

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
НОВОТРОИЦКИЙ ФИЛИАЛ

Кафедра металлургических технологий и оборудования

Д.Р. Ганин, П.В. Гавриш

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Методические указания
для выполнения домашнего задания/контрольной работы
по дисциплинам «Механика жидкости и газа», «Механика жидкости и газов»
для студентов направлений подготовки
22.03.02 Металлургия,
15.03.02 Технологические машины и оборудования
всех форм обучения

Новотроицк, 2020

УДК 532+533

ББК 22.253

Г 19

Рецензенты:

Доцент кафедры механики ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», к.т.н., М.В. Харченко

Доцент кафедры электроэнергетики и электротехники Новотроицкого филиала ФГАОУ ВО НИТУ «МИСиС», к.т.н., К.В. Лицин

Ганин Д.Р., Гавриш П.В. Механика жидкости и газа: методические указания для выполнения домашнего задания/контрольной работы по дисциплинам для студентов направлений подготовки бакалавров 22.03.02 Metallургия, 15.03.02 Технологические машины и оборудование всех форм обучения. – Новотроицк: НФ НИТУ «МИСиС», 2020. – 134 с.

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов при выполнении домашнего задания/контрольной работы по дисциплинам «Механика жидкости и газов» для студентов направления подготовки бакалавров 22.03.02 Metallургия, «Механика жидкости и газа» для студентов направления подготовки бакалавров 15.03.02 Технологические машины и оборудование. Приведены требования к содержанию, организации, выполнению, оформлению домашнего задания/контрольной работы, примеры решения и условия задач, необходимые теоретические сведения и справочные данные.

Рекомендовано Методическим советом НФ НИТУ «МИСиС»

© Новотроицкий филиал
ФГАОУ ВО «Национальный
исследовательский технологический
университет «МИСиС», 2020.

Содержание

Введение	5
1 Основные физические свойства жидкостей и газа	7
2 Статика жидкостей и газов	12
2.1 Статика капельной жидкости	12
2.2 Давление капельной жидкости на плоские и криволинейные..... поверхности.....	13
2.3 Статика печных газов.....	15
2.4 Статика дымовой трубы	17
3 Кинематика жидкостей и газов	21
3.1 Две формы описания движения сплошной среды	21
3.2 Линии тока и траектории.....	24
3.3 Уравнение неразрывности.....	26
3.4 Функции тока для двумерных течений несжимаемой жидкости	30
3.5 Вихревое и безвихревое движение	32
3.6 Потенциал скорости и его связь с функцией тока	35
3.7 Основная теорема кинематики.....	42
4 Уравнение Бернулли и его применение при расчетах движения жидкостей и газов	46
5 Ламинарное и турбулентное течение жидкостей и газов	50
5.1 Основные закономерности ламинарного течения	51
5.2 Основные закономерности турбулентного течения	53
6 Пристеночный пограничный слой.....	60
7 Потеря энергии при движении жидкостей и газов в трубах и..... каналах.....	66
8 Истечение газа через отверстия в стенке печи.....	75
8.1 Истечение несжимаемой жидкости из отверстия при постоянном напоре... 76	
8.2 Истечение несжимаемой жидкости из отверстия при переменном	77
напоре	77
8.3 Истечение несжимаемой жидкости через насадки	78
9 Струйное движение газов. Особенности движения газа в печах и устройствах, приводящие его в движение	83
10 Двухфазное течение в трубах и каналах	91
10.1 Характеристики двухфазных потоков.....	91
10.2 Модель гомогенного течения	96
10.3 Модель раздельного течения.....	103
10.4 Модель потока дрейфа.....	108
10.5 Система жидкость-газ	112

11 Оценка выполнения домашнего задания/контрольной работы.....	128
Список использованных источников	130
Приложение А Основные физические свойства жидкостей и газов.....	131
Приложение Б Коэффициенты при истечении жидкости и газа через отверстия и насадки	133

Введение

«Механика жидкости и газа» - техническая прикладная наука, изучающая законы, которым подчиняется жидкость и газ в состоянии покоя, движения и взаимодействия с твердыми телами, а также методы использования этих законов в инженерной практике для решения прикладных задач [1, 2].

Большой вклад в развитие «Механики жидкости и газа» внесли Архимед (287-212 до н.э.), Леонардо да Винчи (1452-1519), С. Стивен (1548-1620), Г. Галилей (1564-1642), Б. Кастелли (1577-1644), Э. Торричелли (1608-1647), Б. Паскаль (1623-1662), Р. Бойль (1627-1691), И. Ньютон (1643-1727), А. Пито (1695-1771), Д. Бернулли (1770-1782), Л. Эйлер (1707-1783), М.В. Ломоносов (1711-1765), Ж.Д'Аламбер (1717-1783), А. Шези (1718-1798), Ж. Борда (1733-1799), Ж. Лагранж (1736-1813), Д. Вентури (1746-1822), П. Лаплас (1749-1827), А. Авагадро (1776-1856), Ж. Гей-Люссак (1778-1850), Л. Навье (1785-1836), О. Коши (1789-1857), А. Сен-Венан (1797-1885), Ж. Пуазейль (1799-1869), Б. Клапейрон (1799-1864), Г. Дарси (1803-1858), Ю. Вейсбах (1806-1871), Г. Хаген (1810-1869), Г. Стокс (1819-1903), А. Базен (1829-1917), Д.И. Менделеев (1834-1907), Н.П. Петров (1836-1920), О. Рейнольдс (1842-1912), Н.Е. Жуковский (1847-1921), И.С. Громека (1851-1889), Ф. Форхгеймер (1852-1933), К.Э. Циолковский (1857-1935), П. Блазиус (1865-1939), Л. Прандтль (1875-1953), В.А. Бахметьев (1880-1951), Т. Карман (1881-1963), Н.Н. Павловский (1884-1937), Л.Г. Лойцянский (1900-1991), А.Н. Колмогоров (1903-1987), Л.И. Седов (1907-1999), Г. Шлихтинг (1907-1982), М.Д. Миллионщиков (1913-1973), Дж. Батчелор (1920-2000), Д.Б. Сполдинг (1923-2016) и другие ученые.

Дисциплина «Механика жидкости и газа» сформировалась как самостоятельный раздел теоретической механики, объединив достижения гидромеханики (гидравлики), газовой динамики и аэромеханики [1].

Гидравлика – наука о законах движения капельных жидкостей.

Газовая динамика – наука о законах движения газов с большими скоростями.

Аэромеханика – наука, изучающая равновесие и движение газообразных сред и силовое взаимодействие этих сред с погруженными в них твердыми телами.

Невозможно представить инженера-механика (универсального специалиста, занимающегося проектированием, конструированием и эксплуатацией механического оборудования, машин, аппаратов в различных отраслях производства) без знаний основ «Механики жидкости и газа», необходимых для решения задач расчета и проектирования, а также ремонта разнообразных гидравлических и пневматических систем: различных газосмесительных устройств, фор-

сунок, трубопроводов для подачи различных жидкостей и газов, насосов, компрессоров, вентиляторов и др. Широко используются законы, изучаемые «Механикой жидкости и газа», в технологическом оборудовании, горнодобывающей промышленности, металлургическом машиностроении.

Изучение данной дисциплины предусматривает выполнение домашнего задания/контрольной работы, являющихся самостоятельной работой студентов, позволяющей применить полученные при изучении «Механики жидкости и газа» знания при решении практических задач.

Настоящие методические указания содержат требования к содержанию, организации, выполнению, оформлению домашнего задания/контрольной работы, предусмотренных учебными планами Новотроицкого филиала НИТУ «МИСиС» по дисциплине «Механика жидкости и газа» направления подготовки бакалавров 15.03.02 Технологические машины и оборудование.

Каждый из разделов методических указаний содержит достаточный объем теоретической информации, примеры решения задач и условия задач для домашнего задания/контрольной работы, раскрывающие физику процессов движения газов в системах, характерных для современных металлургических технологий, а также вопросы для самопроверки.

В методических указаниях использованы данные и иллюстративные материалы из цитируемой литературы, которая приведена в списке использованных источников.

При выполнении домашнего задания/контрольной работы по дисциплине «Механика жидкости и газа» обучающиеся приобретают знания, умения и навыки по компетенции ПСК-2: Способность анализировать, разрабатывать и совершенствовать гидравлическое оборудование металлургических машин (знать основные свойства жидких и газообразных сред, законы гидростатики и гидродинамики; уметь применять на практике методы расчета гидравлических сопротивлений в трубопроводах, проводить газо- и гидромеханические эксперименты в лабораторных условиях; владеть методами расчета параметров жидких и газовых потоков применительно к профессиональной деятельности).

От современного инженера-металлурга требуется умение руководить грамотной, безаварийной эксплуатацией металлургических печей, газогорелочных устройств, дымососов, инжекторов, дымовых труб и другого оборудования.

В связи с этим, учебными планами Новотроицкого филиала НИТУ «МИСиС» для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 22.03.02 Металлургия, предусмотрено изучение дисциплины «Механика жидкости и газов», также сопровождающееся выполнением домашнего задания/контрольной работы.

1 Основные физические свойства жидкостей и газа

Плотность жидкостей - масса жидкости, заключенная в единице объема:

$$\rho = m/V. \quad (1)$$

Формула (1) справедлива для однородной жидкости. Для неоднородной жидкости по этой формуле определяется лишь средняя по объему плотность. Для определения плотности в точке используется формула:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Удельный вес - вес жидкости G , приходящийся на единицу объема:

$$\gamma = \frac{G}{V}.$$

Для неоднородной жидкости справедлива формула:

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta V}.$$

Плотность и удельный вес связаны соотношением:

$$\gamma = \rho g,$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения тела.

Плотность и удельный вес жидкостей меняются с изменением давления и температуры.

Для капельных жидкостей плотность и удельный вес незначительно изменяются при изменении давления и температуры.

Для характеристики сжимаемости капельных жидкостей под действием давления вводится коэффициент объемного сжатия, который представляет собой относительное изменение объема жидкости, приходящееся на единицу изменения давления:

$$\beta_v = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp},$$

где V - первоначальный объем жидкости, м^3 ;

dV - изменение объема при изменении давления на величину dp .

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется модулем упругости жидкости

$$E_0 = 1/\beta_v.$$

Для воды в среднем:

$$\beta_v = 1/(2 \cdot 10^9),$$

$$E_0 = 2 \cdot 10^9.$$

Температурное расширение капельных жидкостей характеризуется термическим коэффициентом объемного расширения, который представляет собой относительное увеличение объема жидкости при увеличении температуры на один градус:

$$\beta_T = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dT}.$$

Для воды при температуре ее от 10 до 20 °С и при давлении 10^5 Па:

$$\beta_T = 0,00015.$$

При практических расчетах для условий работы металлургических печей сжимаемостью и температурным расширением капельных жидкостей, в частности, воды можно пренебречь [3]. Для более точных расчетов обычно считают, что плотность воды не зависит от давления, а для учета изменения плотности от температуры пользуются соотношением

$$\rho_T = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 + \beta_T \cdot (T - T_0)},$$

где ρ_T - плотность при температуре T ;

ρ_0 - плотность при температуре $T_0 = 293$ К.

Значения коэффициента β_T для воды и зависимость плотности воды от температуры приведены в Приложении А.

Реальные газы характеризуются значительной сжимаемостью и высокими значениями термического коэффициента объемного расширения.

Зависимость плотности газа от давления и температуры описывается

уравнением состояния. Для реальных газов в условиях работы печей можно использовать при расчетах уравнения состояния Клапейрона, которое строго справедливо для идеальных газов:

$$\rho = p / (R \cdot T),$$

где p - абсолютное давление, Па;

R - удельная газовая постоянная, различная для разных газов, R не зависит от давления и температуры. Для воздуха $R = 287$ Дж/(кг·К), для любого газа R определяется из выражения:

$$R = 8314 / M,$$

где M - молекулярная масса газа;

T - абсолютная температура, К.

В технических расчетах определяют плотность газа при нормальных физических условиях ($T_0 = 273$ К, $p_0 = 101,325$ кПа) или стандартных условиях ($T_0 = 293$ К, $p_0 = 101,325$ кПа).

Например, плотность воздуха при нормальных физических условиях:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R \cdot T_0} = \frac{101325}{287 \cdot 273} = 1,293 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

при стандартных условиях:

$$\rho_{\text{ст}} = \frac{p_0}{R \cdot T} = \frac{101325}{287 \cdot 293} = 1,205 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Плотность газа при других условиях определяется из выражения:

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T}.$$

При движении газа с большими скоростями возникают существенные перепады давлений, что приводит к изменению их плотности. При практических расчетах изменением плотности газа можно пренебречь, если его скорость движения не превышает 100 м/с.

Вязкость жидкостей - свойство жидкости оказывать сопротивление сдвигу. Физически вязкость проявляется в виде внутреннего трения при относительном перемещении смежных частиц жидкости.

Различают динамическую μ и кинематическую ν вязкость, которые связаны друг с другом соотношением:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

В системе СИ динамическая вязкость имеет размерность «Па·с», кинематическая - «м²/с».

Вязкость жидкостей существенно зависит от температуры, причем вязкость капельных жидкостей с увеличением температуры уменьшается, газов - возрастает.

Зависимости динамического и кинематического коэффициентов вязкости воды от температуры приведены в Приложении А.

Зависимость плотности и кинематического коэффициента вязкости сухого воздуха от температуры при давлении 101,3 кПа приведена в Приложении А.

Зависимость плотности и кинематического коэффициента дымовых газов среднего состава (13% CO₂, 11% H₂O, 76% N₂) при давлении 101,3 кПа от температуры приведена в Приложении А.

Задача 1.1 Определить объем воды, который необходимо дополнительно подать в водовод диаметром $d = 500$ мм и длиной $l = 1$ км для повышения давления до $\Delta p = 5 \cdot 10^6$ Па. Водовод подготовлен к гидравлическим испытаниям и заполнен водой при атмосферном давлении. Деформацией трубопровода можно пренебречь [4].

Задача 1.2 В отопительной системе (котел, радиаторы и трубопроводы) небольшого дома содержится объем воды $W = 0,4$ м³. Сколько воды дополнительно войдет в расширительный сосуд при нагревании с 20 до 90 °С [4]?

Задача 1.3 Определить среднюю толщину $\delta_{\text{отл}}$ солевых отложений в герметичном водоводе внутренним диаметром $d = 0,3$ м и длиной $l = 2$ км (рисунок 1). При выпуске воды в количестве $\Delta W = 0,05$ м³ давление в водоводе падает на величину $\Delta p = 1 \cdot 10^6$ Па. Отложения по диаметру и длине распределены равномерно [4].

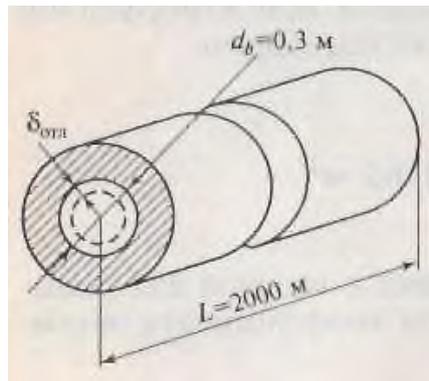


Рисунок 1

Задача 1.4 Определить изменение плотности воды при сжатии от $p_1 = 1 \cdot 10^5$ Па до $p_2 = 1 \cdot 10^7$ Па [4].

Задача 1.5 Для периодического аккумулирования дополнительного объема воды, получаемого при изменении температуры, к системе водяного отопления в верхней ее точке присоединяют расширительные резервуары, сообщающиеся с атмосферой. Определить наименьший объем расширительного резервуара при частичном заполнении водой. Допустимое колебание температуры воды во время перерывов в работе топки $\Delta t = 95 - 70 = 25$ °С. Объем воды в системе $\Delta W = 0,55$ м³ [4].

Задача 1.6 В отопительный котел поступает объем воды $W = 50$ м³ при температуре 70 °С. Какой объем воды W_1 будет выходить из котла при нагреве воды до температуры 90 °С [4]?

Задача 1.7 Определить изменение плотности воды при нагревании ее от $t_1 = 7$ °С до $t_2 = 97$ °С [4].

Задача 1.8 Вязкость нефти, определенная по вискозиметру Энглера, составляет 8,5 °Е. Вычислить динамическую вязкость нефти, если ее плотность $\rho = 850$ кг/м³ [4].

Задача 1.9 Определить давление внутри капли диаметром $d = 0,001$ м, которое создает силы поверхностного натяжения. Температура воды $t = 20$ °С [4].

Задача 1.10 Определить высоту подъема воды в стеклянном капилляре диаметром $d = 0,001$ м при температуре воды от $t_1 = 20$ °С и $t_2 = 80$ °С [4].

2 Статика жидкостей и газов

2.1 Статика капельной жидкости

Для капельной (несжимаемой) жидкости в поле земного тяготения уравнение поверхности равного давления имеет вид

$$z = \text{const},$$

т. е. поверхность уровня есть горизонтальная плоскость с координатой z .

Давление в точке А внутри объема жидкости (рисунок 2) называется абсолютным.

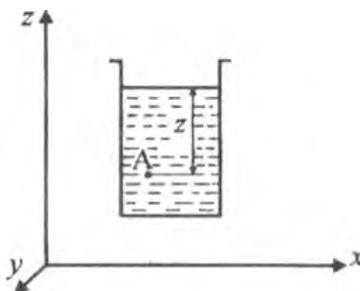


Рисунок 2

Согласно основной теореме гидростатики абсолютное давление равно сумме внешнего и избыточного давлений

$$p_{\text{абс}} = p_0 + p_{\text{изб.}}$$

Внешнее давление действует на свободную поверхность (поверхность, отделяющую жидкость от внешней среды). Согласно закону Паскаля, внешнее давление передается одинаково всем точкам объема капельной жидкости.

Избыточное давление в точке определяется плотностью данной жидкости ρ и величиной заглубления z точки под уровень свободной поверхности

$$P_{\text{изб}} = \rho \cdot g \cdot z = \gamma \cdot z, \quad (2)$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - ускорение силы тяжести.

Следовательно, основное уравнение гидростатики примет вид:

$$p = p_0 + \gamma \cdot z.$$

Для абсолютного давления индекс «абс» для упрощения записи опускаем.

Термин «избыточное давление» используется, если в качестве внешнего выступает атмосферное давление. В других случаях используется более общий термин - «относительное давление».

Из формулы (2) следует, что избыточное давление увеличивается по мере заглубления точки под уровень свободной поверхности.

2.2 Давление капельной жидкости на плоские и криволинейные поверхности

Сила абсолютного давления, обусловленная давлением как жидкости, так и внешним давлением на поверхность, определяется выражением

$$P = \int_S p \, dS = \int_S (p_0 + \gamma \cdot z) \, dS$$

или

$$P = \int_S p_0 \, dS + \int_S \gamma z \, dS. \quad (3)$$

Первый член уравнения (3) представляет силу, обусловленную действием внешнего давления p_0 , второй - силу избыточного давления самой капельной жидкости.

В случае горизонтально расположенной плоской поверхности S_1 (рисунок 3) имеем для всех точек этой поверхности

$$p_0 = \text{const} \quad (\text{по закону Паскаля})$$

$$z_1 = \text{const}$$

$$\gamma = \text{const} \quad (\text{жидкость несжимаемая}).$$

Следовательно, уравнение (3) принимает вид

$$P_1 = p_0 \cdot S_1 + \gamma z_1 \cdot S_1. \quad (4)$$

Сила P_1 , как это следует из выражения (4), не зависит ни от формы, ни от размеров самого резервуара; она действует по нормали к поверхности.

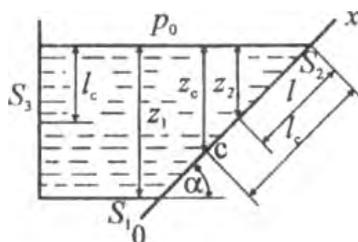


Рисунок 3 [3]

Для наклонной поверхности S_2 (рисунок 3) справедливо

$$P_2 = \int_{S_2} (p_0 + \gamma \cdot z_2) dS_2 = \int_{S_2} p_0 dS_2 + \int_{S_2} \gamma \cdot l \sin \alpha dS_2$$

или

$$P_2 = p_0 \cdot S_2 + \gamma \cdot \sin \alpha \int_{S_2} l dS_2. \quad (5)$$

Второй член правой части выражения (5) есть статический момент поверхности S_2 относительно оси OX , который равен произведению площади S_2 на расстояние от ее центра тяжести до оси моментов, т. е.

$$\gamma \cdot \sin \alpha \int_{S_2} l dS_2 = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot S_2 \cdot l_C.$$

Так как $l_C \cdot \sin \alpha = z_C$ (z_C - величина заглубления центра тяжести поверхности S_2 под уровень свободной поверхности), то сила абсолютного давления, действующая на наклонную плоскую поверхность S_2 , равна:

$$P_2 = p_0 \cdot S_2 + \gamma \cdot z_C \cdot S_2.$$

Сила давления самой жидкости (без учета силы внешнего давления)

$$P_{2\text{изб}} = \gamma \cdot z_C \cdot S_2 = p_C \cdot S_2,$$

где p_C - гидростатическое давление (избыточное) в центре тяжести поверхности S_2 .

Для вертикальной поверхности S_3 (рисунок 3) $\alpha = 90^\circ$, следовательно

$$z_C = l_C$$

и

$$P_3 = p_0 \cdot S_3 + \gamma \cdot l_C \cdot S_3.$$

В случае криволинейных поверхностей задача определения сил усложняется, при этом необходимо отдельно определять проекции силы на оси x , y , z .

Сила давления на криволинейную поверхность в вертикальном направлении равна весу жидкости в объеме цилиндра, опирающегося на заданную криволинейную поверхность и ограниченную сверху горизонтальной плоскостью свободной поверхности, т. е.

$$P_z = p \cdot g \cdot V = \gamma \cdot V.$$

Для того, чтобы найти проекции силы давления в направлении двух других осей, необходимо определить площадь проекции внешнего контура криволинейной поверхности на плоскости, перпендикулярные соответствующим осям, S_x , S_y , определить глубину погружения центров тяжести данных проекций под уровень свободной поверхности z_{cx} , z_{cy} . Тогда

$$P_z = p \cdot g \cdot z_{cx} \cdot S_x = \gamma \cdot z_{cx} \cdot S_x,$$

$$P_y = \gamma \cdot z_{cy} \cdot S_y.$$

Следует заметить, что вертикальная составляющая силы давления P_z зависит как от формы самой поверхности (выпуклая, вогнутая, выпукло-вогнутая), так и от контура этой поверхности. Горизонтальные составляющие силы давления P_x , P_y не зависят от формы поверхности, так как S_x и S_y являются плоскими проекциями криволинейной поверхности, а зависят только от очертания контура поверхности и его расположения в пространстве.

Равнодействующая сила давления на криволинейную поверхность определяется известным выражением

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}.$$

В этой формуле силы P_x , P_y и P_z определены без учета силы внешнего давления.

