастает;

$x \in (-1; 0]$, $f'(x)>0$, функция возрастает;

$x \in [0; 1)$,$f'(x)<0$, функция убывает;

$x \in (1; +\infty)$, $f'(x)<0$, функция убывает.

В точке *x=0* функция имеет максимум, ее значение $y_{\max} = f(0) = 0$

5. Определим точки перегиба и направление выпуклости графика функции. Найдем $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(-2x)' \cdot (x^2-1)^2 - (-2x) \cdot ((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4} = \frac{-2 \cdot (x^2-1)^2 + 2x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2-1) \cdot (4x^2 - x^2 + 1)}{(x^2-1)^4} = \frac{2 \cdot (3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

Найдём критические точки II рода, то есть точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует. Вторая производная не обращается в нуль ни при каких x; не существует в точках $x = \pm 1 \notin D(y) \Rightarrow$ критических точек II рода нет. Отметим на числовой оси точки, которые исключает область определения, и найдём знак $f''(x)$ в каждом интервале (рисунок 5) и определим поведение функции в этих интервалах.

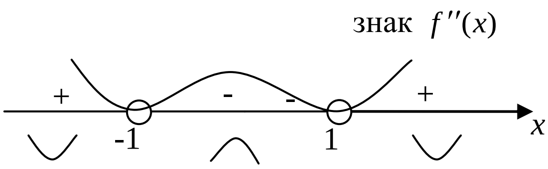

Рисунок 5 – Промежутки выпуклости, вогнутости функции $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

. $f''(x)<0$, при $x \in (-1;1)$ – выпуклая; $f''(x)>0$ при $x \in (-\infty;-1)$ и $x \in (1;+\infty)$ – вогнутая.

6. Выясним вопрос о существовании асимптот.

а) Исследуем поведение функции вблизи точек разрыва $x = \pm 1$.

Для этого определим односторонние пределы функции при $x \to 1$ и при $x \to -1$:

$$\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{+0}=+\infty\,;\ \lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{-0}=-\infty\,;$$

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{-0}=-\infty\,;\ \lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{+0}=+\infty\,.$$

Таким образом, прямые $x=1$ и $x=-1$ являются вертикальными асимптотами.

б) Уравнение наклонных асимптот $y = kx + b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ b=\lim_{x\to\infty}\bigl(f(x)-kx\bigr)$$

Найдём угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x^2-1)}=0\,;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1\,.$$

Таким образом, наклонная асимптота примет вид: $y=1$ – горизонтальная асимптота, так как $k=0$.

7. Построим график функции, используя полученные результаты исследования (рисунок 6).

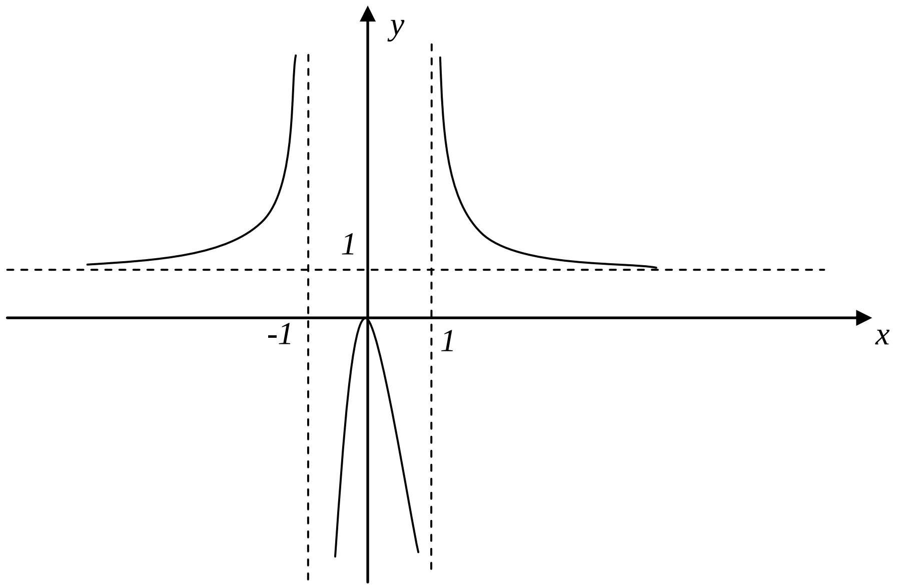

Рисунок 6 – График функции $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ *функции, заданной параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} y=3\sin 2t \\ x=4\cos 2t \end{cases}$$

Решение:

Воспользовавшись формулой $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{(3\sin 2t)'}{(4\cos 2t)'}=\frac{6\cos 2t}{-8\sin 2t}=-\frac{3}{4}ctg\,2t$$

Для нахождения второй производной, воспользуемся формулой: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_t'}{x_t'}$

Для нашего примера $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(-\frac{3}{4}ctg\,2t\right)'}{(4\cos 2t)'} = \frac{\frac{3}{4}\frac{2}{\sin^2 2t}}{-8\sin 2t} = -\frac{3}{16\sin^3 2t}$.

3 Содержание контрольной работы № 1

Вариант 1

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ -12x + 3y + 4z = -28 \\ 9y + z = 35 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами AB и AD; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l$, l lI BC; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(1;1;1), B(2;-3;4), C(1;0;-2), D(4;-3;0).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $y^2 - 16x = 0$

б) $49x^2 - 16y^2 - 784 = 0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 4x - 15}$, при а) $x_0 = 2$, б). $x_0 = 3$, в) $x_0 = \infty$;

2). $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}{x-4}$; 3). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x}{arctg4x}$ 4). $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{3x-1}$

5. Найдите производные функций

а) $y = \left(3x^4 + 2\right)^5$; б) $y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{1-5x}{1+5x}\right)^3}$; в) $y = \arccos 2x + \sqrt{1-4x^2}$;

г) $y = 2^{\operatorname{tg} x} + x \cdot \sin 2x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x) = \frac{x+6}{x^2+13}$; [–5; 5].

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: $a)$ $y=\frac{x}{x^2-1}$; $b)$ $\begin{cases} x=\cos\frac{t}{2} \\ y=t-\sin t \end{cases}$

Вариант 2

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x+2y+z=5 \\ 2x-3y+3z=1 \\ y-5z=-9 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC;* 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C\in\beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A\in l,\ \ l\ \ lI$ BC; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(2;0;0), B(-1;-1;3), C(4;5;2), D(-3;4;2).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $x^2+49y^2-49=0$

б) $-x^2+18y=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$, при а) $x_0=0$, б). $x_0=2$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg 2x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-4}\right)^{3x-3}$

5. Найдите производные функций:

а) $y=\left(5x^2+3\right)^3$; б) $y=\ln\sqrt[6]{\frac{1-x^6}{1+x^6}}$; в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$;

г) $y=e^{3x}-2x\cdot\operatorname{tg}3x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\frac{1}{2}x+\cos x$; $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

7.Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\frac{x^2-5}{x^2-3}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: $a)$ $y=\ln ctg 2x$; $b)$ $\begin{cases} x=t^3+8t \\ y=t^5+2t \end{cases}$

Вариант 3

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ -2x-y+3z=7 \\ -2y-5z=-12 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l$, l lI *BC*; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(-2;0;1), B(4;3;1), C(-2;2;1), D(4;3;0).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $6y^2+108x=0$

б) $36x^2-9y^2-324=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$, при а) $x_0=3$, б). $x_0=-3$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg3x}{ctg6x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x-4}\right)^{4x+3}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(\dfrac{1}{4}x^3-1\right)^3$; б) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{4x-1}{x^4+1}}$; в) $y=\arccos\sqrt{x+1}$;

г) $y=3^{\cos x}-x\cdot\sin 2x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+16}$; [–5; 5].