2.3 Статика печных газов

Для печной теплотехники важным является анализ системы «печные газы - окружающая атмосфера». С допустимой для практических расчетов погрешностью считается, что плотность печных газов (в основном - это продукты сгорания топлива, содержащие CO_2 , N_2 , H_2O) при $0^\circ C$ равна плотности окружающего воздуха при этой же температуре, т. е.

$$\rho_{в,0} = \rho_{г,0} = 1,29 \text{ кг/м}^3.$$

Для расчетов более важной является зависимость плотности печных газов и воздуха от температуры, поскольку последняя изменяется в широких преде-

лах, в то время как давление газов в печах близко к давлению окружающего воздуха.

Плотность газов (печных и воздуха) при температуре T , °С, определяется выражением

$$\rho_T = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T}.$$

Для печных газов и окружающего воздуха, имеющих в общем случае различную плотность, распределение давления по высоте изображается двумя прямыми, имеющими различный угол наклона (рисунок 4). Прямая для печных газов идет под большим углом наклона к оси давлений. Для достижения одного и того же абсолютного давления над какой-либо плоскостью p_1 (рисунок 4) требуется большая высота z , поскольку плотность высокотемпературных печных газов меньше плотности холодного окружающего воздуха.

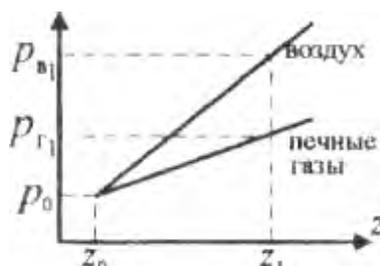


Рисунок 4 [3]

Для того, чтобы исключить подсосы в печь холодного воздуха и выбивание печных газов через окна печи, давление в печи поддерживается таким образом, что на уровне печных окон абсолютное давление печных газов равно абсолютному давлению окружающего воздуха. Графически это означает, что прямые распределения давлений пересекаются в точке, лежащей на уровне нейтральной плоскости (плоскости, где избыточное давление одного газа по отношению к другому равно нулю).

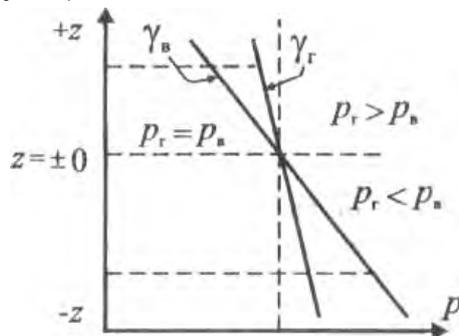


Рисунок 5 [3]

На рисунке 5 нейтральная плоскость $z = \pm 0$. Видно, что для всех $z > 0$ абсолютное давление газов больше абсолютного давления воздуха, а для всех $z < 0$ - наоборот. Следовательно, выше нейтральной плоскости существует избыточное давление печных газов по отношению к воздуху, ниже нейтральной плоскости - наоборот. Величина избыточного давления определяется выражением

$$p_{\Gamma} - p_{\text{в}} = z \cdot g (\rho_{\text{в}} - \rho_{\Gamma}).$$

Обозначив

$$p_{\Gamma} - p_{\text{в}} = p_{\text{изб}},$$

получим

$$p_{\text{изб}} = z \cdot g (\rho_{\text{в}} - \rho_{\Gamma}).$$

2.4 Статика дымовой трубы

Дымовая труба предназначена для эвакуации печных газов из рабочего пространства печей. Нейтральная плоскость расположена горизонтально на срезе устья трубы. С учетом разности плотностей газов в трубе и окружающего воздуха распределение давлений по высоте трубы H изображается прямыми 1 и 2 (рисунок 6). У основания трубы на ее оси создается разрежение (отрицательное избыточное давление)

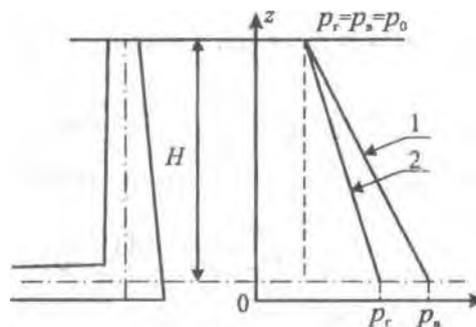


Рисунок 6 [3]

$$p_{\text{раз}} = H \cdot g \cdot (\rho_{\text{в}} - \rho_{\Gamma}). \quad (6)$$

Видно, чем больше высота трубы H , тем больше величина создаваемого ею разрежения.

В уравнении (6) плотности берутся при соответствующих температурах.

Пример. При проектировании трубы для удаления газов из печи были учтены следующие требования: разрежение, создаваемое трубой, не должно быть меньше 850 Па, средняя по длине трубы температура дымовых газов равна 250 °С, температура окружающего воздуха равна -20 °С.

Проверить, будет ли дымовая труба создавать необходимое разрежение, если температура будет равна +20 °С, а средняя температура газов в трубе поднялась до 550 °С.

Решение:

Плотность окружающего воздуха при +20°С:

$$\rho_{в,+20} = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T} = 1,29 \cdot \frac{273}{273+20} = 1,20 \text{ кг/м}^3.$$

Плотность окружающего воздуха при температуре -20 °С:

$$\rho_{в,-20} = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T} = 1,29 \cdot \frac{273}{273-20} = 1,39 \text{ кг/м}^3.$$

Плотность дымовых газов при температуре 250°С:

$$\rho_{г, 250} = 1,29 \cdot \frac{273}{273+250} = 0,67 \text{ кг/м}^3.$$

Плотность дымовых газов при температуре 550°С:

$$\rho_{г, 550} = 1,29 \cdot \frac{273}{273+250} = 0,43 \text{ кг/м}^3.$$

Высота трубы по проектным данным:

$$H = \frac{p_{\text{раз}}}{g \cdot (\rho_{в, -20} - \rho_{г, 250})} = \frac{850}{9,81 \cdot (1,39 - 0,67)} = 120,34 \text{ м.}$$

Разрежение, создаваемое дымовой трубой проектной высоты при новых условиях ее работы:

$$p'_{\text{раз}} = H \cdot g \cdot (\rho_{в,-20} - \rho_{г,250}) = 120,34 \cdot 9,81 \cdot (1,20 - 0,43) = 909 \text{ Па.}$$

Видно, что дымовая труба создает при новых условиях большее разрежение, чем это требуется по проекту. Высота трубы, удовлетворяющая новым условиям, должна быть не меньше

$$H = -H' = \frac{850}{9,81 \cdot (\rho_{в,+20} - \rho_{г,550})} = \frac{850}{9,81 \cdot (1,20 - 0,43)} = 112,5 \text{ м.}$$

Задача 2.1 Определить величину абсолютного давления в точке А на глубине h , м, от уровня свободной поверхности воды, на которой действует внешнее давление p_0 , кПа (рисунок 7). Построить эпюру распределения абсолютного давления (таблица 2.1) [3].

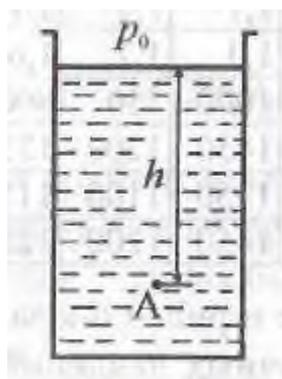


Рисунок 7 [3]

Таблица 2.1

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h	1	10	70	1	10	70	15	15	15	40
p_0	140	160	220	500	250	350	200	450	180	550

Задача 2.2 Определить величину разрежения p , Па, создаваемую дымовой трубой высотой H , м, если средняя температура дыма в трубе равна T_d , °С, а температура окружающего воздуха равна $T_в$, °С. Построить эпюру распределения абсолютного давления по высоте трубы (таблица 2.2) [3].

Таблица 2.2

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	50	80	50	120	100	120	50	110	190	250
T_d	350	450	350	250	450	650	400	400	400	350
$T_в$	+20	0	-20	+20	+20	+20	-20	-20	-20	0

Задача 2.3 Определить высоту столба h жидкости, уравнивающей давление p , кПа, в закрытой емкости, если плотность жидкости в манометре

равна ρ , кг/см³ (рисунок 8), а давление окружающего воздуха p_0 , кПа (таблица 2.3) [3].

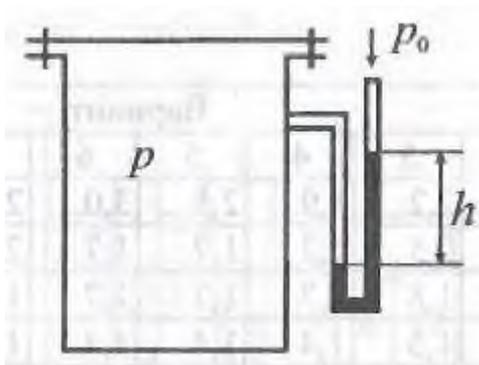


Рисунок 8 [3]

Таблица 2.3

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	240	320	210	125	250	410	520	355	610	545
ρ	0,85	1	13,6	1	1	1	13,6	13,6	13,6	1
p_0	50	85	95	101,3	101,3	71	62	25	99	101,3

3 Кинематика жидкостей и газов

Часть механики, в которой рассматриваются общие свойства движения тел без выяснения причин его возникновения, называется кинематикой. В кинематике жидкостей и газов изучается положение частиц жидкости и газа в пространстве в зависимости от времени. По образному выражению Н.Е. Жуковского, кинематика есть геометрия движения.

В кинематике жидкости и газа смысл слова «точка» должен быть строго уяснен, так как оно может относиться либо к «точке» пространства, либо к «точке» сплошной среды. Во избежание недоразумений слово «точка» будет использоваться исключительно для обозначения места в неподвижном пространстве. Слово «частица» будет означать малый элемент объема или «материальную точку» сплошной среды. Короче говоря, точка есть место в пространстве, а частица - малая часть материального континуума.

Термины «движение» и «течение» используются при описании мгновенного или непрерывного изменения конфигурации сплошной среды, причем последний из них означает непрерывное движение. Различные частицы движущейся жидкости обычно имеют разные скорости и ускорения, поэтому поле течения должно описываться скоростями и ускорениями частиц в различных точках во всем пространстве, занятом жидкостью. Как скорости, так и ускорения являются векторными величинами и обозначаются соответственно v и a . В декартовых координатах их компоненты x , y и z обозначаются через u , v , w и a_x , a_y , a_z . В общем случае v и a являются функциями времени и координат пространства.

3.1 Две формы описания движения сплошной среды

В общем случае движение тела можно описать четырьмя способами. В механике жидкости и газа используются два из них: *отсчетный* и *пространственный*.

В середине XVIII в. Л. Эйлер ввел описание, которое в гидродинамике называется лагранжевым. Это частный случай отсчетного описания, при котором движущаяся жидкость представляется в виде набора бесконечно большого количества «материальных точек» - частиц жидкости, причем в качестве «метки» каждой данной частицы используются декартовы координаты ее положения в момент времени $t=0$. Это означает, что в некоторый произвольный момент времени, условно принятый за нуль, задаются координаты каждой частицы a , b , c и после этого следят за движением этой частицы в потоке. Положение

частицы в любой момент времени (движение) определяется системой уравнений вида

$$\begin{cases} x = f_1(a, b, c, t); \\ y = f_2(a, b, c, t); \\ z = f_3(a, b, c, t). \end{cases} \quad (7)$$

Соответствующие скорости и ускорения:

$$(\partial^2 z / \partial^2 t)_0, \quad u = (\partial x / \partial t)_0, v = (\partial y / \partial t)_0, w = (\partial z / \partial t)_0; \quad (8)$$

$$a_x = (\partial^2 x / \partial^2 t)_0, a_y = (\partial^2 y / \partial^2 t)_0, a_z = \quad (9)$$

При этом необходимо сохранять неизменными начальные координаты a , b , c .

Совершенно очевидно, что выбор меток произволен и существенные результаты не зависят от выбора начального момента времени. Поэтому отсчетных (лагранжевых) описаний движущегося потока может быть множество.

Такое описание весьма удобно в теоретических исследованиях, связанных с обоснованием и развитием принципов механики. Довольно часто лагранжево описание используют при разработке численных схем анализа задач механики жидкости и газа. Однако в инженерной практике оно практически не используется в силу крайней громоздкости при решении конкретных задач.

При пространственном описании внимание сосредоточено на области пространства, занимаемой потоком жидкости в данный момент. Это описание, введенное Д'Аламбером, в гидродинамике называют эйлеровым. При этом наблюдают за тем, что происходит в фиксированной области пространства по мере того, как идет время. Это описание представляется идеально подходящим для изучения жидкостей и газов, где зачастую быстро деформирующаяся масса приходит неизвестно откуда в рассматриваемый объем и уходит неизвестно куда, так что предпочтительнее рассматривать то, что происходит в этом объеме.

Таким образом, в эйлеровом описании в качестве независимых переменных используются координаты точки x , y , z и время t . Очевидно, имеется лишь одно пространственное описание данного движения, в то время как отсчетных описаний бесконечно много.

Основное различие между этими двумя способами описания состоит в том, что в лагранжевом описании координаты частиц представляются как функции времени, в то время как в эйлеровом описании скорости потока в различных точках определяются как функции времени. Поэтому в эйлеровом опи-

сании координаты x, y, z являются независимыми переменными, в то время как в лагранжевом описании они взаимозависимы.

Эйлерово поле скорости выражается в виде

$$\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}, \quad (10)$$

где $u = f_1(x, y, z, t)$; $v = f_2(x, y, z, t)$; $w = f_3(x, y, z, t)$;

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - единичные векторы, направленные вдоль осей x, y и z .

Любое изменение компонент скорости в окрестности некоторой точки определяется всеми четырьмя аргументами: x, y, z и t . Так, например, изменение x -компоненты скорости по правилу дифференцирования функции многих аргументов будет:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

поскольку данная частица смещается на небольшое расстояние в окрестности указанной точки за время dt . Компоненты перемещений не являются независимыми и равны: $dx = udt$, $dy = vdt$ и $dz = wdt$.

Подставляя эти величины в вышеприведенное выражение, получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (11)$$

Это уравнение является полной или субстанциональной производной, представляющей быстроту изменения скорости частицы жидкости, занимающей определенную точку в пространстве в определенный момент времени.

Можно выделить локальное изменение скорости как функцию времени du/dt и ее конвективное изменение, связанное с движением частицы в пространстве $u(\partial u/\partial x) + v(\partial u/\partial y) + w(\partial u/\partial z)$.

Любые другие свойства жидкости или ее движения могут рассматриваться подобным же образом. Так, быстрота изменения плотности частицы сжимаемой жидкости

$$dp/dt = \partial p/\partial t + u(\partial p/\partial x) + v(\partial p/\partial y) + w(\partial p/\partial z).$$

Подобные соотношения определяют компоненты ускорения, соответствующие координатным осям:

$$\begin{aligned}
 a_x &= du/dt = \partial u/\partial t + u(\partial u/\partial x) + v(\partial u/\partial y) + w(\partial u/\partial z); \\
 a_y &= dv/dt = \partial v/\partial t + u(\partial v/\partial x) + v(\partial v/\partial y) + w(\partial v/\partial z); \\
 a_z &= dw/dt = \partial w/\partial t + u(\partial w/\partial x) + v(\partial w/\partial y) + w(\partial w/\partial z).
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

В векторной форме имеем

$$a = a_x i + a_y j + a_z k,$$

или

$$a = dv/dt = \partial v/\partial t + (v \cdot \nabla) v, \tag{13}$$

где векторный дифференциальный оператор в декартовых координатах

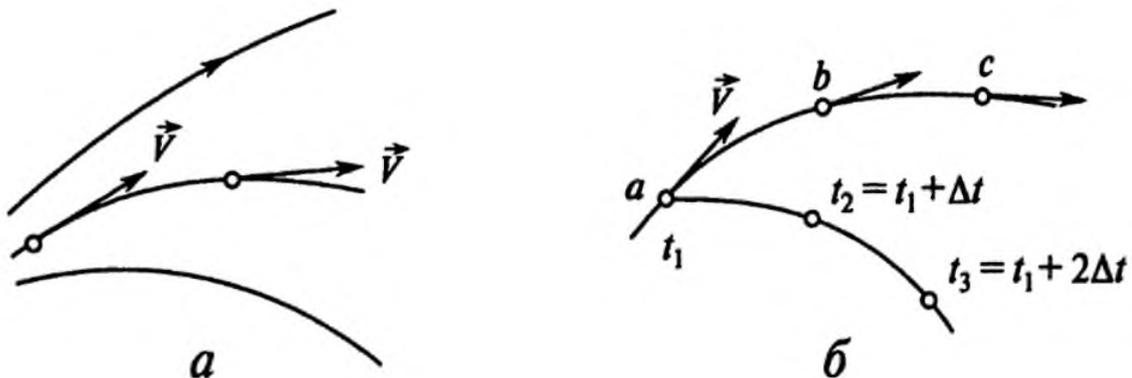
$$\nabla = i(\partial/\partial x) + j(\partial/\partial y) + k(\partial/\partial z).$$

Если все локальные ускорения равны нулю, движение является стационарным. Скорость может изменяться от точки к точке пространства, но в фиксированной точке она постоянна во времени.

Если все конвективные ускорения равны нулю, движение является равномерным. Равенство нулю конвективных ускорений соответствует параллельному течению, что можно заключить из анализа предыдущих уравнений.

3.2 Линии тока и траектории

Линия тока есть воображаемая линия, являющаяся геометрическим местом точек в пространстве, в которых векторы скорости в данный момент времени направлены по касательной к этой линии, поэтому линии тока указывают направление движения в каждой точке вдоль этой линии в данный момент времени (рисунок 9).



а — мгновенная линия тока; б — траектория частицы

Рисунок 9 - Линии тока и траектории [2]

Трубка тока, или элементарная струйка, есть малая воображаемая трубка или канал, ограниченный линиями тока. При стационарном движении линии тока остаются неподвижными по отношению к системе отсчета. Для такого движения они представляют собой траектории движущихся частиц. При нестационарном движении частицы жидкости не будут оставаться на одних и тех же линиях тока, и, следовательно, траектории и линии тока в этом случае не совпадают. На рис. 6, б для нестационарного течения показаны линии тока и траектория. На схеме приведены векторы скорости для частиц a , b , c , лежащих на линии тока в момент времени t_1 , последовательные положения частицы a на ее траектории в моменты времени t_2 и t_3 .

Траектории удобно определять по распределению скорости, так как скорость - производная по времени от координат. Параметрические уравнения траектории частицы являются решениями системы дифференциальных уравнений $dr/dt = v$ или $dx/dt = u$, $dy/dt = v$, $dz/dt = w$, где $dr = idx + jdy + kdz$, r — радиус-вектор точки на траектории. Необходимые граничные условия можно получить, выбрав в качестве исходной конфигурацию потока в какой-то момент.

В случае плоского двумерного течения можно получить дифференциальное уравнение линии тока, написав, что при течении в плоскости xy $u = dx/dt$, $v = dy/dt$, откуда следует, что $dx/u = dy/v$.

Для трехмерного поля течения система уравнений линии тока в декартовых координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} dx/u &= dy/v = dz/w \\ \text{или} \\ vdx &= udy, wdx = udz, wdy = vdz. \end{aligned} \tag{14}$$

Как следует из определения, линия тока есть такая линия, в каждой точке которой нормальная составляющая скорости равна нулю, т. е. через линию тока нет перетекания. Таким образом, между двумя произвольными линиями тока количество протекающей жидкости постоянно. Поэтому для несжимаемой жидкости в местах, где линии тока сближаются, скорость увеличивается и, наоборот, там, где они расходятся, скорость уменьшается.

В общем случае через любую точку движущейся среды в данный момент времени можно провести лишь одну линию тока. Однако в некоторых особых точках это правило нарушается. Существуют два типа особых точек: критические и источники (стоки). В них линии тока пересекаются, следовательно, вектор скорости должен иметь разные направления, что при конечном значении скорости невозможно. Поэтому в особых точках величина скорости либо равна нулю (критические точки), либо бесконечности (источники и стоки).

Важную роль в кинематике жидкости и газа играет понятие «поток вектора скорости» Q - интеграл по поверхности S , ограничивающей объем жидкости, от произведения вектора скорости на нормаль к данной поверхности (или от проекции скорости на нормаль) в каждой точке, т. е.

$$Q = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S v_n dS = \int_S (u du dz + v dx dz + w dx dy).$$

Поток вектора скорости физически представляет собой объемный секундный расход жидкости (газа) через поверхность S .

Размерность потока вектора скорости $[Q] = [v][S] = \text{м}^3/\text{с}$.

Если поверхность S замкнута, то при отсутствии внутри поверхности источников и стоков поток вектора скорости

$$Q = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

При наличии источника $Q_{\text{ист}} = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V q_{\text{ист}} dV > 0$, а при наличии стока $Q_{\text{ст}} = \oint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V q_{\text{ст}} dV < 0$, где $q_{\text{ист}}$ и $q_{\text{ст}}$ - мощность источников и стоков.

3.3 Уравнение неразрывности

Принцип сохранения массы жидкости для любой определенной системы следующий:

чистый приток массы жидкости в систему = приращению массы жидкости системы.

Рассмотрим элементарный контрольный объем $\Delta x \Delta y \Delta z$ в форме параллелепипеда внутри некоторой области течения, в которой отсутствуют источники (стоки) массы, а плотность и скорость являются функциями пространственных координат и времени (рисунок 10). Вычислим чистый приток массы в этот объем.

По определению, поток массы равен произведению массовой скорости на сечение площадки, нормальной к скорости.

Тогда в выделенный объем втекает следующее количество жидкости:

$$(\rho u)_x \Delta y \Delta z + (\rho v)_y \Delta x \Delta z + (\rho w)_z \Delta x \Delta y,$$

а вытекает

$$(\rho u)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + (\rho v)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z + (\rho w)_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y.$$

Таким образом, изменение массы жидкости в объеме параллелепипеда составляет

$$\begin{aligned} & (\rho u)_x \Delta y \Delta z + (\rho v)_y \Delta x \Delta z + (\rho w)_z \Delta x \Delta y - \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \Delta x \right]_x \Delta y \Delta z \\ & - \left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \Delta y \right]_y \Delta x \Delta z - \left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \Delta z \right]_z \Delta x \Delta y \\ & = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right] \Delta x \Delta y \Delta z = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \Delta x \Delta y \Delta z. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь использовано разложение потока вытекающей массы в ряд Тейлора с точностью до линейных слагаемых, когда

$$(\rho u)_{x+\Delta x} = (\rho u)_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \Delta x.$$

Приращение массы жидкости в выделенном объеме

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (16)$$

Здесь $\Delta x \Delta y \Delta z$ не зависит от времени, так как контрольный объем неподвижен. Приравняв уравнения (15) и (16), после сокращения на $\Delta x \Delta y \Delta z$ получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0. \quad (17)$$

или

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

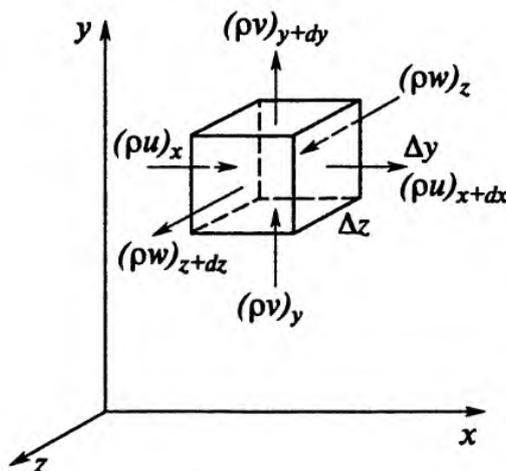


Рисунок 10 - Схема для вывода уравнения неразрывности [2]

Произведение оператора V на вектор массовой скорости ρv - величина скалярная и называется дивергенцией скорости $\text{div}(\rho v)$. Она характеризует скорость относительного изменения элементарной массы жидкости, т. е. равна отношению массового расхода жидкости через поверхность S объема V к величине этого объема при стремлении последнего к нулю.

Используя правило дифференцирования произведения и учитывая, что

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v \cdot \text{grad } \rho,$$

уравнение (17) можно переписать в виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(v) = 0. \quad (18)$$

Если ρ не зависит от времени, то $\partial\rho/\partial t = 0$, и вместо уравнения (17) имеем:

$$\text{div}(\rho v) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0. \quad (19)$$

Такое движение называют изохорическим. Если ρ не зависит и от координат, то

$$\text{div}(v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Это обычная форма уравнений неразрывности для установившихся и неустановившихся течений несжимаемой жидкости. Отражая закон сохранения массы, уравнение неразрывности (20) имеет относительно простой физический смысл - расход несжимаемой жидкости через выделенный объем является постоянной величиной или суммарное изменение расхода жидкости в выделенном объеме по трем координатным направлениям равно нулю. Этот закон соблюдается всегда, когда сплошность потока не нарушается. Подставляя уравнение (20) в (18), можно получить для несжимаемой жидкости и другое условие:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0. \quad (21)$$

Уравнения (17) и (18) называются соответственно эйлеровой и лагранжевой формами уравнения неразрывности. Можно считать, что лагранжева форма записана в системе отсчета, по отношению к которой частица неподвижна.

Векторная форма записи уравнений (18) и (17) справедлива для любой системы координат. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0; \quad (22)$$

а в сферических координатах (r, θ, φ)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \rho}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho v_\varphi) = 0. \quad (23)$$

Для случая одномерного движения, при котором параметры потока изменяются лишь вдоль какой-то одной координаты (например, x), уравнение (16) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0.$$

В случае установившегося течения данное выражение еще более упрощается, т. е. $\partial(\rho u) / \partial x = 0$. Интегрируя это соотношение от сечения потока 1 (площадь поперечного сечения F_1) до сечения 2 (площадь поперечного сечения F_2), получим:

$$\rho_1 u_1 F_1 = \rho_2 u_2 F_2 = \text{const}. \quad (24)$$

Это уравнение неразрывности для трубки тока. Оно выполняется и для движения жидкости в трубах и каналах, однако для них локальную скорость и необходимо заменить средней расходной скоростью потока V . Тогда оно будет характеризовать постоянство массового расхода жидкости для любого сечения трубопровода. Уравнение (18) можно использовать для расчета объемных расходов потока. Для несжимаемых жидкостей при $\rho = \text{const}$ это уравнение еще более упрощается, т. е.

$$V_1 F_1 = V_2 F_2 = V_i F_i = \text{const}. \quad (25)$$

Уравнение неразрывности (25) указывает, что как массовый, так и объемный расход постоянен, и если сечение трубопровода увеличивается, то средняя расходная скорость потока падает.

3.4 Функции тока для двумерных течений несжимаемой жидкости

Легко заметить, что уравнение неразрывности содержит четыре неизвестных: плотность ρ и три компонента скорости u , v и w , следовательно, одного уравнения неразрывности для описания течения недостаточно. Однако в случаях, когда течение жидкости может рассматриваться как двумерное, на основе уравнения неразрывности может быть установлена интересная и полезная связь между расположением линий тока и распределением скоростей и расходов в поле течения.

Ограничимся случаем несжимаемой жидкости. Для плоскопараллельного течения уравнение неразрывности принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (26)$$

Введем функцию тока $\psi(x, y)$, записав

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (27)$$

Тогда уравнение (26) тождественно удовлетворяется, так как

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (28)$$

Уравнение линии тока для плоскопараллельного течения имеет вид

$$u dy - v dx = 0.$$

Используя выражения (27), находим, что вдоль линии тока

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi = 0.$$

Поскольку дифференциал $d\psi = 0$, то вдоль линии тока $\psi = \text{const}$.

Выражения (26-28) подтверждают, что dy является полным, а его интеграл ($\psi_2 - \psi_1$), взятый по кривой, соединяющей две точки, определяется только значениями функции тока в крайних точках (и не зависит от положения кривой). Из этого следует одно полезное свойство функции тока, которое можно

вывести, рассматривая две смежные линии тока, разделенные расстоянием Δn , как показано на рисунке 11.

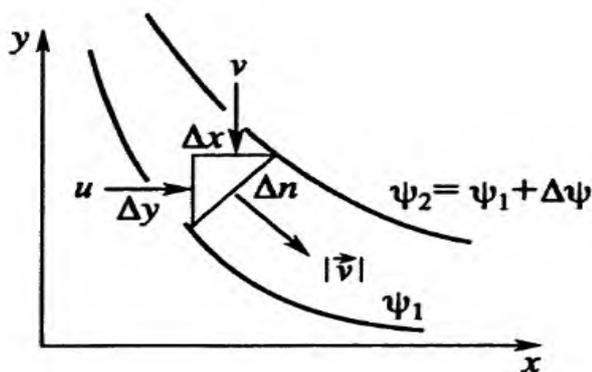


Рисунок 11 - Схема для вывода соотношения между функцией тока и расходом [3]

Из закона сохранения массы для несжимаемой жидкости следует, что поток массы через Δn должен быть равен сумме потоков через Δx и Δy и поэтому

$$|\vec{v}|dn = u\Delta y - v\Delta x, \quad (29)$$

где $|\vec{v}| = \sqrt{u^2 + v^2}$ — модуль вектора скорости.

Используя выражения (27), находим:

$$|\vec{v}|dn = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi. \quad (30)$$

Следовательно, разность значений ψ на двух смежных линиях тока равна объемному расходу потока между ними, приходящемуся на единицу ширины течения. Правило знаков указано формулами (29) и (30). Если ψ увеличивается в направлении оси y , как показано на рисунке 8, то течение направлено в сторону положительных значений x , т. е. слева направо.

Для осесимметричного течения линии тока в любой радиальной плоскости, проходящей через ось симметрии, лежат на поверхностях тока, расположенных концентрически относительно оси. Как и для плоскопараллельного течения, эти линии тока могут быть представлены в двух координатах, что также дает возможность ввести единственную функцию тока (известную как функция тока Стокса). Для описания общего трехмерного течения необходимы три координаты. В этом случае можно ввести пару функций этих координат, которым в пространстве будут соответствовать два семейства взаимно пересекающихся поверхностей тока, линии пересечения которых и будут линиями тока.

Таким образом, в случае трехмерного течения функция тока уже не является скалярной, так как для ее определения необходимо задание уравнений поверхностей. В этом случае вместо соотношений (27) используют векторную функцию $\Psi(x, y, z)$, которая связана со скоростью потока равенством

$$\vec{v} = \nabla\Psi = \text{rot}\vec{\Psi}, \quad (31)$$

или в декартовой системе координат:

$$u = \frac{\partial\Psi_z}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_y}{\partial z}; v = \frac{\partial\Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\Psi_z}{\partial x}; w = \frac{\partial\Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial y}. \quad (32)$$

Вводимая выражением (31) функция называется векторным потенциалом, а векторное произведение дифференциального оператора ∇ и векторного потенциала Ψ (или любого другого вектора) - ротором данного вектора.

При решении практических задач в случае плоского двухмерного течения обычно в качестве граничных условий задают значение $\Psi = 0$ на одной границе потока и $\Psi = Q$ на другой, где Q - полный расход среды.

Пример 3.1. Ввести функцию тока для случая установившегося обтекания сферы потоком сжимаемой жидкости (газа). Скорости потока не зависят от координаты φ , т. е. течение осесимметрично. Поскольку функция тока должна превращать уравнение неразрывности в тождество, то скорости, дифференцируемые по какой-то координате, должны выражаться через производные функции тока по противоположной координате. Для установившегося осесимметричного движения уравнение (23) принимает вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin\theta) = 0. \quad (33)$$

Чтобы получить выражения, отличающиеся только знаком, и учитывая, что r не зависит от θ , находим

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}; v_\theta = -\frac{1}{\rho r \sin\theta} \cdot \frac{\partial\Psi}{\partial r}.$$

3.5 Вихревое и безвихревое движение

Рассмотрим вращение элементарного объема жидкости, вызванное деформациями, возникающими в процессе движения, под действием приложенных сил.

Угловая скорость вращения элемента жидкости $\Delta x \Delta y$ относительно оси z может быть выражена через компоненты скорости u и v и их производные по x и y , как показано на рисунке 12. Считая положительным по знаку вращение против часовой стрелки, находим, что скорость вращения для стороны Δx равна

$$\frac{v + (\partial v / \partial x) \Delta x - v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

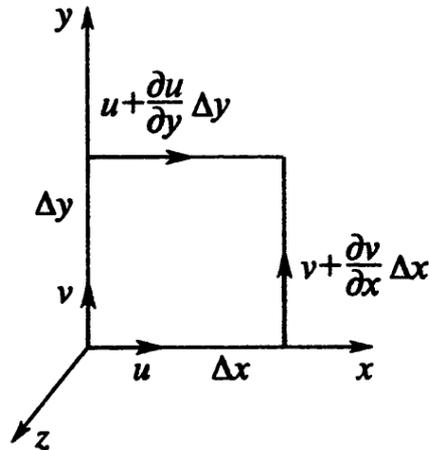


Рисунок 12 - Схема для расчета вращения элементарного объема [2]

Для стороны Δy (вращение по часовой стрелке)

$$\frac{-[u + (\partial u / \partial y) \Delta y - u]}{\Delta y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Полная угловая скорость вращения элемента жидкости относительно оси z является средним арифметическим скоростей вращения его сторон Δx и Δy , т. е.

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right].$$

Подобным же образом найдем

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right]; \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right].$$

Результирующий вектор угловой скорости вращения

$$\begin{aligned}\omega &= i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z = \frac{1}{2} \left[i \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \text{rot } v \\ &= \frac{1}{2} \nabla \cdot v\end{aligned}\quad (34)$$

называется вектором вихря скорости. Он характеризует вращение элементарного объема среды как абсолютно твердого тела с угловой скоростью

$$|\omega| = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{1/2}. \quad (35)$$

Такое движение называется вихревым. Вектор $\text{rot } v$, вдвое больший вектора вихря скорости, называется вектором завихренности или просто завихренностью ξ . Компонентами завихренности являются ξ , η и ζ ; каждый из них равен удвоенной величине соответствующей компоненты угловой скорости вращения.

Если завихренность обращается в нуль во всех точках потока, то поле скоростей движущейся среды и само течение называют безвихревым. Поскольку вектор равен нулю в том случае, когда равны нулю все его компоненты, то математическим выражением отсутствия завихренности движения будут соотношения $\text{rot } v = 0$.

В декартовой системе координат они имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (36)$$

В общем случае источником завихренности в металлургических печах является поверхность разрыва скорости, т. е. такая поверхность, по обе стороны которой скорости потока резко различаются по величине. Чаще всего такие поверхности образуются при обтекании тел с острыми кромками (прямоугольные или шестиугольные заготовки в нагревательных печах и т. п.). Здесь на поверхности разрыва скорости развиваются очень большие силы трения, что приводит к завораиванию струек в виде вихрей. В кормовой части шара или цилиндра, обтекаемого потоком, скорость которого превышает некоторое предельное значение, создается область пониженного давления, сопровождающаяся образованием вихрей.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что частицы, попавшие в вихревую область, долгое время находятся в ней, поэтому в потоке горячих газов вихревая область имеет пониженную температуру. Из этого не следует, что вихревые области всегда являются вредными или нежелательными. Во

многих случаях, практически важных, они полезны и даже необходимы. Так, например, при истечении жидкости в среду другой плотности (так называемое затопленное истечение) на границе струи и среды также образуется поверхность разрыва непрерывной функции скорости. Эта поверхность распадается с образованием вихрей, что способствует хорошему перемешиванию струи и среды.

Некоторые условия и закономерности вихреобразования будут рассмотрены далее при исследовании пограничных слоев. Сейчас отметим только, что вихри обязательно образуются при преодолении потоком местных сопротивлений, например, при резком изменении направления потока, его поперечного сечения и т. д.

Вихри, как правило, не образуются внутри области движения. Они либо вносятся в нее потоком, либо возникают на границах течения, непроницаемых для жидкости. Поэтому, хотя в металлургических печах имеется довольно много источников вихреобразования, области вихревого движения, как правило, сконцентрированы в местах ввода и вывода газового потока или на его границах. В основной области течения, или, как еще говорят, в ядре потока, движение можно считать безвихревым.

3.6 Потенциал скорости и его связь с функцией тока

Ранее безвихревое течение было определено как движение, в котором компоненты угловой скорости равны нулю, поэтому $\text{rot } v = \nabla \times v = 0$ и справедливы равенства (36).

С другой стороны, если $\varphi(x, y, z, t)$ является некоторой скалярной функцией, имеющей непрерывные первую и вторую производные, то из векторного анализа известно, что $\text{rot}(\text{grad } \varphi) = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = 0$. В этом можно убедиться, если проделать необходимые операции дифференцирования. Поэтому при безвихревом движении должна существовать скалярная функция φ , градиент которой равен вектору скорости v . Принято считать положительным то направление течения, в котором эта скалярная функция уменьшается:

$$v = -\nabla \varphi(x, y, z, t). \quad (37)$$

Поскольку отрицательный градиент равен вектору скорости, функция φ называется потенциалом скорости, а безвихревое течение часто называется потенциальным течением. В состоянии безвихревого движения могут быть как сжимаемые, так и несжимаемые жидкости, и функция потенциала скорости будет существовать в каждом из этих случаев.

Для течения несжимаемой жидкости, согласно уравнению неразрывности, $\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / \partial z = 0 = 0$. Следовательно,

$$\nabla \cdot (-\nabla \varphi) = -\nabla \cdot (\nabla \varphi) = -\nabla^2 \varphi = 0. \quad (38)$$

Полученное уравнение является уравнением Лапласа, а дифференциальный оператор ∇^2 называется лапласианом и в декартовых координатах имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad (39)$$

в цилиндрических координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (40)$$

Для двумерного безвихревого течения несжимаемой жидкости потенциал скорости φ и функция тока ψ находятся в определенной связи. Представляя выражение (35) в проекциях на оси декартовых координат, находим

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (41)$$

Принимая во внимание выражения (27), получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (42)$$

Эти уравнения известны как условия Коши-Римана. Подставив их в уравнение, выражающее отсутствие завихренности $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, или для случая двумерного движения $\partial u / \partial y - \partial v / \partial x = 0$, находим, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (43)$$

т. е. функция тока также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Для двумерного течения уравнение (39) принимает вид, аналогичный уравнению (43). Таким образом, если течение безвихревое, то обе функции (тока и потенциала скорости) являются решениями уравнения Лапласа. В теории

функций комплексного переменного такие функции называются гармоническими или аналитическими. В силу этого можно ввести комплексный потенциал $\Phi(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, который будет аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$, а его производная $d\Phi/dz$ определяет комплексную скорость $d\Phi/dz = -u + iv$.

Следовательно, для изучения плоских безвихревых движений несжимаемой жидкости можно широко пользоваться методами теории функций комплексного переменного. При этом комплексному потенциалу определенного вида соответствует некоторое движение жидкости и, наоборот, каждое движение может быть представлено некоторым комплексным потенциалом. Соответственно можно поставить две задачи: 1) по заданному комплексному потенциалу построить движение, то есть найти φ , ψ поле скоростей; 2) зная границы области движения и значение скорости на входе в область, найти соответствующий комплексный потенциал, а затем решить первую задачу. Практический интерес представляет главным образом вторая задача, но в силу значительной сложности ее решения в книге она рассматриваться не будет.

Так как φ и ψ удовлетворяют уравнению Лапласа, то функция тока и потенциал скорости могут взаимозаменяться. Кроме того, если уравнение Лапласа является линейным, то потенциальное течение может быть построено путем суперпозиции (наложения) нескольких функций тока. В результате можно показать, что линии постоянных значений φ и ψ образуют ортогональную сетку, называемую иногда гидродинамической сеткой (рисунок 13).

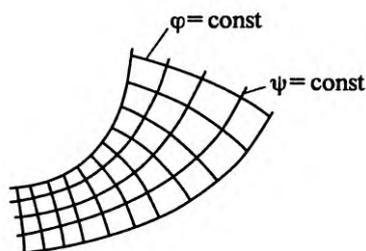


Рисунок 13 - Гидродинамическая сетка движения [2]

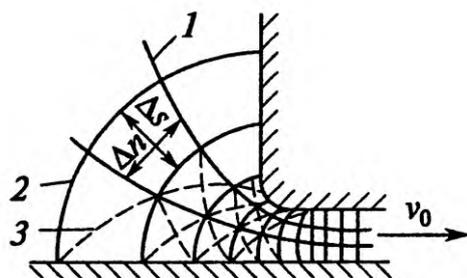


Рисунок 14 - Схема графического построения гидродинамической сетки [2]

Из уравнения линий тока получаем

$$k_1 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi=\text{const}} = \frac{v}{u}$$

Вдоль линий постоянного потенциала скорости $d\psi = 0$, значит

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = 0.$$

Отсюда

$$k_2 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\psi=\text{const}} = \frac{\partial\varphi/\partial x}{\partial\varphi/\partial y} = \frac{v}{u} = -1/k_1$$

Таким образом, угловые коэффициенты пересекающихся линий ($\varphi=\text{const}$ и $\psi=\text{const}$) - обратные величины, что и является признаком их ортогональности (перпендикулярности).

Любая линия тока может быть представлена как твердая стенка, так как течение сквозь нее невозможно. Аналитическое решение уравнения Лапласа для сложных граничных поверхностей представляет большие трудности, поэтому в этих случаях решение может быть получено графически - путем построения сетки криволинейных квадратов. Сущность этого метода состоит в следующем.

Для любого двухмерного случая, когда нет отрыва потока от границ, непроницаемые границы представляют собой предельные линии тока, поэтому линии равного потенциала (эквипотенциальные линии) должны образовывать с такими границами прямые углы, как и со всеми линиями тока. Построение сетки течения можно начать с нанесения семейства линий тока 1 (рисунок 14), используя границы в качестве «ориентиров». Следует располагать линии тока так, чтобы элементарные расходы (приращения расхода) между каждой парой соседних линий тока были одними и теми же. Это можно сделать, начав построение из тех областей, где скорости должны быть одинаковыми, а поэтому интервалы между смежными линиями тока - равными. Затем надо нанести семейство ортогональных эквипотенциальных линий 2, что следует делать, начав с областей наибольшего искривления течения (в примере течения, показанного на рисунке 14 и характеризующего отвод продуктов горения через канал из рабочего пространства печи, такая область расположена у места с наибольшей кривизной стенки). Эквипотенциальные линии следует стараться располагать так, чтобы, пересекаясь с линиями тока, они образовали ячейки в виде криволинейных

квадратов. Для этого в каждой такой ячейке сетки течения интервалы между линиями тока (Δn) и эквипотенциальными линиями (Δs) должны быть примерно равны. Чтобы получить приемлемую точность в зонах большой кривизны, необходимо разбивать сетку в таких зонах на более мелкие ячейки, проводя дополнительные линии тока и эквипотенциальные линии.

В процессе графического построения оба семейства линий сетки течения следует поочередно выправлять, чтобы получить с приемлемой степенью точности ортогональную сетку с криволинейными квадратными ячейками. Результат полезно проверить, проводя диагональные линии 3 через все квадраты в обоих направлениях.

Как известно, скорость между линиями тока обратно пропорциональна расстоянию между ними (Δn). Градиент потенциала обратно пропорционален интервалу (Δs) между эквипотенциальными линиями. Таким образом, скорость v_0 в некоторой точке выражается через скорость v_0 в другой точке следующим образом: $v = v_0 \Delta n_0 / \Delta n = v_0 \Delta s_0 / \Delta s = \Delta q / \Delta s$, где Δq — расход жидкости между соседними линиями тока. Таким образом, эта формула вполне согласуется с тем утверждением теории потенциального течения, согласно которому скорости пропорциональна градиенту потенциала. Рассмотрим двухмерное течение, линии тока которого изображены на рисунке 15. Жидкость приближается к плоскости $y=0$ в направлении, противоположном y , в углу она делает поворот и удаляется в направлении x . Такая картина течения обычно имеет место при резком изменении направления движения потока в боровах и каналах металлургических печей.

Из определения двухмерного течения следует, что $u=u(x, y)$; $v=v(x, y)$, $w=0$. Найдем потенциал скорости и распределение скорости для соответствующего потенциального течения.

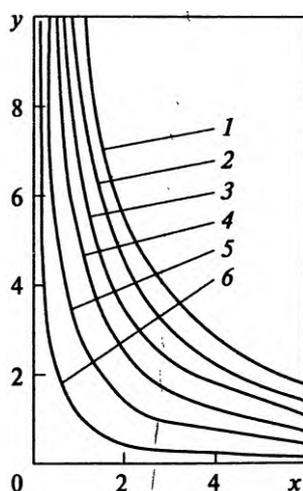


Рисунок 15 - Линии тока для двухмерного потенциального течения вблизи угла при ψ/k : 1 - 11; 2 - 9; 3 - 7; 4 - 5; 5 - 3; 6 - 1 [2]

Прежде чем приступать к описанию движения жидкости во всей этой полубесконечной области, ограничимся рассмотрением области в непосредственной близости от угла, где потенциал скорости φ можно разложить в ряд Тейлора вблизи начала координат:

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi(x, y) = \varphi(0, 0) + x \frac{\partial}{\partial x} \varphi(0, 0) + y \frac{\partial}{\partial y} \varphi(0, 0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(0, 0) \\ + xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi(0, 0) + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(0, 0) + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

В качестве граничных условий потребуем, чтобы оси координат были непроницаемы для потока, т. е. $u = -\partial\varphi/\partial x = 0$ при $x = 0$ и $v = -\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y=0$.

Это приводит к упрощению уравнения (42)

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(0, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi(0, 0) = 0$$

Уравнение Лапласа должно быть повсюду справедливым, в частности, в начале координат, поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi(0, 0) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(0, 0) = k = \text{const}$$

Поскольку потенциал скорости определяется с точностью до произвольной постоянной и $v = -\text{grad}(\varphi+C) = -\nabla\varphi$, то примем, что $\varphi(0, 0) = 0$. Тогда уравнение (42) можно представить в виде

$$\varphi = \frac{k}{2}(y^2 - x^2) + \dots, \quad (43)$$

где k - временно неопределенная постоянная.

Соответствующими компонентами скорости будут

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = kx + \dots \quad (44)$$

и

$$v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -ky + \dots \quad (45)$$

Чтобы отчетливо представить себе полученные результаты, полезно рассчитать функцию тока и построить линии тока. Из соотношений (26) имеем $u = \partial\psi / \partial y$ и $y = -\partial\psi / \partial x$. Уравнения (44), (45) и (27) позволяют с помощью линейного интегрирования определить функцию тока как

$$\varphi = \int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^x \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Big|_{x=0} dy = kxy + \dots \quad (46)$$

При интегрировании полагаем, что оси координат совпадают с нулевой линией тока или, более точно, $\psi = 0$ при $x = y = 0$.