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{4x}{x^3-1}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a)* $y=x^3\ln x$; *b)* $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$

Вариант 4

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x+2z=5 \\ 2x+2y+5z=10 \\ 3x-2y+2z=-1 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l,\ \ l\ \ lI\ \ BC;$ если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(0;4;2), B(-3;3;1), C(2;2;4), D(1;1;1).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $-2y^2 + 8x = 0$

б) $4x^2 + 49y^2 - 196 = 0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$, при а) $x_0 = -3$, б). $x_0 = -2$, в) $x_0 = \infty$;

2). $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}}$; 3). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\arcsin 2x}$ 4). $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x+3}{5x+6} \right)^{2x-1}$

5. Найдите производные функций

а) $y = \left(\dfrac{1}{5} x^5 - 4 \right)^4$; б) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^3 - 3}{x^3 + 2}}$; в) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$;

г) $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{ctg} 3x - 2^{x^2}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x) = \dfrac{1}{2} x - \sin x$; $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$: *a)* $y = x \cdot arcctgx$; *b)* $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \cos t \end{cases}$

Вариант 5

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x + 3z = 7 \\ 2x - y - 6z = -15 \\ 3x - y + z = -2 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD;* 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l,\ \ l\ \ lI$ BC; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(1;1;-1), B(2;3;1), C(-4;3;0), D(2;4;3).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $16y^2 - 49x^2 - 784 = 0$

б) $4x^2+81y^2-324=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$, при а) $x_0=2$, б). $x_0=4$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{tg5x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{3x+5}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(3x^5-3\right)^5$; б) $y=\ln\sqrt[5]{\left(\dfrac{5x-3}{x^5+1}\right)^2}$; в) $y=\mathrm{arctg}(x-3)$;

г) $y=5^{\sqrt{x}}-x^2\,\mathrm{tg}\,2x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+7}$; [–3; 7].

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{4x^3+5}{x}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a)* $y=arcctgx$; *b)* $\begin{cases} x=3\cdot\cos^2 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$

Вариант 6

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ -2y-3z=-8 \\ 3x-4y+3z=-1 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2)площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A,B,C\in\beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A\in l$, l *lI* *BC*; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(0;0;3), B(4;2;1), C(3;4;-1), D(2;4;0).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $16x^2-y^2-16=0$

б) $2x^2-16y=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2-25x+25}{2x^2-15x+25}$, при а) $x_0=2$, б). $x_0=5$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg2x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+3}\right)^{5x+3}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(5x^4+3\right)^2$; б) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1-8x}{x^8+1}}$; в) $y=\arccos\sqrt{1-x}$;

г) $y=3^{\sqrt{x}}+\dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x$; $\left[-\dfrac{3\pi}{2};-\pi\right]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y=e^{ctg3x}$; *b*) $\begin{cases} x=3\cdot\cos t \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$

Вариант 7

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+y+3z=6 \\ -x+3z=7 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A,B,C\in\beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A\in l$, l *lI* *BC*; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(0;0;0), B(3;-3;2), C(4;2;1), D(3;2;0).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $x^2+64y^2-64=0$

б) $9y^2+72x=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$, при а) $x_0=1$, б). $x_0=-4$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg7x}{tg5x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)^{4x+5}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(7x^5-6\right)^4$; б) $y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^4}$; в) $y=\arcsin 3x-\sqrt{1-9x^2}$;

г) $y=e^{\operatorname{tg}x}-\sqrt{x}\cos 2x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\dfrac{x-5}{x^2+1}$; [–3; 7].

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)\dfrac{x^3-4}{x^2}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y=e^x\cdot\cos x$; *b*) $\begin{cases} x=3t-t^3 \\ y=3t^2 \end{cases}$

Вариант 8

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+3y-z=0 \\ x-2y+z=-1 \\ 3x-2y=-5 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A,B,C\in\beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A\in l$, l lI BC; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(4;3;0), B(7;2;-3), C(5;4;2), D(-3;-3;2).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $81x^2+4y^2-324=0$

б) $9y^2-36x=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+25}{x^2+15x+50}$, при а) $x_0=5$, б). $x_0=-5$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg7x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+6}\right)^{2x+3}$