Линии тока, соответствующие разным значениям ψ/k , показаны на рисунке 15.

Первые слагаемые ряда потенциала скорости (42) не в состоянии описать действительное поведение течения на больших расстояниях от его начала. Из уравнений (44) и (45) следует, что значение скорости пропорционально расстоянию от начала течения $|v| = k|r|$, поэтому поле течения не ограничено сверху. Это подтверждает предположение, сделанное ранее при разложении потенциала скорости в ряд Тейлора, о том, что полученные уравнения описывают потенциальное течение в окрестности угла. По той же причине (скорость потока на бесконечности неограниченно велика) не представляется возможным определить в рамках кинематики и постоянную k . Действительно, как следует из соотношения (42), эта постоянная характеризует объем потока (расход), который при $r \rightarrow \infty$ также стремится к бесконечности, что не соответствует физике течения.

Таким образом, рассмотренный метод решения (разложение φ в ряд Тейлора вблизи начала координат) подразумевает, что первые два слагаемых уравнения (42) не могут дать единственного решения потенциального течения для этого примера. Действительно, нетрудно подобрать другое решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее сформулированным выше граничным условиям, например, выражение $\varphi = -V \exp(x^2 - y^2) \cos(2xy)$. Преимуществом этого решения для потенциального течения в окрестности угла является то, что оно описывает течение вблизи критической точки на плоскости $y=0$, когда жидкость, приближающаяся к плоскости в направлении, противоположном положительному направлению y , отклоняется плоскостью $y=0$, а затем движется в положительном и отрицательном направлениях x . Это течение можно интерпретировать как набегание струи на преграду - случай течения, получивший в последнее время распространение в металлургической практике в связи с методами струйного нагрева металла.

Несмотря на отмеченные выше недостатки потенциального решения, оно имеет большую ценность для анализа процессов теплообмена между потоком жидкости (газа) и твердой поверхностью (металлом или огнеупорной кладкой данной геометрии), так как величина теплового потока определяется, главным образом, полем скорости потока вблизи поверхности. Кроме того, данное решение можно рассматривать как первое приближение к более строгому решению, которое получают в процессе итерационного уточнения.

Как уже отмечалось ранее, в состоянии безвихревого движения могут быть сжимаемые и несжимаемые жидкости. Приведенные выше соотношения характеризуют поток постоянной плотности. Для течения сжимаемой жидкости (газа) уравнение (37) остается справедливым, хотя поля потенциала течения и функции тока более не описываются уравнением Лапласа. В данном случае уравнение для потенциала находится путем подстановки выражения (37) в уравнение неразрывности (15):

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (47)$$

а уравнение для функции тока — путем подстановки в выражение $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ соотношений, полученных из уравнения неразрывности для изохорического движения, когда

$$u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ и } v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \text{ то } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0. \quad (48)$$

Для установившегося течения слагаемое $\partial \rho / \partial t$ в уравнении (47) равно нулю.

Уравнения (47) и (48) не могут быть решены в рамках кинематики движения, так как ρ в соответствии с уравнением состояния определяется температурой и давлением, т. е. термодинамическими и динамическими (силовыми) величинами. Следовательно, для решения задач по отысканию полей скоростей и давлений должны быть использованы уравнения движения жидкости, характеризующие закон сохранения импульса (количества движения) потока.

3.7 Основная теорема кинематики

Из теоретической механики известно, что скорость любой точки M твердого тела определяется геометрической суммой скорости поступательного

движения вместе с некоторым полюсом 0 и скорости вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс 0:

$$v = v_0 + \omega r, \quad (49)$$

где ω - угловая скорость вращения;

r - радиус-вектор точки М.

Аналогичная теорема основная теорема кинематики - имеет место и для скорости движения жидких элементарных объемов. Она гласит: скорость движения v любой тонкой жидкой частицы складывается из скорости квазитвердого движения v , и скорости деформации V_d :

$$V = V_1 + V_d.$$

Скорость квазитвердого движения, как следует из формулы (49), в свою очередь, складывается из поступательной скорости и скорости вращения.

Пусть в некоторой точке M_0 с координатами x_0, y_0, z_0 компоненты скорости будут иметь значения u_0, v_0, w_0 . Используя разложение в ряд Тейлора, можно найти компоненты скорости в точке $M(x, y, z)$, расположенной в окрестности точки M_0 . С точностью до величин первого порядка малости они будут равны:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + x_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + y_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 + z_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 + \dots \\ v &= v_0 + x_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 + y_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 + z_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 + \dots \\ w &= w_0 + x_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 + y_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_0 + z_1 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)_0 + \dots \end{aligned} \right\}, \quad (50)$$

где $x_1 = x - x_0, y_1 = y - y_0, z_1 = z - z_0$. Прибавляя и вычитая в первом уравнении (50) величину

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 z_1 \right],$$

получим

$$\begin{aligned} u &= u_0 + x_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_0 y_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 z_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)_0 z_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 y_1 + \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Для дальнейших преобразований введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 &= e_{11}; \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = e_{22}; \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 = e_{33}; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = e_{12} \\ &= e_{21}; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = e_{13} = e_{31}; \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = e_{23} = e_{32}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение примет вид

$$u = u_0 + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1) + (e_{11}x_1 + e_{21}y_1 + e_{31}z_1), \quad (52)$$

а остальные два уравнения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1) + (e_{21}x_1 + e_{22}y_1 + e_{23}z_1), \\ w &= w_0 + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1) + (e_{31}x_1 + e_{32}y_1 + e_{33}z_1), \end{aligned}$$

поскольку $\mathbf{r} = ix_1 + jy_1 + kz_1$, то

$$\omega_y x_1 - \omega_z y_1 = (\omega \mathbf{r})_x; \quad \omega_z x_1 - \omega_x z_1 = (\omega \mathbf{r})_y; \quad \omega_x y_1 - \omega_y x_1 = (\omega \mathbf{r})_z. \quad (53)$$

Введем функцию скорости деформации F , равную

$$F = \frac{1}{2}(e_{11}x_1^2 + e_{22}y_1^2 + e_{33}z_1^2) + e_{12}x_1y_1 + e_{13}x_1z_1 + e_{23}x_1y_1. \quad (54)$$

Окончательно получим:

$$u = u_0 + (\omega \mathbf{r})_x + \frac{\partial F}{\partial x_1}; \quad v = v_0 + (\omega \mathbf{r})_y + \frac{\partial F}{\partial y_1}; \quad w = w_0 + (\omega \mathbf{r})_z + \frac{\partial F}{\partial z_1}$$

или, в векторном виде,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega \mathbf{r} + \text{grad } F, \quad (55)$$

где \mathbf{v}_0 - скорость поступательного движения;

$\omega \mathbf{r}$ - скорость вращательного движения вокруг мгновенного центра тяжести со скоростью ω ;

$\text{grad } F$ — скорость чистой деформации.

Скорость деформации жидкой частицы в точке M можно выразить через тензор скоростей деформаций

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (56)$$

с компонентами

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (57)$$

где $i, j = 1, 2, 3$; $x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$

4 Уравнение Бернулли и его применение при расчетах движения жидкостей и газов

Уравнение Бернулли выражает собой закон сохранения и превращения энергии применительно к движущейся жидкости или газу. Оно устанавливает связь между давлением и скоростью в движущемся потоке жидкости или газа. Закон сохранения энергии, описываемый уравнением Бернулли, можно сформулировать следующим образом: в установившемся потоке идеальной жидкости или газа суммарная удельная энергия, состоящая из потенциальной и кинетической энергий, остается постоянной для любого сечения потока.

Если энергию отнести к 1 м^3 движущейся несжимаемой жидкости, то для трубки тока можно записать

- жидкость идеальная

$$p \cdot g \cdot z + p + \rho \cdot \frac{U^2}{2} = \text{const} \quad (58)$$

или для сечений 1 и 2 трубки тока

$$\rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 + \rho \cdot \frac{U_1^2}{2} = \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2 + \rho \cdot \frac{U_2^2}{2} \quad (59)$$

Размерность каждого члена уравнений (57) и (58) есть размерность давления Н/м^2 или Па;

- жидкость реальная

$$\rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 + \rho \cdot \frac{U_1^2}{2} = \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2 + \rho \cdot \frac{U_2^2}{2} + \Delta p_{\text{пот}} \quad (60)$$

В уравнениях (58) - (60):

- $p \cdot g \cdot z$ - геометрическое (весовое) «давление», характеризующее удельную потенциальную энергию положения жидкости;

- p - статическое давление, характеризующее удельную потенциальную энергию давления жидкости;

- $\rho \cdot \frac{U^2}{2}$ - динамическое «давление», характеризующее удельную кинетическую энергию движущейся жидкости.

Сумма $(p \cdot g \cdot z + p)$ характеризует удельную потенциальную энергию жидкости.

Для потока конечных размеров скорость по его сечению не остается постоянной величиной, поэтому динамическое давление рассчитывается по средней для всего сечения скорости U_{cp} и уравнение Бернулли для реальной жидкости имеет вид

$$\rho \cdot g \cdot z_1 + p_1 + \alpha \rho \frac{U_{cp1}^2}{2} = \rho \cdot g \cdot z_2 + p_2 + \alpha \rho \frac{U_{cp2}^2}{2} + \Delta p_{пот},$$

где α - коэффициент Кориолиса, учитывающий степень неравномерности распределения скорости по сечению потока.

Для установившегося течения численное значение коэффициента Кориолиса равно 2 при ламинарном и 1,07...1,10 - при турбулентном течении. Часто при расчетах вследствие малости этого коэффициента при турбулентном течении его считают равным единице (как при равномерном распределении скорости по сечению потока).

Величина $\Delta p_{пот}$ - удельное количество энергии, потраченное на преодоление гидравлических сопротивлений на участке между двумя сечениями.

Если энергию жидкости отнести к единице веса, то для двух произвольно взятых сечений потока несжимаемой жидкости уравнение Бернулли записывается в виде

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha \cdot U_{cp1}^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha \cdot U_{cp2}^2}{2 \cdot g} + \Delta p_{пот}$$

где z - геометрический напор, представляет собой высоту расположения данного сечения над какой-либо плоскостью сравнения. Геометрический напор определяет запас удельной потенциальной энергии, обусловленный положением данного сечения. При горизонтальном расположении потока $z_1 = z_2$;

$\frac{P}{\rho g}$ - пьезометрический напор представляет собой высоту столба жидкости, уравновешивающего избыточное давление, действующее в данном сечении. Пьезометрический напор определяет запас удельной потенциальной энергии, обусловленный давлением (ρ - плотность жидкости, g - ускорение сил тяжести);

$\frac{U_{cp}^2}{2 \cdot g}$ - динамический напор, представляет собой удельную g кинетическую энергию потока жидкости.

Если давление в сосуде, размеры которого во много раз больше размера отверстия, равно p_1 , давление окружающей среды, в которую газ вытекает - p_2 (рисунок 16), то пренебрегая потерями давления при истечении и считая газ несжимаемым, температуру вытекающего газа постоянной, уравнение Бернулли

для сечения 1 и 2 принимает вид

$$P_1 + \rho \cdot \frac{U_1^2}{2} = p_2 + \rho \cdot \frac{U_2^2}{2}$$

Для сосуда больших размеров можно считать $U_1 \approx 0$, тогда

$$p_1 = p_2 + \rho \cdot \frac{U_2^2}{2}$$

Отсюда, скорость истечения газа (теоретическая)

$$U_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Расход газа (теоретический)

$$V_T = U_2 \cdot S_C = \varepsilon \cdot s_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}$$

где S_C - площадь поперечного сечения струи, m^2 ;

S_0 - площадь поперечного сечения отверстия, m^2 ;

$\varepsilon = S_C / S_0$ - степень сжатия струи; для круглого отверстия $\varepsilon = 0,64$.

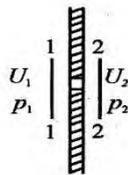


Рисунок 16 [3]

Гидродинамические потери при истечении газов учитываются коэффициентом скорости φ . Поэтому действительная скорость истечения

$$U_{2д} = U_2 \cdot \varphi$$

и действительный расход газа

$$V_d = \varphi \cdot \varepsilon \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}}$$

Коэффициент скорости равен отношению действительной скорости истечения к теоретической.

Величина μ называется коэффициентом расхода

$$\mu = \varphi \cdot \varepsilon.$$

Значения коэффициентов ε , φ , μ для различных случаев истечения приведены в Приложении Б.

5 Ламинарное и турбулентное течение жидкостей и газов

Режим течения определяется соотношением двух сил, действующих на движущуюся жидкость: инерционных и сил вязкостного трения. Сила инерции определяется скоростью течения и массой жидкости, сила вязкостного трения - динамической или кинематической вязкостью жидкости и градиентом скорости. Если доминируют инерционные силы (при неизменных геометрических условиях течения), то течение будет турбулентным (больше скорости течения жидкости или газа, обладающих малым коэффициентом вязкости). При обратном соотношении указанных величин наблюдается ламинарный режим течения.

Для определения режима течения используется безразмерный комплекс, называемый числом Рейнольдса

$$Re = \frac{U_{cp} \cdot d}{\nu} = \frac{U_{cp} \cdot d \cdot \rho}{\mu}, \quad (61)$$

где U_{cp} - средняя по сечению потока скорость течения, м/с;

d - характерный геометрический размер потока, м;

ρ - плотность жидкости, кг/м³;

ν - кинематический коэффициент вязкости, м²/с;

μ - динамический коэффициент вязкости, Па с.

Установлено, что при движении жидкости и газа по трубам и каналам при значениях $Re < 2300$ режим течения всегда ламинарный. Значение числа Рейнольдса, равное 2300, называется нижним критическим числом Рейнольдса, а соответствующая ему скорость - нижняя критическая скорость. Значение верхнего критического числа Рейнольдса, при котором наступает турбулентный режим, точно не установлено. При определенных условиях ламинарный характер течения может сохраняться до значений $Re = 2000$, после чего режим переходит в турбулентный.

Как видно из формулы (60), режим течения не определяется какой-то одной величиной, но есть функция комбинации всех трех величин: скорости, вязкости и геометрического размера. Отличительной особенностью ламинарного и турбулентного течений является различие профилей скорости в поперечном сечении потока.

При ламинарном течении (рисунок 17), профиль скорости представляет собой параболу второго порядка. Максимальная скорость наблюдается на оси потока. На стенке скорость равна нулю. Это же справедливо и для турбулентного течения, однако профиль скорости более сложен (рисунок 18). Вблизи внутренней поверхности, ограничивающей стенки, образуется вязкий подслой,

где течение близко к ламинарному. В ядре потока (ядре течения) движение жидкости или газа носит турбулентный характер и профиль скорости близок к равномерному. В вязком подслое распределение скорости по его толщине считается линейным вследствие незначительной его толщины.

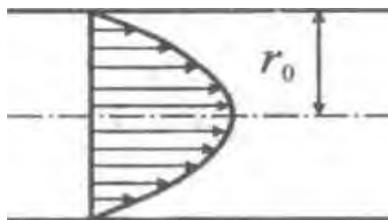


Рисунок 17

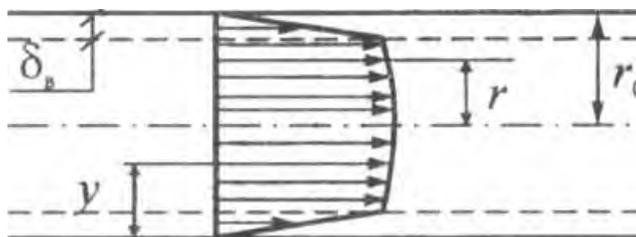


Рисунок 18

Для ламинарного и турбулентного течений наблюдается различная зависимость потерь энергии на трении от скорости течения. При небольших скоростях течения потери прямо пропорциональны скорости, при значительных скоростях, когда наступает турбулентный режим, эта зависимость приближается к квадратичной.

5.1 Основные закономерности ламинарного течения

При движении жидкости или газа (рассматривается стабилизированное течение) по трубам профиль скорости описывается выражением:

$$U = \frac{\Delta p}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot (r_0^2 - r^2),$$

где U - скорость в точке на расстоянии r от оси потока, м/с;

r_0 - радиус трубы, м,

при $r = 0$ (на оси потока)

$$U_{\max} = \frac{\Delta p}{4 \cdot \mu \cdot l} \cdot r_0^2$$

или

$$\frac{U}{U_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{r_0^2}.$$

Соотношение между средней по сечению потока скоростью $U_{\text{ср}}$ и максимальной скоростью на оси

$$U_{\max} = 2 \cdot U_{\text{ср}} \quad (62)$$

Профиль описывается выражением

$$U = 2 \cdot U_{\text{ср}} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Потери давления на длине l трубы рассчитываются по формуле:

$$\Delta p = \frac{8 \cdot \mu \cdot U_{\text{ср}}}{r_0^2} \cdot l.$$

Распределение касательных напряжений трения по сечению потока описывается линейной зависимостью (рисунок 19).

$$\tau = \frac{\Delta p}{2 \cdot l} \cdot r,$$

где τ - касательные напряжения трения в точке на расстоянии r от оси потока τ .

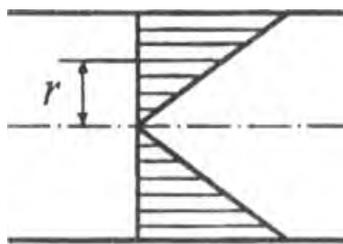


Рисунок 19

При $r = r_0$ имеем

$$\tau = \tau_{\max} = \tau_w$$

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{2 \cdot l} \cdot r_0$$

или

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \frac{r}{r_0}.$$

На оси потока ($r = 0$) касательные напряжения равны нулю.

5.2 Основные закономерности турбулентного течения

Толщина вязкого подслоя (рисунок 18)

$$\delta = \frac{68,4 \cdot r_0}{Re^{0,875}}; \quad Re = \frac{U_{cp} \cdot d_0}{\nu}.$$

Профиль скорости в ядре течения описывается эмпирическим уравнением

$$U = U_{max} - 5,75 \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \cdot \lg \frac{r_0}{y},$$

где y - расстояние до данной точки от стенки трубы.

Эпюра касательных напряжений трения описывается, как и в случае ламинарного течения, линейной зависимостью

$$\tau = \frac{\Delta p}{2 \cdot l} \cdot r; \quad \tau_w = \frac{\Delta p}{2 \cdot l} \cdot r_0; \quad \frac{\tau}{\tau_w} = \frac{r}{r_0}.$$

Соотношение между средней по сечению потока скоростью и максимальной скоростью равны:

$$\frac{U_{max}}{U_{cp}} = \frac{1,64}{Re^{\frac{1}{38}}},$$

где число Рейнольдса рассчитывается по средней скорости:

$$Re = \frac{U_{cp} \cdot d_0}{\nu}.$$

Как при ламинарном, так и при турбулентном течении средняя скорость определяется выражением:

$$U_{cp} = \frac{V}{S},$$

где V - объемный секундный расход жидкости или газа, $\text{м}^3/\text{с}$;

S - площадь поперечного сечения потока, м^2 .

Для труб с поперечным сечением круглой формы

$$S = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4},$$

где d_0 - геометрический диаметр трубы.

Для труб с поперечным сечением некруглой формы вместо геометрического используется гидравлический диаметр

$$d_r = \frac{4 \cdot S'}{\Pi},$$

где S' - площадь поперечного сечения некруглого потока, м^2 ;

Π - смоченный периметр поперечного сечения некруглого потока, м :

$$S = \frac{\pi \cdot d_r}{4}.$$

Падение давления, вызванное трением, на участке трубы длиной l определяется по формуле

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \rho \cdot \frac{U_{\text{ср}}^2}{2},$$

где λ - коэффициент гидравлического трения.

Пример. По трубопроводу диаметром 250 мм к печи подводится воздух, имеющий температуру 20°C , в количестве $2520 \text{ м}^3/\text{ч}$. Как изменится режим течения в трубопроводе и скорость на его оси, если расход воздуха уменьшится вдвое с одновременным повышением его температуры до 350°C ? Каков расход воздуха при температуре 20°C , при котором турбулентный режим перейдет в ламинарный и какова при этом будет скорость на оси трубопровода?

Решение:

Площадь поперечного сечения трубопровода

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,25^2}{4} = 0,049 \text{ м}^2.$$

Средняя по сечению скорость воздуха при первоначальных условиях

$$V_{\text{ср}} = \frac{V}{S} = \frac{2520}{3600 \cdot 0,049} = 14,29 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса при первоначальных условиях

$$Re = \frac{U \cdot d}{\nu} = \frac{14,29 \cdot 0,25}{13,28 \cdot 10^{-6}} = 269013.$$

Режим течения турбулентный.

Средняя скорость воздуха при измененных условиях

$$U' = \frac{V}{2 \cdot S} = \frac{2520}{2 \cdot 0,049 \cdot 3600} = 7,14 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса при измененных условиях

$$Re' = \frac{U' \cdot d}{\nu} = \frac{7,1 \cdot 0,25}{55,46 \cdot 10^{-6}} = 32198.$$

Режим течения турбулентный. Турбулентный режим переходит в ламинарный при числе Рейнольдса, равном 2300. Отсюда определим нижнюю критическую скорость

$$U'' = \frac{2300 \cdot \nu}{d} = \frac{2300 \cdot 13,28 \cdot 10^{-6}}{0,25} = 0,122 \text{ м/с}.$$

Расход воздуха, при котором турбулентный режим перейдет в ламинарный

$$V'' = U'' \cdot S = 0,122 \cdot 0,049 \cdot 3600 = 21,55 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

При ламинарном режиме скорость воздуха на оси (максимальная) в два раза больше средней по сечению, следовательно

$$U_{\max} = 2 \cdot U'' = 2 \cdot 0,122 = 0,244 \text{ м/с}.$$

Скорость на оси трубопровода при первоначальных условиях

$$U_{\max} = U \cdot \frac{1,64}{Re^{\frac{1}{38}}} = 14,29 \cdot \frac{1,24}{(269013)^{\frac{1}{38}}} = 16,87 \text{ м/с}.$$

Скорость на оси трубопровода при измененных условиях

$$U'_{\max} = 7,14 \cdot \frac{1,64}{(32198)^{\frac{1}{38}}} = 8,91 \text{ м/с}.$$

Задача 5.1 По трубе диаметром d , мм, протекает вода с температурой T , °С, в количестве G , кг/ч. Определить характер движения воды в трубе (таблица 5.1).

Таблица 5.1

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	50	100	150	50	50	50	100	100	100	75
T	20	20	20	25	50	95	20	20	20	40
G	2000	2000	2000	4000	4000	4000	2000	6000	10000	8000

Задача 5.2 Через дымовую трубу с внутренним диаметром d , мм, проходит V , м³/с, продуктов сгорания с температурой T , °С. Определить характер движения газов в дымовой трубе (таблица 5.2).

Таблица 5.2

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	0,8	1,5	3,0	2,5	2,5	2,5	3,0	3,0	3,0	2,8
V	1,5	1,5	1,5	0,5	1,5	3,0	3,5	3,5	3,5	2,5
T	400	400	400	350	350	350	180	300	500	350

Задача 5.3 Через горизонтальный боров печи проходит V , м³/с, продуктов сгорания с температурой T , °С. Определить характер течения газов, если боров имеет прямоугольное сечение с размерами $A \times B$, мм² (таблица 5.3).

Таблица 5.3

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	0,5	0,5	0,5	0,5	2,0	4,0	2,5	2,5	2,5	3,0
T	600	600	600	80	800	800	400	600	800	500
A	600	800	1200	800	800	800	800	800	800	1000
B	800	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200	2500

Задача 5.4 Через дымовую трубу печи диаметром d , м, и высотой H , м, проходят дымовые газы в количестве V , м³/с, имеющие температуру T , °С. Определить скорость газа на оси трубы и на расстоянии r , м, от ее стенки (таблица 5.4).

Таблица 5.4

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	2,0	2,0	2,0	1,5	1,5	1,5	0,8	1,8	3,5	2,0
H	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
V	5,0	15,0	25,0	3;5	5,0	15,0	15,0	15,0	15,0	14,0
T	500	500	500	350	350	350	450	450	450	380
r	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,15	0,3	0,8	0,25
	0,75	0,75	0,75	0,5	0,5	0,5	0,3	0,6	1,25	0,75

Задача 5.5 По трубе диаметром d , мм, подается вода со скоростью U_{cp} , м/с. Определить скорость движения воды и величину касательных напряжений трения в точке, расположенной на расстоянии r , м, от оси трубы. При расчете принять кинематический коэффициент вязкости воды равным $0,157 \text{ см}^2/\text{с}$. Для случая турбулентного режима определить толщину вязкого подслоя (таблица 5.5).

Таблица 5.5

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	50	50	50	100	100	100	150	150	150	100
U_{cp}	0,25	0,5	1,5	0,25	0,5	1,5	0,25	0,5	1,5	0,5
r	5	5	5	5	5	5	15	15	15	5
	10	10	10	20	20	20	35	35	35	20
	20	20	20	40	40	40	60	60	60	35

Задача 5.6 По двум трубам с одинаковым диаметром d , мм, пропускается воздух и вода, имеющие одинаковую температуру T , °С, в количестве G , кг/ч. Определить скорость течения обеих жидкостей на оси трубы и построить профиль касательных напряжений трения по сечению труб, если падение давления определяется на длине l , м. Коэффициент гидравлического трения принять равным $0,05$. Физические свойства сред взять из приложений (таблица 5.6).

Таблица 5.6

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	50	75	90	100	110	140	150	170	95	125
T	50	99	50	99	99	50	99	50	50	99
G	1200	400	800	500	2100	3200	300	700	4500	1600
l	2	10	8	12	6	10	5	14	20	18

Задача 5.7 В колпаковой печи (рисунок 20) для отжига ленты в рулонах циркулирует защитная атмосфера со средней температурой T , °С, в количестве V , м³/ч. Определить характер движения защитной атмосферы в пространстве между боковой поверхностью рулонов и муфелем и во внутрирулонном пространстве, если геометрические размеры равны соответственно r_1 , r_2 , r_3 , мм (таблица 5.7). При расчете принять во внимание, что свойства защитной атмосферы такие же, как и у сухого воздуха.

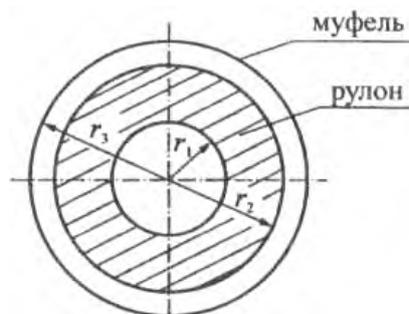


Рисунок 20

Таблица 5.7

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	400	500	600	450	550	580	620	390	440	520
V	12000	11000	10000	8000	13500	12500	6000	9000	10000	10500
r1	250	300	350	400	280	320	300	400	450	300
r2	850	900	850	900	780	1020	900	1010	1200	1050
r3	1000	1050	1000	1050	950	1170	1060	1180	1350	1200

Задача 5.8 Чугун из доменной печи разливается в ковши с помощью футерованного желоба, поперечное сечение которого имеет форму трапеции (рисунок 21). Определить характер движения чугуна в желобе, если его кинематический коэффициент вязкости при температуре 1200°C равен $3,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, а время наполнения ковша емкостью G , т, равно t , мин. Геометрические размеры указаны в таблице 5.8.

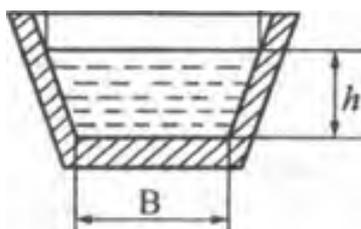


Рисунок 21

Таблица 5.8

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G	100	100	100	180	180	180	250	250	350	350
t	20	40	60	20	40	60	40	60	40	60
A	200	200	200	300	300	300	350	350	400	400
B	150	150	150	200	200	200	250	250	300	300
h	200	150	100	200	150	100	200	150	200	150

Задача 5.9 Продукты сгорания с температурой T , °С, подводятся к дымовой трубе диаметром d , мм, по двум горизонтальным боровам прямоугольного сечения размером $A \times B$, м², в количестве V , м³/с, через каждый боров. Изменится ли характер движения газов в дымовой трубе по сравнению с течением в боровах? Охлаждение газов в трубе не учитывать (таблица 5.9).

Таблица 5.9

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	350	350	500	500	500	600	600	600	280	280
d	1,2	2,0	2,5	1,2	2,0	0,8	0,8	0,8	2,5	2,5
V	1,5	4,0	6,0	2,5	5,0	0,6	1,5	4,2	4,0	4,0
A	0,8	1,2	1,2	1,2	0,8	0,9	0,9	0,9	и	1,1
B	1,2	1,9	1,8	1,8	1,2	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6

6 Пристеночный пограничный слой

При движении вязкой жидкости (как капельной, так и газа) вдоль твердой поверхности вблизи поверхности образуется пристеночный пограничный слой. Причиной возникновения его является тормозящее воздействие твердой поверхности на движущуюся жидкость. Частицы жидкости, непосредственно контактирующие с твердой поверхностью, прилипают к ней и их скорость относительно поверхности равна нулю. Тормозящее воздействие поверхности передается вглубь потока с одновременным затуханием по мере удаления от поверхности. Таким образом, пристеночный пограничный слой представляет собой слой заторможенной жидкости, в котором скорость движения жидкости меняется от нуля на самой поверхности до скорости невозмущенной части потока U_∞ . Толщину этого слоя обозначают буквой δ и называют толщиной пристеночного пограничного слоя. Движение жидкости на начальном участке пограничного слоя ламинарно, но при большой протяженности поверхности или при наличии каких-либо возмущений ламинарное течение переходит в турбулентное. На рисунке 22 показана структура пограничного слоя. Можно выделить следующие характерные участки:

- 1 - ламинарного течения жидкости в пограничном слое,
- 2 - переходного режима течения,
- 3 - турбулентного течения жидкости в пограничном слое.

В переходной области и области 3 вблизи поверхности существует тонкий подслой (вязкий подслой) с толщиной $\delta_v = (0,01 \dots 0,001) \delta$, внутри которого режим течения близок к ламинарному.

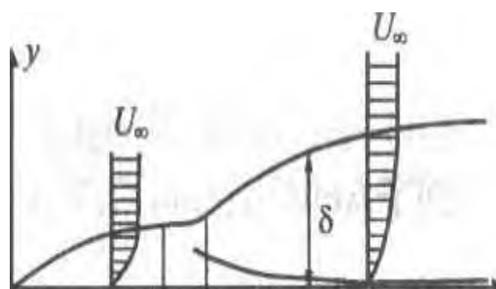


Рисунок 22 [3]

При ламинарном течении внутри пристеночного пограничного слоя (ламинарный пограничный слой) на плоской пластине справедливы следующие приближенные соотношения

- толщина пограничного слоя:

$$\delta = 4,46 \cdot \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U_\infty}},$$

или, в безразмерной форме:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}},$$

где ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости, м²/с;

x - расстояние от передней кромки пластины, м;

U_∞ - скорость движения жидкости вне пограничного слоя, м/с;

число Рейнольдса рассчитывается по формуле:

$$Re_x = \frac{U_\infty \cdot x}{\nu}$$

- уравнение профиля скорости внутри пограничного слоя

$$U = U_\infty \cdot \left[1,5 \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right) - 0,5 \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right],$$

или, в безразмерной форме,

$$\frac{U}{U_\infty} = 1,5 \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right) - 0,5 \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^3,$$

где U - скорость движения жидкости в точке, удаленной на расстояние y от поверхности пластины, м/с;

- касательные напряжения трения на поверхности пластины

$$\frac{\tau_w}{\rho \cdot U_\infty} = \frac{0,323}{Re_x^{0,5}}.$$

При турбулентном течении внутри пристеночного пограничного слоя (турбулентный пограничный слой) на плоской пластине расчет ведется по следующим приближенным соотношениям:

- безразмерная величина пограничного слоя

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,376}{Re_x^{0,2}},$$

- уравнение профиля скорости внутри пограничного слоя (исключая зону вязкого подслоя вблизи поверхности, где предполагается линейный закон изменения скорости):

$$U = U_{\infty} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}},$$

или, в безразмерной форме,

$$\frac{U}{U_{\infty}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}},$$

- безразмерные касательные напряжения трения на поверхности.

$$\frac{\tau_w}{\rho \cdot U_{\infty}^2} = \frac{0,0296}{Re_x^{0,2}}.$$

Пример: На плоскую поверхность набегают поток воздуха со скоростью 5,5 м/с, имеющий температуру 20 °С. Определить толщину пристеночного пограничного слоя на расстоянии 1,2 м от кромки поверхности, скорость воздуха на расстоянии 10 мм от поверхности и величину касательных напряжений трения на самой поверхности. На каком расстоянии от поверхности скорость воздуха будет равна половине скорости набегающего потока?

Решение:

Число Рейнольдса

$$Re_x = \frac{U_{\infty} \cdot x}{\nu} = \frac{5,5 \cdot 1,20}{13,28 \cdot 10^{-6}} = 496988,$$

Так как режим течения внутри пограничного слоя турбулентный, то толщина пограничного слоя

$$\delta = \frac{0,376 \cdot x}{Re_x^{0,2}} = \frac{0,376 \cdot 1,2}{(496988)^{0,2}} = 0,03274 \text{ м} = 32,74 \text{ мм}.$$

Скорость воздуха в выбранной точке

$$U = U_{\infty} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} = 5,5 \cdot \left(\frac{10}{37,5}\right)^{\frac{1}{7}} = 4,64 \text{ М/с}.$$

Касательные напряжения трения на поверхности

$$\tau_w = \rho \cdot U_{\infty}^2 \cdot \frac{0,0296}{Re_x^{0,2}} = 1,20 \cdot (5,5)^2 \cdot \frac{0,0296}{(496988)^{0,2}} = 0,07797 \text{ Па}.$$

Из условия

$$\frac{U}{U_{\infty}} = 0,25$$

определим искомое расстояние, на котором скорость равна половине скорости набегающего потока

$$0,5 = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} ; y = 0,25 \text{ мм} .$$

Задача 6.1 На плоскую пластину набегаёт поток воздуха, имеющий температуру T , °С, со скоростью U_{∞} , м/с. Определить толщину пристеночного пограничного слоя на расстоянии x , м, от начала пластины (таблица 6.1).

Таблица 6.1

Исходные данные	Вариант												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
T	15	15	15	200	200	200	500	500	800	800	800	1000	1000
U_{∞}	2	2	2	5	5	5	3	6	6	6	10	0,5	0,5
x	0,5	2	4	0,5	2	4	2	2	2	4	4	0,5	2

Задача 6.2 В пространство между двумя бесконечными плоскими параллельными поверхностями (рисунок 23) втекает поток воздуха со скоростью U_{∞} , м/с, равномерно распределенной по сечению потока. Определить, какую толщину B занимает зона невозмущенного потока на расстоянии x , м, от передней кромки пластин, если расстояние между пластинами равно H , м, а температура воздуха- T , °С (таблица 6.2).

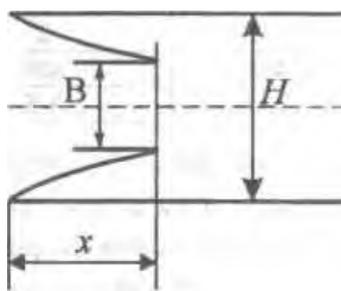


Рисунок 23

Таблица 6.2

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_{∞}	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	2	2	4	0,5	3
H	0,2	0,5	1,0	0,2	0,5	0,5	0,5	0,5	0,2	0,5
T	20	20	20	400	400	800	800	800	1000	1300
x	0,4	0,4	0,4	0,5	1,0	0,5	1,0	1,5	0,2	2,0

Задача 6.3 Рассчитать и построить профили скорости в пристеночном пограничном слое при набегании потока воздуха на плоскую поверхность со скоростью U_{∞} , м/с, и температурой T , °С, если расстояние от передней кромки плоскости равно x , м (таблица 6.3).

Таблица 6.3

Исходные данные	Вариант															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
U_{∞}	0,01	0,02	0,05	0,1	0,5	1,0	1,4	1,8	2,0	2,4	2,8	3,0	3,5	5	8	12
T	20	200	500	1000	20	200	500	1000	20	200	500	1000	20	200	500	1000
x	0,1	0,3	0,5	1,0	1,5	2,0	4,0	0,1	0,3	0,5	0,8	1,2	1,6	2,0	3,0	5,0

Задача 6.4 На каком расстоянии y от поверхности скорость в пристеночном пограничном слое будет равна отношению U/U_{∞} , если скорость набегающего воздушного потока равна U_{∞} , м/с, температура T , °С, а расстояние от кромки поверхности x , м? Определить то же, если на поверхность набегают потоки воды при $T=20$ °С (таблица 6.4).

Таблица 6.4

Исходные данные	Вариант													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{U}{U_{\infty}}$	0,25	0,50	0,75	0,25	0,50	0,75	0,25	0,50	0,75	0,25	0,50	0,75	0,5	
U_{∞}	0,1			0,5			2			5			3	2
T	20			400			800			1000			600	20
x	0,5			1,0			1,5			2,0			0,5	1,5

Задача 6.5. Какой скоростью должен обладать набегающий на плоскую поверхность воздушный поток с температурой T , °С, если толщина пограничного пристеночного слоя на расстоянии x , м, от начала поверхности равна δ , мм? Расчет сделать как для ламинарного, так и для турбулентного течений в пограничном слое (таблица 6.5).

Таблица 6.5

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	20	500	1000	20	500	1000	20	20	500	800
x	0,5	0,5		1,5	2,0	2,5	3,5	2,0	2,0	0,5
δ	5	15	3	8	15	12	22	25	15	10

Задача 6.6 Определить число Рейнольдса для набегающего потока жидкости, если на расстоянии x , м, от передней кромки плоской поверхности толщина пограничного слоя равна δ , мм, а температура жидкости T , °С. Чему равна при этом скорость набегающего потока U_∞ ? Расчеты сделать для ламинарного и турбулентного течений (таблица 6.6).

Таблица 6.6

Исходные данные		Вариант									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x		0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	1,0	2	2	0,5	0,5
T	Вода	20	20	30	45	25	50	20	80	50	50
	Воздух	20	20	200	400	600	800	1000	1400	1000	1000
	Продукты сгорания	20	20	200	400	600	800	1000	1400	1000	1000
δ		5	25	5	15	10	10	25	25	5	30

Задача 6.7 Плоская поверхность смывается водой, скорость течения которой вдали от поверхности равна U_∞ , м/с, а температура T , °С. Определить величину касательных напряжений трения на поверхности пластины на расстоянии x , м, от ее передней кромки (таблица 6.7).

Таблица 6.7

Исходные данные		Вариант									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_∞		0,5	0,5	0,5	3,0	3,0	3,0	0,5	2,0	5,0	4,0
T		20	20	20	20	40	80	50	50	50	75
x		0,1	0,1	3,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,5	1,5	2,0

7 Потеря энергии при движении жидкостей и газов в трубах и каналах

Как уже было сказано в предыдущем разделе, при движении вязкой жидкости (газа) в трубах и каналах часть энергии движущейся жидкости (газа) расходуется на преодоление гидравлических сопротивлений.

Потери энергии складываются из потерь на трение жидкости (газа) о стенки трубы или канала, на внутреннее трение частиц жидкости (газа) между собой, а также потерь на преодоление местных сопротивлений.

Величина потерь энергии может быть выражена как в единицах давления, так и в метрах столба движущейся жидкости. При этом потери энергии на трение определяются соответственно формулами:

$$\Delta p_{\text{тр}} = \lambda \cdot \frac{l}{d_r} \cdot \rho \cdot \frac{U^2}{2}, \quad (63)$$

и

$$\Delta h_{\text{тр}} = \lambda \cdot \frac{l}{d_r} \cdot \rho \cdot \frac{U^2}{2 \cdot g}, \quad (64)$$

где λ - коэффициент трения;

l - длина участка трубы, на которой определяются потери, м;

U - средняя по сечению трубы скорость жидкости, м/с;

g - ускорение сил тяжести, м/с²;

ρ - плотность жидкости (газа), кг/м³;

d , - гидравлический диаметр, м; для труб круглого сечения он равен геометрическому диаметру. Для каналов некруглой формы его расчет приведен в предыдущем разделе.

Формулы (63) и (64) справедливы как для ламинарного, так и турбулентного режимов движения.

Величина коэффициента трения λ определяется:

- для ламинарного течения в круглых трубопроводах диаметром d :

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}},$$

где число Рейнольдса определяется по средней скорости, т. е.

$$\text{Re} = \frac{U \cdot d}{\nu}$$

- для турбулентного течения в гидравлически гладких трубах, когда толщина вязкого (ламинарного) подслоя превышает высоту выступов шероховатости поверхности

формула Альтшуля

$$\lambda = \frac{1}{\left(1.82 \cdot \lg \frac{Re}{100} + 2\right)^2},$$

формула Блазиуса ($Re = 104 \dots 105$):

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}},$$

при $Re > 105$ используется формула Никурадзе

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}},$$

- для турбулентного течения в шероховатых трубах (толщина вязкого подслоя меньше величины выступов шероховатости)

формула Никурадзе

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \cdot \lg \frac{r}{K} + 1,74\right)^2}$$

формула Шифринсона

$$\lambda = 0,11 \cdot \left(\frac{K}{d}\right)^{0,25},$$

где r - радиус трубы, мм;

d - диаметр трубы, мм.

Ниже приведены значения шероховатости (K , мм) для труб:

новых чистых	- $0,6 \cdot 10^{-2}$
стальных, подверженных коррозии	- $50 \cdot 10^{-2}$
стальных, сильно заржавевших	- $200 \cdot 10^{-2}$
чугунных новых	- $30 \cdot 10^{-2}$
чугунных, бывших в употреблении	- $110 \cdot 10^{-2}$
кирпичных на цементном растворе	- $(80 \dots 600) \cdot 10^{-2}$

Для некруглых труб расчеты коэффициентов трения проводятся по вышеперечисленным формулам с заменой геометрического диаметра на гидрав-

личный. Для приближенных расчетов потерь на трение при движении дыма в кирпичных боровых, трубах принимается $\lambda = 0,05$, в металлических трубах $\lambda = 0,03$. Толщина ламинарного подслоя зависит от степени турбулентности потока, т. е. от числа Рейнольдса, и определяется по эмпирической формуле

$$\delta = \frac{68,4 \cdot r}{Re^{0,875}}.$$

Потеря энергии на преодоление местных сопротивлений вызывается нарушением равномерности движения жидкости (внезапное расширение и сужение потока, повороты резкие и плавные, слияние и разделение потоков и т.д.). Величина потери энергии определяется в долях динамического давления или динамического напора:

$$\Delta p_m = \xi \cdot \rho \cdot \frac{U^2}{2},$$

$$\Delta h_m = \xi \cdot \frac{U^2}{2 \cdot g}.$$

В последних формулах коэффициент ξ называется коэффициентом местного сопротивления, а U - средняя по сечению потока скорость, м/с.

Поскольку скорость до и после местного сопротивления, как правило, меняется, то при расчетах необходимо указывать, для какой скорости берется величина коэффициента местного сопротивления.

При турбулентном движении жидкости (газа) по каналу, имеющему внезапное расширение, потери давления на преодоление местных сопротивлений рассчитываются по формуле

$$\Delta p_m = \rho \cdot \frac{U_1^2 - U_2^2}{2},$$

где U_1, U_2 - средняя скорость соответственно до и после расширения.

Средние скорости и плотность ρ берутся при действительной температуре жидкости (газа).

При движении нагретых печных газов по вертикальным каналам возникают потери энергии на преодоление геометрического напора. Выраженные в единицах давления эти потери определяются уравнением

$$\Delta p_g = z \cdot g \cdot (\rho_v - \rho_g),$$

где ρ_v, ρ_g - соответственно плотности окружающего воздуха и печных газов при их действительной температуре, кг/м³;

Z - высота канала, м.

При аэродинамическом расчете дымового тракта потери энергии на преодоление геометрического напора суммируются с другими видами потерь, если горячие дымовые газы идут вниз, и вычитаются из общей суммы, - если дымовые газы движутся вверх.

Пример. По стальному не новому трубопроводу диаметром 80 мм к горелке подается воздух в количестве 105 м³/ч. Избыточное давление воздуха, замеренное перед горелкой, составляет 3000 Па. Определить абсолютное давление воздуха в начале трубопровода, если его длина равна 18 м, а на пути движения воздуха есть три поворота на 90 град с закруглением. Температуру воздуха принять равной 20 °С, а атмосферное давление равным 101,3 кПа.

Решение:

Площадь поперечного сечения трубы

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,080^2}{4} = 5,024 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2.$$

Средняя по сечению скорость воздуха в трубе

$$U = \frac{V}{S} = \frac{105}{3600 \cdot 5,024 \cdot 10^{-3}} = 5,81 \text{ м/с}.$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{U \cdot d}{\nu} = \frac{5,81 \cdot 0,080}{13,28 \cdot 10^{-6}} = 35000.$$

Так как режим течения воздуха турбулентный, то необходимо определить толщину вязкого подслоя

$$\delta = \frac{68,4 \cdot r}{Re^{0,875}} = \frac{68,4 \cdot 40}{(35000)^{0,875}} = 0,289 \text{ мм}.$$

Величину выступов шероховатости для не новых стальных труб шероховатости для не новых стальных труб принимаем равной 0,5 мм, что больше, чем толщина вязкого подслоя, следовательно, дальнейший расчет ведем для шероховатых труб.