5. Найдите производные функций

а) $y=(4x^3-2)^5$; б) $y=\ln\sqrt[6]{\left(\dfrac{x^6-1}{6x+5}\right)^7}$; в) $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x-1}$;

г) $y=2^{x^2+1}-x\cdot\sin 4x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sin x$; $\left[-2\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = e^{-x} \cdot \sin x$; *b*) $\begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$

Вариант 9

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ x - 2y - 4z = -11 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l,\ l\ lI\ BC$; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(4;-3;5), B(2;0;3), C(-4;3;5), D(0;0;7).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $9x^2 - 25y^2 + 225 = 0$

б) $5x^2 - 70y = 0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2 + 5x - 8}{2x^2 + 3x - 5}$, при а) $x_0 = -2$, б). $x_0 = 1$, в) $x_0 = \infty$;

2). $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x-3}$; 3). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg17x}{\sin 5x}$ 4). $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+4}\right)^{x+5}$

5. Найдите производные функций

а) $y = \left(3x^4 - 3\right)^5$; б) $y = \ln \sqrt[5]{\left(\frac{6x-3}{6x+2}\right)^3}$; в) $y = \mathrm{arctg}(x-1)$;

г) $y = x \cdot \mathrm{tg} 3x + 2^{x-2}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x) = \frac{x-4}{x^2+9}$; [–4; 6].

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = x\sqrt{x^2+1}$; *b*) $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$

Вариант 10

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x+3y=4 \\ 3x-2y+z=-3 \\ 2x+y-z=-3 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2)площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A,B,C\in\beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A\in l$, l *lI* BC; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(3;-3;2), B(2;-3;4), C(7;3;4), D(-4;9;5).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $x^2+64y^2-64=0$

б) $9y^2+72x=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$, при а) $x_0=-2$, б). $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}}{x-6}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{5x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{5x+1}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(8x^3+6\right)^5$; б) $y=\ln\sqrt[7]{\left(\dfrac{7x-4}{x^7-2}\right)^3}$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-x}$;

г) $y=3^{\sin x}-\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{tg}3x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x$; $\left[-2\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *а)* $y=xe^{-x^2}$; *b)* $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{2}(t+\dfrac{1}{t}) \end{cases}$

Вариант 11

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+5y+z=0 \\ 3x+4y+2z=8 \\ 2x-4y-3z=-1 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение

плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l$, l lI BC; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(3;1;4), B(-1;6;1), C(-1;1;6), D(0;4;-1)*.

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$

б) $4y^2 + 16x = 0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 - 2x - 24}{3x^2 - 9x - 12}$, при а) $x_0 = 2$, б). $x_0 = 4$, в) $x_0 = \infty$;

2). $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{4-x} - \sqrt{2+x}}{1-x}$; 3). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{arctg 5x}$ 4). $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+8}{2x-3} \right)^{3x+1}$

5. Найдите производные функций

а) $y = \left(4x^4 - \dfrac{7}{x^3 \cdot \sqrt[3]{x}} \right)^4$; *б)* $y = \ln \sqrt[5]{\left(\dfrac{5x+4}{x^5+2} \right)^3}$; *в)* $y = \mathrm{arc}tg\sqrt{1-2x}$;

г) $y = 2^{\sin x} - \sqrt[4]{x} \cdot \mathrm{tg}\, 4x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

$y = \dfrac{4x}{4+x^2}$, $[-4;2]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{4}{3+2x-x^2}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *а)* $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; *b)* $\begin{cases} x = \cos\dfrac{2t}{3} \\ y = 3t - \cos t \end{cases}$

Вариант 12

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 5x + 8y - z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l$, l lI BC; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(3;3;9), B(6;9;1), C(1;7;3), D(8;5;8).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $36x^2 - 4y^2 - 144 = 0$

б) $2y^2 + 8x = 0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{4x^2+4x-8}{3x^2+6x-9}$, при а) $x_0=0$, б). $x_0=1$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-1}}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\arcsin 5x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+5}\right)^{2x+4}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(4x^4-1\right)^3$; *б)* $y=\ln\sqrt[7]{\left(\dfrac{7x+4}{x^7+2}\right)^3}$; *в)* $y=2\operatorname{arc}ctg\sqrt{1-3x}$;