Величина коэффициента трения рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{1}{(2 \cdot \lg \frac{r}{K} + 1,74)^2} = \frac{1}{(2 \cdot \lg \frac{40}{0,5} + 1,74)^2} = 0,0325.$$

Плотность воздуха при 20°С

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T} = 1,29 \cdot \frac{273}{273 + 20} = 1,20 \text{ кг/м}^3$$

Потери давления на преодоление силы трения

$$\Delta p_{\text{тр}} = \lambda \cdot \frac{1}{d} \cdot \rho \cdot \frac{U^2}{2} = 0,0325 \cdot \frac{18}{0,080} \cdot 1,20 \cdot \frac{(5,81)^2}{2} = 148,1 \text{ Па}.$$

Коэффициент местного сопротивления для поворота на 90 град с закруглением равен единице, поэтому потери давления на преодоление местных сопротивлений равны

$$\Delta p_m = 3 \cdot \xi \cdot \rho \cdot \frac{U^2}{2} = 3 \cdot 1 \cdot 1,20 \cdot \frac{(5,81)^2}{2} = 60,8 \text{ Па.}$$

Суммарные потери давления

$$\Delta p = \Delta p_{тр} + \Delta p_m = 148,1 + 60,8 = 208,9 \text{ Па.}$$

Абсолютное давление воздуха в начале трубопровода равно

$$p_{абс} = p_0 + p_{изб} + \Delta p = 101325 + 3000 + 208,9 = 104534 \text{ Па.}$$

Задача 7.1 По двум одинаковым трубам диаметром d , мм, и длиной l , м, пропускают воздух, имеющий температуру T_1 и T_2 , °С. Определить потери давления по длине труб, если последние представляют собой стальные, подверженные коррозии трубы, а расход воздуха равен G , кг/ч (таблица 7.1).

Таблица 7.1

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	50	70	80	90	100	110	100	90	80	70
l	40	70	100	120	110	90	140	60	115	80
T_1	20	20	20	20	20	50	150	150	150	150
T_2	150	200	300	400	50	400	300	200	300	400
G	1000	1000	500	500	3000	3000	5000	5000	7000	7000

Задача 7.2 Микроманометр с наклоном шкалы к горизонту, $\alpha = 30$ град, заполненный спиртом ($\gamma = 8500 \text{ Н/м}^3$) измеряет перепад давлений в двух точках воздухопровода, отстоящих друг от друга на расстоянии L , м. Средняя шероховатость стен воздухопровода диаметром d , мм, равна K , мм. Определить коэффициент трения, если температура воздуха равна T , °С, его расход V , м³/ч, а показания микроманометра l , мм (таблица 7.2).

Таблица 7.2

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L	5	10	15	20	5	10	15	12	11	14
d	200	300	400	500	600	400	300	250	100	500
K	0,15	0,20	0,22	0,25	0,30	0,35	0,30	0,30	0,40	0,40
T	20	100	200	300	400	500	400	250	350	150
V	5000	10000	15000	2000	25000	30000	35000	40000	2600	18000
l	4	5	5,5	6	6,5	3	2,5	7	10	12

Задача 7.3 Газы из печи удаляются по кирпичной дымовой трубе высотой H , м, и средним диаметром d , мм. Определить потери давления на трение по длине труб, если средняя по длине трубы температура дымовых газов равна T , °С, расход газов V , м³/с. Как изменятся потери давления, если температура газов уменьшится в два раза (таблица 7.3)?

Таблица 7.3

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	20	30	40	50	60	70	80	90	120	180
d	1,2	1,2	1,6	1,6	2,0	2,0	2,5	2,7	3,0	3,0
T	350	400	200	250	300	400	600	450	370	550
V	0,10	0,15	0,15	0,20	0,30	0,35	0,35	0,40	0,35	0,40

Задача 7.4 По горизонтальному кирпичному борову движутся дымовые газы в количестве V , м³/с. Боров прямоугольного сечения имеет размеры: ширина - A , м, высота - B , м. Определить потери давления на трение на длине l , м, борова, если температура дымовых газов равна T , °С (таблица 7.4).

Таблица 7.4

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	0,05	0,08	0,10	0,15	0,20	0,22	0,26	0,28	0,30	0,25
A	0,8	0,8	0,8	1,2	1,2	1,2	0,85	0,85	1,4	1,4
B	1,2	1,2	1,2	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,6	1,6
l	10	15	30	10	20	30	15	20	30	45
T	600	750	400	300	400	500	600	700	800	900

Задача 7.5 Через трубчатый керамический рекуператор (коэффициент трения 0,035), состоящий из 116 труб диаметром 108 мм, проходят сверху вниз дымовые газы, имеющие температуру T_r , °С, в количестве V , м³/ч. Определить потери давления на пути дымовых газов, если высота рекуператора H , м, а температура окружающего воздуха T , °С, размеры трубной доски $A \times B$, м (таблица 7.5).

Таблица 7.5

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_{Γ}	1100	1000	950	900	800	700	600	650	750	850
V	25000	25000	25000	30000	30000	35000	35000	35000	40000	40000
H	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,0	3,5	5,0	3,8
T	+5	+15	+40	+20	-5	-10	-15	-20	-40	-25
A	1,9	1,9	1,9	2,2	2,2	2,2	2,2	2,5	2,5	2,5
B	2,0	2,0	2,0	2,4	2,4	2,4	2,4	2,5	2,5	2,5

Задача 7.6 Дымовые газы мартеновской печи в количестве V , м³/ч, подводятся по горизонтальному кирпичному борову прямоугольного сечения размерами $A \times B$, м. На пути газов установлен шибер. Определить потери давления на длине бора l , м, если температура дыма равна T , °С, степень открытия шибер-ра равна n , % (таблица 7.6).

Таблица 7.6

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V \cdot 10^{-3}$	20	22	25	28	30	32	35	38	36	39
A	0,8	0,8	0,9	0,9	0,8	1,0	1,0	1,2	1,4	1,4
B	1,0	1,2	1,2	1,4	1,4	1,3	1,5	1,4	1,4	1,6
l	10	12	15	16	18	17	13	21	19	14
t	500	550	600	650	700	680	540	620	710	650
n	10	20	30	40	60	80	30	40	50	70

Задача 7.7 Воздух с температурой T , °С, подается к горелке в количестве V , м³/ч, по стальной трубе, подверженной коррозии. Определить, каким должно быть давление воздуха в начале трубопровода, если его длина равна l , м, и он имеет три поворота под прямым углом и один поворот под углом φ . Диаметр трубопровода равен d , мм. Требуемое давление воздуха перед горелкой равно 2700 Па (таблица 7.7).

Таблица 7.7

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	20	40	10	15	150	200	250	300	400	450
V	5	10	15	40	60	100	200	300	350	450
l	16	21	17	40	60	80	110	260	200	75
φ	20	40	60	80	100	20	40	60	80	100
d	50	60	70	80	50	60	70	80	60	80

Задача 7.8 По трубе (рисунок 24) протекает вода в количестве V , м³/ч. Определить, какую разность h покажет дифференциальный манометр при прямом и обратном направлении течения воды, если диаметры соответственно равны d_1 и d_2 , мм. Коэффициент Кориолиса принять равным единице для обоих течений. Потерями на трение пренебречь, температура воды равна 20 °С (таблица 7.8)

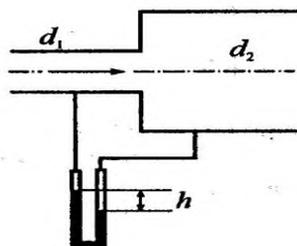


Рисунок 24

Таблица 7.8

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V	40	50	60	70	80	55	65	75	45	70
d_1	40	55	60	80	85	60	65	75	50	40
d_2	160	200	220	250	250	210	240	260	190	180

Задача 7.9 От воздуходувной станции к воздухонагревателям доменной печи подается воздух при температуре T , °С, в количестве V , м³/мин. На полной длине воздухопровода l , м, имеется четыре поворота под углом 90°, один резкий поворот под углом φ и два запорных клапана ($\xi = 2,5$). Определить необходимый диаметр воздухопровода и давление на выходе из воздуходувок, если скорость воздуха в воздухопроводе должна быть U , м/с, а абсолютное давление у входа в воздухонагреватели p , Па. Абсолютную шероховатость стенки трубы принять равной K , мм (таблица 7.9).

Таблица 7.9

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	135	140	150	170	160	175	180	190	195	200
V	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	1950	2000	2200
l	90	100	110	80	120	140	150	115	130	145
φ	20	40	60	80	100	40	80	60	20	100
U	45	20	25	16	18	20	25	14	12	20
$P \cdot 10^{-5}$	1,6	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4	2,5	2,6	2,8	3,0
K	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,3	0,35

Задача 7.10 Вода с температурой 20 °С вытекает в атмосферу под напором H , м (рисунок 25) по короткой трубе переменного сечения. Определить скорость в сечении каждой трубы, если их диаметры соответственно d_1 , d_2 , d_3 , мм. Потерями на трение пренебречь (таблица 7.10).

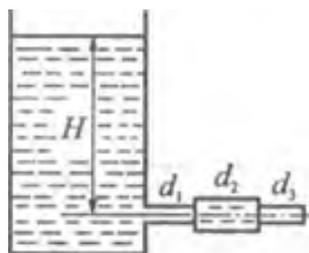


Рисунок 25

Таблица 7.10

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,3	1,0	0,9
d_1	30	35	40	45	50	35	20	30	25	30
d_2	40	45	50	70	75	60	40	35	40	45
d_3	20	30	35	40	35	20	20	30	20	25

$$V_d = U_2 \cdot S_2$$

Вводя степень сжатия струи и обозначив коэффициент скорости

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\xi}},$$

получим

$$V_d = \varphi \cdot \varepsilon \cdot S_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot z \cdot (p_B - p_r)}{\rho_r}}.$$

8.1 Истечение несжимаемой жидкости из отверстия при постоянном напоре

Уравнение Бернулли для сечений 1 и 2 (рисунок 27) имеет вид

$$H + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{U_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{U_2^2}{2 \cdot g},$$

так как $H = \text{const}$, то

$$U_1 \approx 0$$

а плоскость отсчета 0-0 проходит через ось отверстия, то $z_2 = 0$.

Тогда

$$H + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{U_2^2}{2 \cdot g}$$

откуда

$$U_2 = \sqrt{\left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g}\right) \cdot 2 \cdot g} = 4.43 \cdot \sqrt{\left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g}\right)}. \quad (65)$$

Для открытого сосуда $p_1 = p_2$, тогда скорость истечения жидкости

$$U_2 = 4.43 \cdot \sqrt{H}. \quad (66)$$

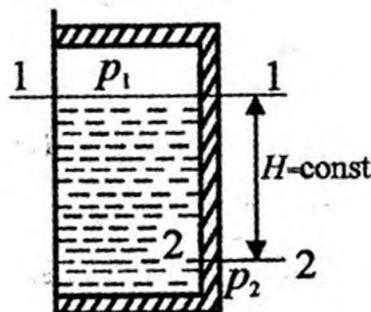


Рисунок 27 [3]

Скорость, определяемая формулами (65) и (66), называется теоретической, так как формулы не учитывают вязкости жидкости и распределения скорости по сечению вытекающей струи. Эти факторы учитываются коэффициентом скорости ϕ , который для круглого отверстия в тонкой стенке равен 0,97. Следовательно, действительная скорость истечения

$$U_d = 4,21 \cdot \sqrt{\left(H + \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g}\right)}$$

Теоретический расход жидкости

$$V_T = \varepsilon \cdot S_0 \cdot U_2 .$$

Действительный расход жидкости

$$V_d = \phi \cdot \varepsilon \cdot S_0 \cdot U_2 = U_d \cdot \varepsilon \cdot S_0 .$$

8.2 Истечение несжимаемой жидкости из отверстия при переменном напоре

Время снижения уровня с высоты H_1 до H_2 (рисунок 28) при переменном напоре рассчитывается по формуле

$$t = \frac{2 \cdot S (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\mu \cdot S_0 \sqrt{2 \cdot g}} , \quad (67)$$

где S – площадь горизонтального сечения резервуара;

S_0 – площадь сечения отверстия;

μ – коэффициент расхода.

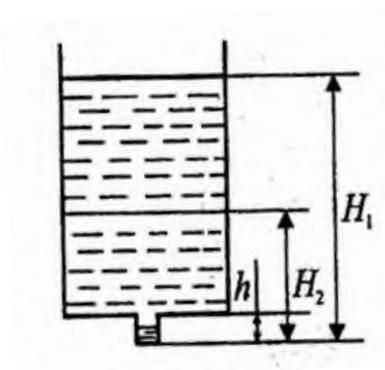


Рисунок 28 [3]

Время полного опорожнения резервуара

$$t = \frac{2 \cdot S}{\mu \cdot S_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left(\sqrt{H_1} - \sqrt{h} \right).$$

Если h пренебрежимо мала, то

$$t = \frac{2 \cdot S}{\mu \cdot S_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \sqrt{H_1}. \quad (68)$$

По формулам (67) и (68) рассчитывается и время заполнения резервуара до любого уровня при условии, что жидкость, питающая резервуар, находится под постоянным напором.

8.3 Истечение несжимаемой жидкости через насадки

Насадкой называется короткая труба, длина которой примерно равна четырем диаметрам отверстия. Применение уравнения Бернулли для анализа истечения несжимаемой жидкости аналогично случаю истечения жидкости из отверстия.

Процесс истечения жидкости через насадки (цилиндрические, суживающиеся, расширяющиеся) характеризуется соответствующими коэффициентами скорости, местного сопротивления, расхода и степенью сжатия струи, которые приведены в Приложении 6.

Пример. Через отверстие диаметром 15 мм воздухораспределительной системы струйного охлаждения металла вытекает воздух под избыточным давлением 2,46 кПа, имеющий температуру 20°C. Определить скорость истечения и расход воздуха через отверстие, если давление окружающей среды равно 101,3 кПа.

Решение:

Плотность воздуха при температуре 20 °С

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{T_0}{T} = 1,29 \cdot \frac{273}{273+20} = 1,20 \text{ кг/м}^3$$

Теоретическая скорость истечения воздуха

$$U_T = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (101300 + 2460) - 101300}{1,20}} = 64,03 \text{ м/с}$$

Площадь поперечного сечения отверстия

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (0,015)^2}{4} = 1,766 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Теоретический расход воздуха через отверстие

$$V_T = U_T \cdot S = 64,03 \cdot 1,766 \cdot 10^{-4} = 11,31 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}.$$

$$V_T = 40,71 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Действительная скорость истечения воздуха

$$U_d = \varphi \cdot U_T = 0,97 \cdot 64,03 = 62,11 \text{ м/с}.$$

Действительный расход воздуха

$$V_d = \varphi \cdot \varepsilon \cdot V_T = 0,97 \cdot 0,64 \cdot 40,71 = 25,27 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Задача 8.1 Из открытой емкости с постоянным уровнем H , м, вытекает через отверстие с диаметром d , мм, вода с температурой 20°C . Определить теоретическую и действительную скорости истечения, теоретический и действительный расход воды. Как изменяются эти величины, если емкость будет закрыта и давление над уровнем воды будет равно p_1 , Па (таблица 8.1)?

Таблица 8.1

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H	2	4	6	8	10	3	5	7	9	11
p_1	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$
d	40	40	40	60	60	60	50	50	70	70

Задача 8.2 Воздух, имеющий температуру T , $^\circ\text{C}$, вытекает из емкости, абсолютное давление в которой p_x , Па, через отверстие диаметром d , мм, в атмосферу. Определить скорости истечения, расходы воздуха. Как изменяются эти величины, если воздух вытекает в среду с давлением p_2 , Па, (таблица 8.2)? Атмосферное давление принять равным $101,3$ кПа.

Таблица 8.2

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	20	20	20	400	400	300	300	150	150	500
p_1	$5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$
d	20	40	60	20	50	70	10	20	30	50
p_2	$3 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$

Задача 8.3 При истечении воздуха, имеющего температуру T , $^\circ\text{C}$, через отверстие диаметром d , мм, в атмосферу ($p = 101,3$ кПа) из емкости, давление в

которой p_i Па, действительная скорость истечения увеличилась в n раз. Как при этом изменилось давление внутри емкости (таблица 8.3).

Таблица 8.3

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	20	20	20	200	200	400	400	500	500	500
d	10	20	40	10	20	40	50	30	40	50
p_1	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$7 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$
n	2	1,5	3	3	4	5	2	4	3	5

Задача 8.4 Открытая гляделка диаметром d , мм, расположена на высоте z , м, от пода печи, температура газов в которой T_G , °С. Определить количество газа, которое пройдет через гляделку в окружающую среду с температурой T_B , °С, за время t , ч (таблица 8.4).

Таблица 8.4

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	30	40	50	40	50	60	30	40	50	60
h	1,5	1,4	1,8	1,6	1,9	2,0	1,3	10	0,8	1,6
T_G	600	700	900	1400	1600	1200	1300	1100	1500	1700
T_B	40	40	40	30	30	30	25	25	25	25
t	0,5	1,0	1,5	2,0	1-5	4,0	2,5	1,0	3,0	2,0

Задача 8.5 Скорость в дымоходе печи измеряется с помощью микроманометра, заполненного спиртом ($\gamma = 7850 \text{ Н/м}^3$) (рисунок 30). Угол наклона измерительной трубки микроманометра, $\alpha = 30^\circ$. Какова скорость дымовых газов, если их температура T_G , °С, а показание микроманометра l , мм (таблица 8.5).

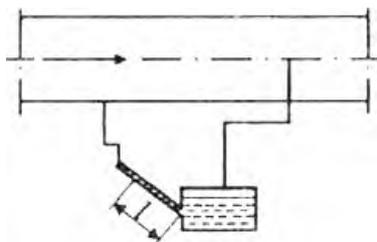


Рисунок 30

Таблица 8.5

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_{Γ}	15	200	300	400	500	600	700	400	600	500
l	10	14	15	18	25	30	40	25	15	20

Задача 8.6 Жидкая сталь ($\gamma = 74000 \text{ Н/м}^3$) выпускается из ковша в изложницу через отверстие диаметром d , мм. Определить время снижения уровня стали в ковше с H_1 до H_2 , мм, если средний диаметр ковша D , мм, (таблица 8.6).

Таблица 8.6

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	40	40	40	40	40	30	30	30	30	30
D	2500	2500	2500	2000	2000	2000	2000	2000	2000	2000
H_1	3850	3500	3000	4000	4000	3800	3800	3500	3000	2500
H_2	2200	2000	1400	0	500	1200	600	0	2500	1400

Задача 8.7 Определить время заполнения изложницы прямоугольного поперечного сечения размером $A \times B$, мм^2 , при сифонной разливке стали, если высота изложницы H , мм, уровень стали в центральной H_1 , мм, а диаметр отверстия в дне изложницы d , мм (таблица 33).

Таблица 33

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	150	150	200	250	200	250	150	200	300	300
B	150	200	250	400	200	350	180	400	300	450
H	1400	1600	1200	1700	1500	1600	1550	1620	1700	1750
H_1	1800	1800	2000	2000	2200	2200	2000	2500	2300	2400
d	25	30	25	30	30	40	35	35	40	30

Задача 8.8 Через горелку типа «труба в трубе» (рисунок 31) пропускают природный газ в количестве V_{Γ} , $\text{м}^3/\text{с}$. Воздух для сжигания газа подогревается до температуры T_B , $^{\circ}\text{C}$ и подводится через кольцевое пространство со скоростью U_B , м/с . Определить размеры горелки и необходимое давление воздуха, если давление газа перед горелкой p_{Γ} , Па, плотность газа $\rho_{\Gamma} = 0,85 \text{ кг/м}^3$. При расчете принять: коэффициенты скорости и расхода равны $\phi = \mu = 0,82$, плот-

ность воздуха при нормальных условиях $1,29 \text{ кг/м}^3$. Расход воздуха составляет 9 м^3 на 1 м^3 газа (таблица 34).

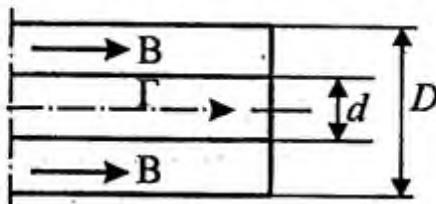


Рисунок 31

Таблица 8.8

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_{Γ}	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12
$T_{\text{В}}$	250	270	300	350	290	330	310	260	200	340
$U_{\text{В}}$	25	30	35	25	30	35	25	30	35	35
p_{Γ}	41	2300	4600	3800	2600	4500	2200	3400	4500	6000

Задача 8.9 Через круглое отверстие диаметром d , мм, расположенное на глубине H , м, от поверхности из резервуара в атмосферу вытекает вода (рисунок 32). Определить, во сколько раз изменяется расход воды при присоединении к отверстию: а - цилиндрической насадки того же диаметра, б - конически сужающейся и в - конически расширяющейся насадки. Избыточное давление в резервуаре равно p , кПа (таблица 8.9).

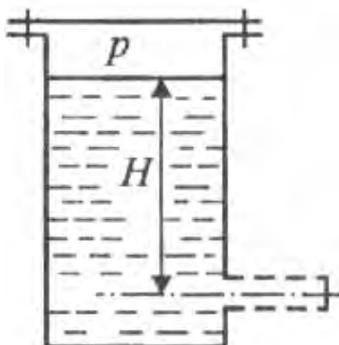


Рисунок 32

Таблица 8.9

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	35	40	45	50	55	60	65	70	75	70
H	0,5	0,8	0,7	0,9	1,0	1,2	1,6	1,4	1,8	1,3
p	100	150	200	160	300	180	220	190	250	500

9 Струйное движение газов. Особенности движения газа в печах и устройствах, приводящие его в движение

В промышленных установках, в частности, в металлургических печах, движение газа часто осуществляется в форме струй.

Турбулентная струя, распространяющаяся в неограниченном пространстве, т. е. вдали от твердых поверхностей, называется свободной турбулентной струей. Если при этом струя вытекает в пространство, заполненное неподвижной средой с теми же физическими свойствами, что и вытекающая жидкость, то такая струя называется затопленной.

Схема свободной затопленной струи показана на рисунке 33.

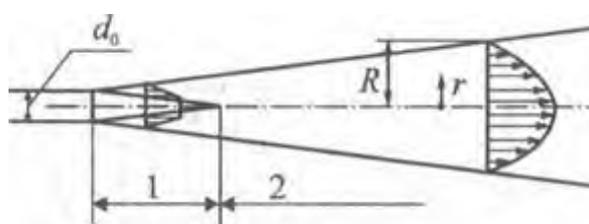


Рисунок 33

Вся длина струи делится на два характерных участка:

- 1 - начальный,
- 2 - основной.

Для круглых свободных затопленных турбулентных струй длина начального участка равна примерно $5 \cdot d_0$, где d_0 - диаметр выходного сечения сопла. На всем протяжении начального участка в приосевой области существует зона потенциального течения (потенциальное ядро), внутри которой скорость в каждой точке равна начальной скорости истечения газа.

По мере удаления от сопла в результате смешения струи с неподвижной окружающей средой последняя вовлекается в движение, струя расширяется и в ней образуется свободный (в отличие от пристеночного) турбулентный пограничный слой, начиная с конца начального участка он заполняет все сечение струи.

Отличительной особенностью основного участка является то, что профили скорости в поперечных сечениях струи на этом участке подобны и, построенные в безразмерных координатах, совпадают при наложении.

В результате подсоса окружающей среды массовый поток газа (количество газа, протекающего через сечение струи в единицу времени, кг/с) возрастает по мере удаления сечения от сопла. Экспериментально доказано, что при расширении границы струи остаются прямолинейными.

Поток массы через любое сечение струи рассчитывается по формуле:

$$M = \int_S \rho U dS.$$

Для круглой струи элемент площади поперечного сечения струи

$$dS = 2 \cdot \pi \cdot r dr$$

и

$$m = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R \rho U r dr,$$

где ρ - плотность газа, кг/м³;

U - продольная составляющая вектора скорости в точке на расстоянии r от оси, м/с;

R - радиус границы струи в данном сечении, м.

Объемный расход V жидкости через поперечное сечение струи может быть определен по эмпирической формуле

$$V = V_0 \cdot \left(0,332 \cdot \frac{x}{d_0} + 0,632 \right),$$

где V_0 - первоначальный расход жидкости, вытекающей из сопла, м³/с;

x - расстояние от среза сопла до выбранного сечения, м;

d_0 - диаметр выходного сопла, м.

Экспериментально доказано, что давление в любой точке внутри струи практически равно давлению в окружающем пространстве, т. е. на струю не действуют силы давления. Поскольку на границе струи скорость равна нулю, то на поверхности струи силы трения также отсутствуют. Следовательно, на свободную затопленную струю никакие внешние силы не действуют. Это позволяет сделать вывод о том, что на основании закона сохранения количества движения поток количества движения, переносимый движущейся жидкостью через поперечное сечение струи, остается постоянным по ее длине, т. е.

$$\int_S \rho U^2 dS = \text{const},$$

или, для круглой струи,

$$2 \cdot \pi \cdot \int_0^R \rho U^2 r dr = \text{const}.$$

Свойство безразмерных профилей скорости в поперечных сечениях основного участка струи совпадать при их наложении (свойство аффинности) позволяет подобрать одну универсальную зависимость для всех поперечных сече-

ний струи. В качестве наиболее распространенной используется формула Шлихтинга

$$\frac{U}{U_{\max}} = \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2, \quad (69)$$

где U - продольная скорость в точке сечения на расстоянии r от оси струи;
 U_{\max} - максимальная продольная скорость жидкости на оси струи.

Радиус R границы струи на основном участке определяется выражением

$$R = r_0 \cdot \left(0,44 \cdot \frac{x}{d_0} - 0,17 \right),$$

где r_0 - радиус выходного сечения сопла.

Формула Шлихтинга позволяет определить значение радиальной координаты $r_{0,5}$, при которой скорость равна половине осевой. Действительно, в формуле (8.1) принять

$$\frac{U}{U_{\max}} = 0,5, \text{ то } \frac{r_0}{R} = 0,44.$$

Как уже было сказано, на всем протяжении начального участка скорость движения жидкости на оси струи остается постоянной и равной начальной скорости U_0 истечения жидкости из сопла. На основном участке струи, истекающей из сопла конечного размера, максимальная скорость на оси уменьшается по мере увеличения расстояния от среза сопла по гиперболическому закону. Наиболее распространенной при расчетах изменения безразмерной осевой скорости в функции расстояния x от среза круглого сопла диаметром d_0 является формула Абрамовича

$$\frac{U}{U_{\max}} = \frac{10}{2} \cdot \frac{x}{d_0} + 0,57. \quad (70)$$

Средняя скорость истечения газа из сопла в дозвуковой области рассчитывается по формуле

$$U = \varphi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_0)}{\rho}}, \quad (71)$$

где φ - коэффициент скорости, для круглых сопел равен 0,82;

p_1 - абсолютное давление газа перед соплом, Па;

p_0 - давление окружающей атмосферы, Па;

ρ - плотность вытекающего воздуха, кг/м³.

При скоростях истечения, близких к скорости звука и выше, плотность газа не остается постоянной, и расчет скорости истечения ведется по формуле (адиабатное истечение)

$$U = \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]},$$

где k - показатель адиабаты;

$k = 1,4$ для двухатомных газов, в том числе и для воздуха;

$k = 1,3$ - для сжатого пара;

ρ_1 - плотность вытекающего газа перед соплом, кг/м³.

Пример. Из сопла диаметром 25 мм вытекает воздух в количестве 72 м³/ч в неограниченное пространство, заполненное воздухом той же температуры. Определить объемный расход подсосанного воздуха через сечение на расстоянии 320 мм от среза сопла, максимальную скорость на оси струи и скорость в точке сечения, удаленной на расстоянии 30 мм от оси струи.

Решение:

Площадь поперечного сечения сопла

$$S_0 = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (0,025)^2}{4} = 4,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Секундный расход воздуха через сопло

$$V = \frac{V'_0}{3600} = \frac{72}{3600} = 0,020 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Объемный расход воздуха через выбранное сечение струи

$$V = V'_0 \cdot \left(0,332 \cdot \frac{x}{d_0} + 0,632 \right) = 0,020 \cdot \left(0,332 \cdot \frac{320}{25} + 0,632 \right) = 0,098 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Объемный расход подсосанного воздуха

$$V' = V - U'_0 = 0,098 - 0,020 = 0,078 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Средняя скорость истечения воздуха из сопла

$$U_0 = \frac{V'_0}{SS_0} = \frac{0,020}{4,91 \cdot 10^{-4}} = 40,73 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Максимальная скорость на оси струи в выбранном сечении

$$\frac{U_{max}}{U_0} = \frac{10,21}{2 \cdot \frac{x}{d_0} + 0,57} = \frac{10,21}{2 \cdot \frac{320}{25} + 0,57} = 0,390,$$

откуда

$$U_{max} = U_0 \cdot 0,390 = 40,73 \cdot 0,390 = 15,89 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Радиус струи в выбранном сечении

$$R = r_0 \cdot \left(0,44 \cdot \frac{x}{d_0} - 0,17\right) = \frac{25}{2} \cdot \left(0,44 \cdot \frac{320}{25} - 0,17\right) = 68,27 \text{ мм.}$$

Скорость воздуха в выбранной точке сечения струи

$$\frac{U}{U_{max}} = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 = \left[1 - \left(\frac{30}{68,27}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 = 0,502 ,$$

откуда

$$U = U_{max} \cdot 0,502 = 15,89 \cdot 0,502 = 7,98 \text{ м/с .}$$

Задача 9.1 Для основного участка струи рассчитать и построить границу зоны, на которой для каждого сечения скорость равна половине скорости на оси. Диаметр сопла равен d_0 , мм (таблица 9.1).

Таблица 9.1

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Задача 9.2 Из двух сопел (рисунок 34) диаметром d_0 , мм, вытекает газ в виде струй. Определить расстояние H между осями сопел, при котором струи сливаются в точке A , удаленной от среза сопел на расстояние x/d_0 (таблица 9.2). В соответствующих сечениях определить, на каком расстоянии h будут находиться друг от друга точки, в которых отношение скоростей к максимальной скорости на оси равно 0,25; 0,50; 0,75.

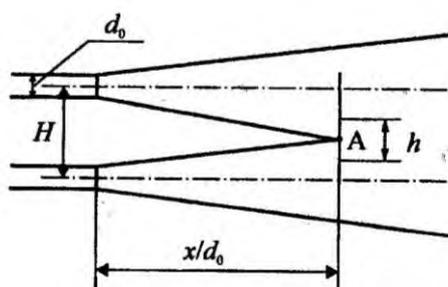


Рисунок 34

Таблица 9.2

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
x/d_0	8	8	8	12	12	12	20	20	25	30

Задача 9.3 Свободная струя вытекает из сопла диаметром d_0 , мм. Внутри области потенциального течения определить расстояние x от среза сопла, при котором диаметр зоны потенциального течения равен: $0,5r_0$; r_0 ; $1,5r_0$ (таблица 9.3).

Таблица 9.3

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Задача 9.4 Через круглое сопло диаметром d_0 , мм, за время t , мин, вытекает V_0 , м³, воздуха. Определить скорость на оси струи в точке на расстоянии x/d_0 от начала струи, считая начальный профиль струи равномерным (таблица 9.4).

Таблица 9.4

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_0	12	12	140	320	400	450	450	500	600	950
t	8	8	12	15	20	25	25	30	40	40
d_0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	6	8	10	8	9	12	8	8	12	8
x/d_0	15	16	12	15	12	20	20	18	16	15
	25	28	20	19	16	24	30	28	24	25

Задача 9.5 Через круглое сопло диаметром d_0 , мм, вытекает воздух в количестве V_0 , м³/с. На каком расстоянии от среза сопла расход газа через сечение увеличивается в n раз? Для этих расстояний определить расход подсосанного воздуха (таблица 9.5).

Таблица 9.5

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_0	10	15	20	25	40	35	50	65	80	100
V_0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,03	0,04	0,05	0,04	0,03	0,06
n	1,5	1,6	2,0	2,2	1,7	2,0	2,8	4,2	3,4	4,2

Задача 9.6 Скорость воздуха, вытекающего из сопла диаметром d_0 , мм, равна U_0 , м/с. Построить эпюру скоростей в сечении, расположенном на расстоянии x , мм, от среза сопла и определить расход воздуха через сечение (таблица 9.6).

Таблица 9.6

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_0	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
U_0	35	40	28	50	75	60	45	55	90	85
x	82	120	180	250	450	600	820	910	1200	1300

Задача 9.7 Определить диаметр переходного (от начального участка к основному) сечения круглой струи и количество подсосанного воздуха, проходящего через него, если скорость воздуха, выходящего из сопла диаметром d_0 , мм, равна U_0 , м/с, (таблица 9.7).

Таблица 9.7

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_0	15	30	45	60	70	90	85	35	40	25
U_0	35	40	31	28	44	26	62	45	50	38

Задача 9.8 Воздух при температуре $20\text{ }^\circ\text{C}$ вытекает в атмосферу ($P_0=101,3$ кПа) из круглого сопла диаметром d_0 , мм. Каково должно быть давление воздуха перед соплом, чтобы скорость на оси струи на расстоянии x , мм, от сопла была бы равна U_{\max} , м/с (таблица 9.8)?

Таблица 9.8

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_0	20	30	40	50	60	70	80	95	65	55
x	200	450	650	720	480	850	1100	780	1000	630
U_{\max}	5	8	9	3	2	4	2,4	2,1	2,5	3,4

Задача 9.9 Объемный расход воздуха, вытекающего из круглого сопла диаметром d_0 , мм, равен V_0 , м³/ч. Определить среднюю по сечению скорость струи на расстоянии x , мм, от среза сопла. Построить эпюру скоростей в данном сечении. Температуру вытекающего и окружающего воздуха принять равной 20 °С (таблица 9.9).

Таблица 9.9

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_0	25	30	35	40	45	50	60	70	65	75
V_0	36	45	108	115	140	200	300	250	180	250
x	250	300	280	240	300	400	600	600	550	750

10 Двухфазное течение в трубах и каналах

Рассмотренные в предыдущих главах закономерности справедливы для однородной среды. Во многих процессах металлургии и теплоэнергетики приходится иметь дело с двухфазными системами. В таких системах различают сплошную, или несущую, фазу и дисперсную фазу, распределенную в первой в виде отдельных включений. В первом (грубом) приближении динамические параметры таких потоков (потери давления и т. п.) можно оценить по ранее полученным уравнениям, однако для надежного решения инженерных задач целесообразно учитывать хотя бы основные особенности двухфазных систем.

10.1 Характеристики двухфазных потоков

Двухфазные системы классифицируются по агрегатному состоянию фаз, размерам частиц дисперсной фазы и характеру относительного движения фаз. Как сплошная, так и дисперсная фазы могут находиться в трех агрегатных состояниях: твердом, жидком и газообразном. Возможны различные сочетания агрегатных состояний сплошной и дисперсной фаз. Системы с подвижной (газообразной или жидкой) сплошной фазой можно подразделить на два типа:

- 1) с твердой дисперсной фазой,
- 2) с подвижной дисперсной фазой (жидкость или газ).

Системы первого типа встречаются в процессах, в которых участвуют запыленные потоки (такие системы называются аэрозольными системами или просто аэрозолями), при пневмо- и гидротранспорте (в этом случае их называют газовзвесьями), а также в процессах, осуществляемых в кипящем слое. Характерной особенностью таких потоков является то обстоятельство, что форма и масса частиц дисперсной фазы остаются практически неизменными, если не учитывать процессов коагуляции и дробления (измельчения) частиц при их трении друг о друга и о стенки коммуникаций и оборудования.

Системы второго типа образуются при барботаже газа через слой жидкости, при кипении и т.д. Характерной особенностью таких систем является то, что при движении элементы дисперсной фазы изменяют форму, а часто и массу.

Структура двухфазных потоков весьма разнообразна. Она определяется размерами и распределением элементов дисперсной фазы в сплошной среде и охватывает все возможные состояния между параллельным раздельным движением двух фаз, имеющих одну общую границу раздела, и смесями с достаточно однородным распределением дисперсной фазы (эмульсии, дымы, туманы, шламы и т. д.).

Случай, когда сплошная фаза твердая, относят обычно к особому течению - фильтрации жидкости или газа в твердом теле. Если исключить случай твердое тело - твердое и учесть, что два газа образуют однофазную систему, то все многообразие двухфазных течений можно свести к 7 вариантам комбинации фаз (таблица 10.1). Описание закономерностей движения двухфазных систем осложняется неоднородностью их состава и различием скоростей движения фаз. Для характеристики двухфазных потоков используются две группы параметров. К первой из них относятся расходные параметры, определяемые условиями материального баланса без учета особенностей относительного движения фаз, ко второй - истинные параметры двухфазной системы, определяемые с учетом относительного движения фаз. Важнейшими расходными характеристиками являются массовый расход M , равный сумме массовых расходов фаз

$$M = M_c + M_d$$

и удельный массовый расход, или массовая скорость

$$m = M/F, \quad (72)$$

где F - площадь поперечного сечения потока.

Индексами «с» и «д» обозначены величины, относящиеся к сплошной и дисперсной фазам соответственно.

Величины

$$\alpha = M_d/M; 1 - \alpha = M_c/M \quad (73)$$

представляют собой массовые расходные содержания, или массовые концентрации, дисперсной или сплошной фаз в двухфазном потоке, соответственно.

Таблица 10.1 - Виды двухфазных течений

Двухфазное течение	Вариант						
	1	2	3	4	5	6	7
Сплошная фаза	Газ	Газ	Жидкость	Жидкость	Жидкость	Твердое тело	Твердое тело
Дискретная фаза	Твердые частицы	Жидкость	Твердые частицы	Несмешивающаяся жидкость	Газовые пузыри	Жидкость	Газ

Объемный расход V зависит от плотностей фаз ρ_c и ρ_d :

$$V = V_c = V_d = \frac{M_c}{\rho_c} + \frac{M_d}{\rho_d}. \quad (74)$$

Объемные расходы фаз определяют их приведенные скорости $w_{пр.с}$ и $w_{пр.д}$, т. е. скорости, отнесенные ко всей площади поперечного сечения канала, в котором движется двухфазный поток:

$$w_{пр.с} = V_c/F; \quad w_{пр.д} = V_d/F \quad (75)$$

Приведенная скорость смеси $w_{пр}$ равна сумме приведенных скоростей фаз:

$$w_{пр} = w_{пр.с} + w_{пр.д} \quad (76)$$

Средняя скорость смеси $w_{см}$ равна отношению ее объемного расхода к площади поперечного сечения канала. Она равна приведенной скорости смеси, поскольку с учетом соотношений (74)-(76) имеем:

$$w_{см} = \frac{V}{F} = \frac{V_c + V_d}{F} = w_{пр.с} + w_{пр.д} = w_{пр}.$$

Связь приведенной скорости смеси с ее удельным расходом определяется выражением

$$w_{см} \rho = w_{пр} \rho = m. \quad (77)$$

Плотность смеси ρ , входящую в уравнение (77), можно выразить через плотности и массовые концентрации фаз:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1 - \alpha}{\rho_c} + \frac{\alpha}{\rho_d} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = (1 - \alpha)v_c + \alpha v_d, \quad (78)$$

где v_c и v_d - удельные объемы сплошной и дисперсной фаз соответственно, соответственно.

Истинные скорости движения фаз w_c и w_d определяются как такие скорости, которые имеет фаза с учетом занимаемого ею объема в общем объеме смеси, т. е.

$$w_c = \frac{w_{пр.с}}{1-\varphi}; w_d = \frac{w_{пр.д}}{\varphi}, \quad (79)$$

где φ - доля сечения канала, занятая дисперсной фазой, численно равная объемной концентрации этой фазы в двухфазной системе, т. е.

$$\varphi = V_d/V; 1 - \varphi = V_c/V. \quad (80)$$

Относительная скорость движения фаз $w_{дс}$:

$$w_{дс} = -w_{сд} = w_d - w_c = \frac{w_{пр.с}}{\varphi} - \frac{w_{пр.с}}{1-\varphi}. \quad (81)$$

Истинная плотность смеси $\rho_{см}$:

$$\rho_{см} = \rho_c(1 - \varphi) + \rho_d\varphi. \quad (82)$$

При исследовании движения двух фазных потоков полезными характеристиками являются разности истинных скоростей фаз и средней (или приведенной) скорости смеси, называемые скоростями дрейфа:

$$w_{сп} = w_c - w_{пр}; w_{дп} = w_d - w_{пр}, \quad (83)$$

а также приведенные скорости дрейфа, т. е. скорости дрейфа фаз, отнесенные ко всему поперечному сечению канала:

$$\overline{w_d} = \varphi(w_d - w_{пр}); \quad \overline{w_{сп}} = w_d - w_{пр}. \quad (84)$$

Заменяя в выражениях (84) $w_{сп}$ и w_d с помощью соотношений (79), а $w_{пр}$ с помощью уравнения (76), получаем

$$w_{дп} = \varphi \left(\frac{w_{пр.д}}{\varphi} - w_{пр.с} - w_{пр.д} \right) = w_{пр.д}(1 - \varphi) - \varphi w_{пр.с} = -w_{сп}, \quad (85)$$

то есть приведенные скорости дрейфа фаз равны по величине и противоположны по знаку.

Подстановка значений $w_{пр}$ из (76) и $w_{пр.с}$, $w_{пр.д}$ из (79) в соотношение (84) дает

$$\overline{w_{дп}} = \varphi(1 - \varphi)w_{дс}; \quad \overline{w_{сп}} = \varphi(1 - \varphi)w_{сд},$$

или, с учетом (81),

$$w_{\partial n} = \varphi(1 - \varphi)w_{\partial c}; w_{cn} = \varphi(1 - \varphi)w_{cd}. \quad (86)$$

Анализ закономерностей движения двухфазных систем основывается на использовании ранее приведенных уравнений неразрывности потока (напомним, что в данной главе рассматриваются только одномерные движения), баланса количества движения и энергетического баланса, применяемых ко всему потоку в целом и к каждой из фаз в отдельности. В общем случае характеристики движущейся двухфазной системы изменяются по длине канала, а также из-за фазовых превращений. Поэтому указанные уравнения применяются в дифференциальной форме:

уравнение неразрывности потока

$$\frac{d}{dx}(wF\rho) = 0; \quad (87)$$

уравнение баланса количества движения (импульса)

$$-F \frac{dp}{dx} = M \frac{dw}{dx} + \Pi\tau_0 + Fg\rho \sin\beta; \quad (88)$$

уравнение энергетического баланса

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dA}{dx} = M \frac{d}{dx} \left(i + \frac{w^2}{2} + gx \sin\beta \right). \quad (89)$$

Здесь w - скорость; ρ - плотность; F - площадь поперечного сечения канала; Π - смоченный периметр канала; τ_0 - касательное напряжение на стенке (напряжение трения на стенке); β - угол наклона канала к горизонту; Q - количество подводимой теплоты; A - механическая работа, производимая движущейся средой; i - энтальпия; x - расстояние в направлении движения.

Если уравнения (87)-(89) применяются к двухфазной системе в целом, то w и ρ - средняя скорость и плотность системы в рассматриваемом сечении канала. Если же уравнения применяются к отдельной фазе, то все величины относятся к этой фазе.

Уравнение (88) показывает, что изменение давления по длине канала формируется изменением скорости движения, трением о стенку и подъемом жидкости или газа, требующим преодоления сил земного тяготения. Изменение скорости движения в соответствии с уравнением (87) обуславливается изменением плотности потока и площади поперечного сечения канала. Плотность же

двухфазной системы является функцией давления и объемной концентрации дисперсной фазы φ . Величина φ изменяется из-за фазовых превращений, происходящих при подводе (или отводе) энергии к системе. Это обстоятельство отражается уравнением (87). В инженерных расчетах обычно требуется найти изменение давления по длине канала.

Из (89) имеем

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{M}{F} \frac{dw}{dx} + \frac{\Pi}{F} \tau_0 + gp \sin\beta. \quad (90)$$

Для количественного описания закономерностей движения неоднородных по структуре потоков используются различные модели движения, имеющие примерно одинаковое экспериментальное обоснование.

10.2 Модель гомогенного течения

Модель гомогенного течения основана на том, что двухфазная система рассматривается как псевдооднородная жидкость, к которой применимы обычные законы гидродинамики. В общем случае, вследствие различия скоростей, температур и других параметров состояния системы, между фазами происходит взаимный обмен количеством движения, энергией и массой. Если эти процессы протекают достаточно быстро, как чаще всего и бывает при небольших размерах дисперсных включений, то принимают, что между фазами устанавливается термодинамическое равновесие.

В гомогенной модели принимается, что сплошная и дисперсная фазы перемещаются с одинаковой скоростью, равной средней скорости смеси, определяемой из выражения (77). Входящая в это выражение плотность смеси при равенстве скоростей фаз определяется исходя из того, что удельный объем смеси v является аддитивной функцией удельных объемов фаз смеси, т. е. используются соотношения (78). С учетом этого соотношения скорость движения смеси будет описываться выражением

$$w_{cp} = \frac{m}{\rho} = m[\alpha v_d + (1 - \alpha)v_c] = m(v_c + \alpha v_{cd}),$$

где $v_{cd} = v_d - v_c$ - изменение объема при фазовом превращении сплошной фазы в дисперсную.

Поскольку $w_{cp} = G/(F\rho)$, то изменение давления вследствие ускорения потока равно

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_y = \frac{G}{F} \frac{dw}{dx} + \frac{G}{F} \frac{d}{dx} \left(\frac{G}{F\rho}\right) = m \frac{d}{dx} \left(\frac{G}{F\rho}\right).$$

В общем случае по длине канала изменяются давление, массовая концентрация дисперсной фазы (при наличии фазовых превращений), а также площадь поперечного сечения. Выражая плотность через объемы с помощью (78) и проводя дифференцирование, получаем

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_y = m^2 \left[v_{cd} \frac{d\alpha}{dx} + \alpha \frac{dv_d}{dx} + (1 - \alpha) \frac{dv_c}{dx} - (v_c + \alpha v_{cd}) \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} \right].$$

Изменение удельных объемов фаз по высоте обусловлено изменением давления в направлении движения. Поэтому последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_y = m^2 \left\{ v_{cd} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{dp}{dx} \left[\alpha \frac{dv_d}{dp} + (1 - \alpha) \frac{dv_c}{dp} \right] - (v_c + \alpha v_{cd}) \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} \right\}. \quad (91)$$

Первое слагаемое правой части уравнения (91) характеризует влияние фазового превращения, второе - сжимаемость среды при изменении давления, третье - изменение сечения канала на падение давления, обусловленное ускорением потока.

Изменение давления за счет трения $(dp/dx)_{тр} = (\Pi/F) \tau_0$ можно выразить через скорость движения потока с помощью соотношения $\tau_0 = \lambda(\rho w^2/8)$, где λ - гидравлический коэффициент трения.