г) $y=4^{\sin 2x}-\sqrt[4]{x}\cdot c\operatorname{tg}4x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y=\dfrac{10x}{1+x^2}$, $[0{,}3]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y=\ln tg3x$; *b*) $\begin{cases} x=t^3-7t \\ y=t^5-3t \end{cases}$

Вариант 13

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x-4y-2z=-16 \\ 3x+y+z=21 \\ -3x+5y+6z=41 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A,B,C\in\beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A\in l$, l *lI* *BC*; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(3;5;4), B(5;8;3), C(1;9;9), D(6;4;8).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $4x^2-16y^2-64=0$

б) $4y^2-2x=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-2x-4}{x^2+5x+4}$, при а) $x_0=3$, б). $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x-2}}{x-4}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg2x}{ctg8x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^{5x+2}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(-2x^2+1\right)^3$; *б)* $y=\ln\sqrt[4]{\left(\frac{3x-8}{x^8+2}\right)^3}$; *в)* $y=3\mathrm{arc}ctg\sqrt{1-7x}$;

г) $y=4^{\cos 2x}-\sqrt[4]{x}\cdot \mathrm{tg}\,4x$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y=2\sqrt{x}-x$, $[0,4]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a)* $y=x^2\ln 2x$; *b)* $\begin{cases} x=t-\sin 2t \\ y=1-\cos 2t \end{cases}$

Вариант 14

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x-y+5z=4 \\ 3x-y+5z=0 \\ 5x+2y+13z=2 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A,B,C\in\beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A\in l$, l *lI* *BC;* если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(2;4;3), B(7;6;3), C(4;9;3), D(3;6;7)*.

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $-4x^2+16y^2-64=0$

б) $4y-2x^2=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-9x-12}{2x^2-2x-4}$, при а) $x_0=-3$, б). $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4+x}-\sqrt{8-x}}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 4x}{\arcsin 2x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x-2}\right)^{2x+1}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(2x^4+1\right)^2$; б) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{1-8x}{x^8+1}}$; в) $y=2\arccos\sqrt{1-2x}$;

г) $y=3^{\sqrt{9x}}+\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y=4-x-\dfrac{4}{x^2}$, $[1,4]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = x \cdot arctgx$; *b*) $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = \sin 3t \end{cases}$

Вариант 15

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 4x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l$, l *lI BC*; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(9;5;5), B(-3;7;1), C(5;7;8), D(6;9;2)*.

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $4x^2 - 49y^2 - 196 = 0$

б) $-2y^2 + 10x = 0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2 + 6x - 9}{2x^2 - 2x - 24}$, при а) $x_0 = 2$, б). $x_0 = -3$, в) $x_0 = \infty$;

2). $\lim\limits_{x \to -2} \frac{\sqrt{x+9} - \sqrt{5-x}}{x+2}$; 3). $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln(1 - x^2)}$ 4). $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+8} \right)^{x-1}$

5. Найдите производные функций

а) $y = (2x^5 + 7)^5$; б) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{1-2x}{x^8 + 1}}$; в) $y = 2\arccos\sqrt{1-4x}$;

г) $y = 3^{\sqrt{16x}} + \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y = x - 4\sqrt{x} + 5$, $[1,9]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \frac{12x}{9 + x^2}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = 2arctgx$; *b*) $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos^2 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$

Вариант 16

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 7x-5y=34 \\ 4x+11y=-36 \\ 2x+3y+4z=-20 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D;* 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A,B,C\in\beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A\in l,\ \ l\ \ lI\ \ BC$; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(0;7;1), B(4;1;5), C(4;6;3), D(3;9;8).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $9x^2-49y^2-441=0$

б) $y^2+10x=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+6x-8}{x^2-4x+3}$, при а) $x_0=2$, б). $x_0=1$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x}}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\ln(1+2x)}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+1}\right)^{3x+4}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(2x^4+1\right)^3$; *б)* $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1-4x}{x^7+1}}$; в) $y=-3\arccos\sqrt{1-2x}+2x$;

г) $y=7^{\cos x}+\dfrac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y=1-\sqrt[3]{x^2-2x}$, $[0,3]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a)* $y=e^{tg 3x}$; *b)* $\begin{cases} x=2\cdot\cos 2t \\ y=2\sin^2 t \end{cases}$

Вариант 17

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l,\ l\ lI\ BC$; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(5;5;4), B(3;8;4), C(3;5;10), D(5;8;2).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $9x^2 - 49y^2 - 441 = 0$

б) $2y^2 + 6x = 0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{7x^2 + 21x + 14}{2x^2 + 8x + 6}$, при а) $x_0 = 1$, б). $x_0 = -1$, в) $x_0 = \infty$;

2). $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+5} - \sqrt{9-x}}{x-2}$; 3). $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg 7x}{1 - \cos x}$ 4). $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x-2}{2x+1} \right)^{x+5}$

5. Найдите производные функций:

а) $y = \left(2x^3 + 2\right)^8$; *б)* $y = 2 \ln \sqrt[6]{\dfrac{1-2x}{x^7 + 2}}$; в) $y = -3 arctg \sqrt{1 - 2x} + 4x$;

г) $y = 4^{tgx} + \dfrac{2 - e^{3x}}{2 + e^{3x}}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}$, $[-3{,}0]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{-8x}{4 + x^2}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a)* $y = e^x \cdot \sin x$; *b)* $\begin{cases} x = 2t - t^3 \\ y = 2t^2 \end{cases}$

Вариант 18

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l,\ l\ lI\ BC$; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(6;1;1), B(4;6;6), C(4;2;0), D(1;2;6)*.

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $25x^2 - 4y^2 - 100 = 0$

б) $6y^2 + 12x = 0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2 + 4x - 16}{3x^2 - 3x - 6}$, при а) $x_0 = 5$, б). $x_0 = 2$, в) $x_0 = \infty$;

2). $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg5x}{\ln(1-4x)}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x+4}$

5. Найдите производные функций

а) $y = (3x^2 - 3)^5$; *б)* $y = \ln \sqrt[5]{\left(\dfrac{6x+3}{6x-2}\right)^3}$; *в)* $y = \dfrac{1}{3} \operatorname{ar} c \operatorname{ctg}(x-1)$;

г) $y = 2x \cdot c\operatorname{tg} 3x + 2^{3x-2}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$, $[-3;0]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и постройте её график: $f(x) = \dfrac{3x-2}{x^3}$.

8. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y = e^{-x} \cdot \cos x$; *b*) $\begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 4t^2 \end{cases}$

Вариант 19

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2) площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A \in \alpha$ и $AB \perp \alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A, B, C \in \beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A \in l,\ l\ lI\ BC$; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(7;5;3), B(9;4;4), C(4;5;7), D(7;9;6).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $x^2 - 49y^2 - 49 = 0$

б) $-x^2 + 18y = 0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2 + 12x + 10}{3x^2 + 12x - 15}$, при а) $x_0 = -2$, б). $x_0 = -5$, в) $x_0 = \infty$;

2). $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-4} - \sqrt{8-x}}{x-6}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 3x}{1 - \cos 4x}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+2}{4x-4}\right)^{5x-2}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^5$; *б)* $y=\ln\sqrt[4]{\left(\frac{7x+3}{7x-2}\right)^7}$; *в)* $y=\frac{1}{8}\arccos(1+x)$;

г) $y=3x\cdot\operatorname{tg}2x+3^{2x-1}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y=\frac{4x}{4+x^2}$, $[0;3]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a)* $y=\sqrt{x^2-1}$; *b)* $\begin{cases} x=t-\ln\cos t \\ y=t+\ln\sin t \end{cases}$

Вариант 20

1. Решите систему линейных уравнений тремя способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x-3y+2z=8 \\ 2x+5y-3z=11 \\ 5x+6y-2z=13 \end{cases}$$

2. Дан тетраэдр *ABCD*. Найдите:

1) Объем тетраэдра; 2)площадь грани *ABC*; 3) высоту, опущенную из точки *D*; 4) угол между ребрами *AB* и *AD*; 5) уравнение плоскости α, такой, что $A\in\alpha$ и $AB\perp\alpha$; 6) уравнение плоскости β, такой, что точки $A,B,C\in\beta$; 7) уравнение прямой l, такой, что $A\in l$, $l \parallel BC$; если точки *A, B, C, D* имеют координаты *A(1;1;1), B(2;-3;4), C(4;5;2), D(-3;4;2).*

3. Установите тип кривой, приведите уравнение кривой к каноническому виду, найдите её характеристики. Постройте эту кривую:

а) $49x^2-16y^2-784=0$

б) $y^2-16x=0$

4. Найдите пределы функций:

1). $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{3x^2+21x+36}{2x^2+6x-8}$, при а) $x_0=-2$, б). $x_0=-4$, в) $x_0=\infty$;

2). $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}{x-3}$; 3). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1-2x)}$ 4). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+4}\right)^{3x+4}$

5. Найдите производные функций

а) $y=\left(\frac{1}{3}x^3+2\right)^3$; *б)* $y=\ln\sqrt[5]{\left(\frac{2x+3}{5x-2}\right)^4}$; *в)* $y=\frac{1}{4}\cos(1-x)$;

г) $y=3x\cdot\arcsin 2x+3^{2x-1}$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке: $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8$, $[-4;-1]$.

7. Исследуйте средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и постройте её график: $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$.

8. Найдите $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$: *a*) $y=xe^{-x^3}$; *b*) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=2t+3t^2 \end{cases}$

4 Список рекомендуемой литературы, интернет-ресурсов

Основная литература

1. Высшая математика для экономических специальностей: учебник и практикум / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юрайт-издат, 2014. – 909 с.

2. Кремер Н.Ш., Фридман М.Н. Линейная алгебра: учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, М.Н. Фридман. – М.: Издательство Юрайт, 2014. – 307 с.

3. Кремер Н.Ш. Математический анализ : учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин; под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Изд-во Юрайт, 2014. – 620 с.

4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике.Типовые расчёты: учеб.пособие/ Л.А.Кузнецов. - СПб.: Лань, 2005.

Методическая литература

1. Швалева А.В. Математический анализ. Введение в математический анализ: учеб.-методич. пособие для самост. и контр.работ/ А.В Швалева., Т.П Филоненко. - Новотроицк: НФ НИТУ «МИСиС», 2013.-72с.

2. Швалева А.В. Математический анализ. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учеб-методич. пособие для самост. и контр.рабты/ А.В Швалева., Т.П Филоненко. - Новотроицк: НФ НИТУ «МИСиС», 2013. -60с.

3. Швалева А.В. Аналитическая геометрия: учебн.-метод. пособие для самостоятельной и контрольной работ; з/о/ А.В.Швалева, Т.П.Филоненко.-Новотроицк: НФ МИСиС, 2007-111с.

Перечень ресурсов информационно-комммуникативной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Российский образовательный портал http://www.edu.ru |

2. http://www.lineyka.inf.ua/

3. Математический интернет-журнал «Exponenta», http://www.exponenta.ru

4. Учебники по математике (формат DJVU), http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics.htm

ШВАЛЕВА АННА ВИКТОРОВНА
ФИЛОНЕНКО ТАТЬЯНА ПАВЛОВНА

МАТЕМАТИКА

Методические указания
по выполнению контрольной работы № 1
для студентов технических направлений подготовки
заочной формы обучения

Подписано в печать 16.12.2020 г.		
Формат 60x90 $^{1}/_{16}$ Рег. № 236	Печать цифровая Тираж 10 экз.	Уч.-изд.л. 2,44

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал
462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, 8.
E-mail: nf@misis.ru
Контактный тел. 8 (3537) 679729.