Для круглого канала диаметром D имеем $\Pi = \pi D$, $F = \pi D^2/4$ и с учетом (77)

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{тр} = \frac{\Pi}{F} \tau_0 = \lambda \rho \frac{w_{пп}^2}{2D} = \frac{\lambda m^2}{2D\rho}.$$

Заменяя ρ с помощью (78), получаем

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_{тр} = \frac{\lambda m^2}{2D\rho} (v_c + \alpha v_{cd}). \quad (92)$$

Величину $g\rho \sin\beta$, входящую в уравнение (90) и определяющую градиент давления за счет силы тяжести (dp/dx) , можно записать с учетом (78) следующим образом:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)_m = g\rho \sin\beta = \frac{g\sin\beta}{v_c + \alpha v_{cd}}. \quad (93)$$

Подстановка выражений (91)-(93) в (90) после преобразований дает

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\lambda \frac{m^2}{2D} (v_c + \alpha + v_{cd}) + m^2 v_{cd} \frac{d\alpha}{dx} - m^2 (v_c + \alpha v_{cd}) \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{g\sin\beta}{v_c + \alpha v_{cd}}}{1 + m^2 \left[\alpha \frac{dv_d}{dx} + (1 - \alpha) \frac{dv_c}{dx} \right]}. \quad (94)$$

Слагаемые в числителе уравнения (94) учитывают, соответственно, вклад трения, изменения массовой концентрации дисперсной фазы в направлении потока, изменения площади поперечного сечения канала, а также вклад силы тяжести в градиент давления. Выражение, стоящее в квадратных скобках знаменателя, обратно пропорционально скорости распространения упругих колебаний в двухфазной среде (скорости звука). Поэтому уравнение (94) можно представить в виде

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{m^2 \left[\frac{\lambda}{2D} (v_c + \alpha v_{cd}) \frac{d\alpha}{dx} - (v_c + \alpha v_{cd}) \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} \right] + \frac{g\sin\beta}{v_c + \alpha \cdot v_{cd}}}{1 - Ma^2}, \quad (95)$$

где $Ma = w_{cp}/w_3$ - число Маха, определяющее отношение скорости потока к скорости распространения упругих колебаний.

Величина w_3 равна

$$w_3 = \left\{ -p^2 \left[\alpha \frac{dv_d}{dp} + (1 - \alpha) \frac{dv_c}{dp} \right] \right\}^{-1/2}.$$

При определении производной da/dx необходимо учитывать, что массовая концентрация дисперсной фазы (например, пара в парожидкостной смеси) изменяется по высоте как за счет изменения энтальпии i , вызванного подводом теплоты извне, так и за счет изменения температуры, обусловленного изменением давления. Поэтому

$$\frac{d\alpha}{dx} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial i}\right)_p \frac{di}{dx} + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)_i \left(\frac{\partial t}{\partial p}\right)_i \frac{dp}{dx}. \quad (96)$$

Связь между величинами i и α определяется соотношением

$$i=(1-\alpha) i_c+\alpha i_d = i_c+\alpha i_{cd}, \quad (97)$$

где i_c и i_d - энтальпии сплошной и дисперсной фаз при заданном давлении (температуре) соответственно;

i_{cd} - изменение энтальпии при фазовом превращении сплошной фазы в дисперсную.

Отсюда

$$\frac{\partial i}{\partial \alpha} = i_d - i_c, \text{ или } \frac{\partial \alpha}{\partial i} = \frac{1}{i_d - i_c} = \frac{1}{i_{cd}}.$$

Для системы жидкость - пар i_{cd} - теплота парообразования.

Производная $(\partial t/\partial p)_i$ находится из уравнения состояния $f(p, \rho, T)=0$. Производная $(\partial \alpha/\partial t)_i$ выражает изменение массовой концентрации дисперсной фазы, обусловленной изменением температуры при адиабатических условиях. Для систем жидкость - пар эта производная характеризует вклад процесса самоиспарения - парообразования, происходящего при адиабатическом понижении температуры кипения, вызванного понижением давления. С учетом (96) уравнение (95) принимает вид:

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{m^2 \left[\frac{\lambda}{2D} (v_c + \alpha v_{cd}) + v_{cd} \frac{d\alpha}{dx} - (v_c + \alpha v_{cd}) \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} \right] + \frac{g \sin \beta}{v_c + \alpha v_{cd}}}{1 + m^2 \left[\alpha \frac{dv_d}{dp} + (1 - \alpha) \frac{dv_c}{dp} + v_{cd} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)_i \left(\frac{\partial t}{\partial p} \right)_i \right]}. \quad (98)$$

Значения v_c и v_{cd} , а также производные удельных объемов фаз по давлению, входящие в приведенные выше уравнения, находятся по диаграммам или уравнениям состояния компонентов. Коэффициент трения рассчитывается по обычным формулам для однофазного потока. При этом для расчета числа Рейнольдса вводятся средняя скорость двухфазного потока и эффективная вязкость смеси, под которой понимается вязкость однородной жидкости с такими же реологическими характеристиками, как у смеси.

Вследствие движения сплошной фазы относительно частиц дисперсной фазы скорость деформации сплошной фазы вблизи частицы оказывается больше, чем вдали от нее. Поэтому диссипация энергии в двухфазном потоке превышает диссипацию энергии в однородной жидкости, образующей сплошную фазу, даже если вязкость и плотность последней выше, чем у дисперсной фазы. Теоретический расчет диссипации энергии в сплошной фазе, окружающей твердую сферическую частицу, приводит к выражению

$$\varepsilon_v = 2\eta_c K^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^3 - \frac{12}{5} \left(\frac{r}{R} \right)^6 + 12 \left(\frac{r}{R} \right)^8 - 6 \left(\frac{r}{R} \right)^{10} \right],$$

где ε_v - диссипированная энергия, приходящаяся на единицу объема потока;

r - радиус частицы;

R - радиус сферического объема потока, приходящегося на одну частицу (радиус ячейки);

K^2 - сумма квадратов компонентов тензора скоростей деформации сплошной фазы;

η_c - коэффициент динамической молекулярной вязкости сплошной среды.

Величина $(r/R)^3$ представляет собой объемную концентрацию дисперсной фазы φ . При малых значениях φ , т. е. для не очень концентрированных суспензий или газовзвесей, в последней формуле можно пренебречь слагаемыми, содержащими r/R в степенях, превышающих 3. Тогда

$$\varepsilon_v = 2\eta_c K^2 \left(1 + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Для дисперсной фазы, состоящей из сферических частиц, независимо от агрегатного состояния фаз методами статистической механики получено следующее выражение для определения эффективной вязкости смеси:

$$\eta = \eta_c \left(1 + 2,5\varphi \frac{\eta_d + 0,4\eta_c}{\eta_d + \eta_c} \right), \quad (99)$$

где η_d - коэффициент молекулярной динамической вязкости дисперсной фазы.

Отсюда для случая твердых частиц дисперсной фазы ($\eta_d \gg \eta_c$) получается формула Эйнштейна:

$$\eta = \eta_c (1 + 2,5\varphi), \quad (100),$$

а для газовых пузырьков ($\eta_c \gg \eta_d$)

$$\eta = \eta_c (1 + \varphi). \quad (101)$$

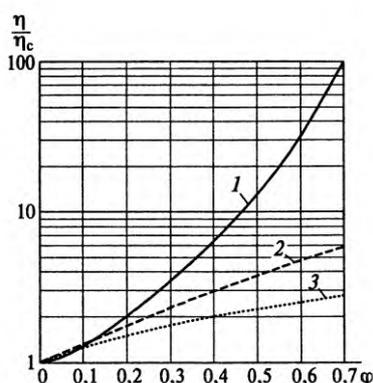
Приведенные формулы хорошо согласуются с экспериментальными данными для двухфазных систем с однородными сферическими частицами при их концентрации $\varphi \leq 10\%$. В качестве примера на рисунке 35 приведено сопоставление формулы Эйнштейна и экспериментальных значений вязкости суспензий,

полученных различными авторами для широкого диапазона жидкостей, размеров и материалов твердых частиц (данные собраны Д. Томасом). Здесь же приведена кривая, полученная теоретически Дж. Бэтчелором:

$$\eta = \eta_c(1 + 2,5\varphi + 6,2\varphi^2). \quad (102)$$

Для области малых концентраций формула Эйнштейна подтверждается и в случае полидисперсной твердой фазы. В концентрированных системах, как можно видеть из данных на рисунке 35, эффективная вязкость больше рассчитанной по формуле (99). Такие системы нельзя рассматривать как ньютоновские жидкости.

Эффективная вязкость двухфазных потоков в случае частиц неправильной формы зависит от их ориентации в потоке.



1 - по экспериментальным данным; 2 - по формуле (102);

3 - по формуле Эйнштейна

Рисунок 35 - Зависимость эффективной вязкости суспензий от объемной концентрации частиц дисперсной фазы

Эта величина может быть рассчитана по формуле

$$\eta = \eta_c(1 + k\varphi),$$

где k - коэффициент, определяемый в зависимости от формы частиц следующим образом.

Для частиц, имеющих форму эллипсоида вращения с отношением полуосей $a/b = p$ (полуось $a > b$ и ориентирована в направлении потока):

при $1 < p < 1,7$

$$k = 2,5 \left[1 - 0,28 \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right];$$

при $p \gg 1$

$$k = 2 \left(1 + \frac{1}{2p^2} \right).$$

Таким образом, для вытянутых частиц ($p \rightarrow \infty$) значение k приближается к 2. Следовательно, увеличение вязкости двухфазных систем по сравнению с вязкостью сплошной фазы колеблется от $2,5\varphi\eta_c$ для сферических частиц до $2\varphi\eta_c$ для вытянутых частиц.

Использование эффективной вязкости при определении коэффициентов трения дает приемлемые результаты в случае ламинарного режима течения. При турбулентном режиме из-за больших скоростей деформаций лучшие результаты получаются, когда применяется число Рейнольдса, рассчитываемое по предельной вязкости при больших скоростях сдвига.

Пример 10.1. Смесь воздух-вода течет по гладкой горизонтальной трубе (внутренний диаметр 20 мм). Массовая скорость смеси $1791 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, а массовая концентрация воздуха (дисперсной фазы) = 0,001. Физические свойства сред: $\nu_d = 0,84 \text{ м}^3/\text{кг}$; $\nu_c = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг}$; $\eta_d = 1,789 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$; $\eta_c = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$. Коэффициент гидравлического трения для однофазного течения задается формулой $\lambda = 0,186/\text{Re}^{0,2}$. Требуется определить параметры потока, а также градиент давления в трубе.

Находим массовый расход смеси, а затем массовые расходы воздуха и воды:

$$\begin{aligned} M &= mF = (\pi d^2/4)m = 3,14 \cdot 0,02^2 \cdot 1791/4 = 0,5624 \text{ кг/с}; \\ M_d &= aM = 0,001 \cdot 0,5624 = 5,624 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с}; \\ M_c &= (1 - a)M = 0,999 \cdot 0,5624 = 0,5618 \text{ кг/с}. \end{aligned}$$

Плотности компонентов находятся из соотношения $\rho = 1/\nu$ и, тогда $\rho_d = 1/0,84 = 1,1905 \text{ кг/м}^3$; $\rho_c = 1/1 \cdot 10^{-3} = \text{кг/м}^3$. Следовательно, объемные расходы компонентов составляют:

$$\begin{aligned} V_d &= M_d/\rho_d = 5,624 \cdot 10^{-4}/1,1905 = 4,724 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}; \\ V_c &= M_c/\rho_c = 5,618 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}. \end{aligned}$$

Приведенные скорости фаз равны:

$$\begin{aligned} w_{\text{пр.а}} &= V_d/F = 4,724 \cdot 10^{-4}/0,000314 = 1,504 \text{ м/с}; \\ w_{\text{пр.с}} &= V_c/F = 5,618 \cdot 10^{-4}/0,000314 = 1,789 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Приведенная скорость смеси (она же средняя скорость) составит

$$w_{\text{пр}} = w_{\text{ср}} = w_{\text{пр.д}} + w_{\text{пр.с}} = 1,504 + 1,789 = 3,293 \text{ м/с}.$$

Плотность смеси

$$\rho = 1/[(1 - a)\nu_c + a\nu_d] = 1/(0,999 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 0,001 \cdot 0,84) = 543,77 \text{ кг/м}^3.$$

Для определения значений истинных скоростей компонентов найдем их объемные концентрации (доли):

$$\varphi = V_d/V = 4,724 \cdot 10^{-4} / (4,724 \cdot 10^{-4} + 5,618 \cdot 10^{-4}) = 0,4568; 1 - \varphi = 0,5432.$$

Тогда истинные скорости компонентов будут равны

$$w_d = w_{пр.д} / \varphi = 1,504 / 0,4568 = 3,2925 \text{ м/с};$$

$$w_c = w_{пр.с} / (1 - \varphi) = 1,789 / 0,5432 = 3,3934 \text{ м/с}.$$

Поскольку эти скорости практически совпадают с приведенной (средней) скоростью смеси, то скорости дрейфа фаз, как таковые, отсутствуют.

Эффективную вязкость смеси найдем по формуле (99):

$$\eta = 1,002 \cdot 10^{-3} \left(1 + 2,5 \cdot 0,4568 \frac{1,789 \cdot 10^{-5} + 0,4 \cdot 1,002 \cdot 10^{-3}}{1,789 \cdot 10^{-5} + 1,002 \cdot 10^{-3}} \right)$$

$$= 1,4718 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Средняя скорость $w_{cp} = m / \rho = 1791 / 543,77 = 3,294 \text{ м/с}$.

Число Рейнольдса потока

$$Re = \rho w_{cp} d / \eta = 543,77 \cdot 3,294 \cdot 0,02 / 1,4718 \cdot 10^{-3} = 24340.$$

Гидравлический коэффициент трения

$$\lambda = 0,186 / Re^{0,2} = 0,186 / 24340^{0,2} = 0,0247.$$

В данном случае изменение давления обусловлено только потерями энергии на преодоление сил трения, поэтому

$$\left(\frac{dp}{dx} \right)_{тр} = \lambda \frac{\rho w_{cp}^2}{2d} = 0,0247 \frac{543,77 \cdot 3,294^2}{2 \cdot 0,02} = 3639,3 \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

10.3 Модель раздельного течения

В модели раздельного течения принимается, что фазы движутся раздельно, а взаимодействие между ними происходит на границе раздела. Эта модель имеет физический смысл для систем, в которых обе фазы подвижны (системы жидкость-газ и жидкость-жидкость). При подробном анализе движения двухфазной системы на основе модели раздельного течения уравнения неразрывности потока, а также балансов количества движения и энергии записываются для каждого компонента, и эти шесть уравнений решаются совместно с уравнениями, описывающими закономерности взаимодействия фаз на границе между ними и со стенками канала. В рассматриваемой ниже упрощенной модели уравнения применяются к системе в целом, как и в модели гомогенного течения, но учитывается различие скоростей движения фаз. Для использования этих уравнений нужно входящие в них величины выразить через соответствующие величины для образующих систему фаз. Скорость смеси находится по правилу аддитивности:

$$w = a w_d + (1 - a) w_c,$$

а плотность смеси - по соотношению (81). Таким образом, уравнение баланса количества движения (87) для канала круглого сечения ($\Pi = \pi D$, $F = kD^2/4$) приобретает вид

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{4\tau_0}{D} + m \frac{d}{dx} [\alpha w_d + (1 - \alpha)w_c] + [\varphi\rho_d + (1 - \alpha)\rho_c]g \sin\beta. \quad (103)$$

Уравнение баланса энергии (88) преобразуется с учетом того, что изменение количества теплоты пропорционально изменению энтальпии, а изменение работы зависит от изменения кинетической энергии фаз, пропорциональной квадрату скоростей их движения. Поэтому, учитывая (97), уравнение баланса энергии (88) можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{M} \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dA}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (i_c + ai_{cd}) + \frac{d}{dx} \left[a \frac{w_d^2}{2} + (1 - a) \frac{w_c^2}{2} \right] + g \sin\beta. \quad (104)$$

Для решения системы уравнений (86), (87) и (104) необходимо располагать зависимостями, описывающими связь термодинамических свойств с параметрами состояния, а также соотношениями, выражающими напряжение на стенке τ_0 и объемное содержание дисперсной фазы φ в зависимости от расходов фаз, их свойств и геометрических характеристик канала.

Для определения напряжения на стенке, которое пропорционально градиенту давления, обусловленному трением $(dp/dx)_{тр}$, в модели раздельного течения вводятся корреляционные параметры Φ_c^2 и Φ_d^2 (так называемые параметры двухфазности)

$$\Phi_c^2 = \frac{(dp/dx)_{тр}}{(dp/dx)_c}; \quad \Phi_d^2 = \frac{(dp/dx)_{тр}}{(dp/dx)_d}. \quad (105)$$

Здесь $(dp/dx)_{тр} = 4\tau_0/D$ — градиент давления, обусловленный трением двухфазного потока в трубе, а $(dp/dx)_c$ и $(dp/dx)_d$ - градиенты давления при движении в той же трубе и с тем же массовым расходом одной сплошной или одной дисперсной фазы соответственно.

При отсутствии дисперсной фазы $1/\Phi_d^2 = 0$ и $\Phi_c^2 = 1$, а при движении одной лишь жидкости, образующей дисперсную фазу, $1/\Phi_c^2 = 0$ и $\Phi_d^2 = 1$. Градиенты давления при движении в канале однородной жидкости можно выразить при помощи соотношений

$$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_c = \frac{\lambda_c \rho_c w_{пр.с}^2}{2D}; \quad -\left(\frac{dp}{dx}\right)_д = \frac{\lambda_d \rho_d w_{пр.д}^2}{2D},$$

где λ_c и λ_d - гидравлические коэффициенты трения для однофазных потоков сплошной и дисперсной фаз соответственно.

Параметры двухфазности Φ_c^2 и Φ_d^2 являются функциями структуры потока и физических свойств фаз. Простейшая модель, используемая для установления вида этих функций, основана на представлении, что обе фазы движутся в двух отдельных цилиндрах диаметрами D_c и D_d , причем суммарная площадь поперечного сечения этих цилиндров равна площади поперечного сечения трубы диаметром D по которой движется двухфазная смесь. Принимается также, что градиенты давления в каждом цилиндре обусловлены только трением и численно равны градиенту давления в реальном потоке. Значения градиентов давления рассчитываются по уравнениям, используемым для однофазных потоков.

Согласно изложенным представлениям, объемная концентрация компонентов в двухфазной системе определяется выражениями

$$\varphi = D_d^2/D^2; \quad 1 - \varphi = D_c^2/D^2, \quad (106)$$

а градиент давления, обусловленный трением, находится по уравнению

$$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_{тр} = \frac{\lambda_c \rho_c w_c^2}{2D_c} = \frac{\lambda_d \rho_d w_d^2}{2D_d}.$$

Величины w_c и w_d можно с помощью (69) выразить через приведенные скорости фаз, а D_c и D_d помощью (106) - через диаметр трубы D . Получаем

$$-\left(\frac{dp}{dx}\right)_{тр} = \frac{\lambda_d \rho_d w_{пр.д}^2}{2D} \frac{1}{\varphi^{5/2}} = -\left(\frac{dp}{dx}\right)_c = \frac{\lambda_c \rho_c w_{пр.с}^2}{2D} \frac{1}{(1 - \varphi)^{5/2}}. \quad (107)$$

В этом выражении $\frac{\lambda_d \rho_d w_{пр.д}^2}{2D} = -\left(\frac{dp}{dx}\right)_д$ и $\frac{\lambda_c \rho_c w_{пр.с}^2}{2D} = -\left(\frac{dp}{dx}\right)_c$ - градиенты давления, обусловленные трением при движении в трубе только дисперсной или только сплошной фаз соответственно. Следовательно, согласно (105),

$$\Phi_d^2 = 1/\varphi^{5/2}; \quad \Phi_c^2 = 1/(1 - \varphi)^{5/2}. \quad (108)$$

Исключив из формул (108) объемную концентрацию дисперсной фазы φ , имеем

$$\left(\frac{1}{\Phi_d^2}\right)^{2/5} + \left(\frac{1}{\Phi_c^2}\right)^{2/5} = 1. \quad (109)$$

Этому уравнению придают более общую форму

$$\left(\frac{1}{\Phi_d^2}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{\Phi_c^2}\right)^{1/n} = 1. \quad (110)$$

Значение n можно найти по опытным данным. Сопоставление с опытными данными показывает, что для системы жидкость—газ удовлетворительные результаты для всех режимов движения получаются при $n = 3,5$.

Чтобы исключить неизвестный градиент давления $(dp/dx)_{тр}$ из выражений (105), вводится новая переменная X^2 , равная отношению корреляционных параметров Φ_c^2 и Φ_d^2 :

$$X^2 = \frac{\Phi_d^2}{\Phi_c^2} = \frac{(dp/dx)_c}{(dp/dx)_d}. \quad (111)$$

Используя правую часть выражения (107), с учетом определения (111) получаем

$$\varphi = (1 + X^{0,8})^{-1}. \quad (112)$$

Расчет с помощью приведенных уравнений гидравлического сопротивления изотермических потоков без учета ускорения, вызываемого изменением объема вследствие изменения давления, состоит в том, что по заданным диаметру трубы, расходам и свойствам фаз определяются значения $w_{пр,с}$ и $w_{пр,д}$, а также $(dp/dx)_c$ и $(dp/dx)_д$. Затем из соотношения (111) находится X , а по формуле (112) рассчитывается объемная концентрация дисперсной фазы φ . Далее по формуле (109) вычисляется Φ_d^2 и из соотношения (106) находится градиент $(dp/dx)_{тр}$. Разность давлений на концах трубы определяется как произведение градиента давления на длину трубы. Если труба вертикальная или наклонная, то дополнительно рассчитывается падение давления под действием силы тяжести по формуле

$$\Delta p_T = - \left(\frac{dp}{dx}\right)_T L = g\rho_{см} L \sin\beta,$$

где L — длина трубы.

Описанная упрощенная модель раздельного течения не учитывает влияния взаимодействия фаз на границе раздела и реальные условия движения двухфазной системы. В действительности граница раздела между фазами не является гладкой, а сами фазы не всегда можно рассматривать как однородные из-за их диспергирования. Для получения более точных результатов используют эмпирические соотношения, приводимые в специальной литературе.

Изменение массовой концентрации дисперсной фазы по длине трубы da/dx определяется с помощью уравнения энергетического баланса (104). Производная $(\partial\varphi/\partial\alpha)_p$ выражает изменение объемной концентрации дисперсной фазы с изменением ее массовой концентрации при постоянном давлении, а производная $(\partial\varphi/\partial p)_\alpha$ — изменение объемной концентрации дисперсной фазы с изменением давления. Значения этих производных определяются по опытным данным, например с помощью эмпирической формулы (112). Во многих частных случаях уравнение (104) упрощается. Так, при постоянном тепловом потоке q по длине трубы и отсутствии механической работы $da/dx = 4q/(Dm_{сд})$.

Пример 10.2 Для условий примера 10.1 определить параметры двухфазности и градиент давления смеси.

Решение: Выпишем из условий примера 10.1 исходные данные: $\eta_d = 1,789 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$; $\eta_c = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$, а также необходимые результаты расчетов: $\rho_d = 1,1905 \text{ кг/м}^3$; $w_{пр.д} = 1,504 \text{ м/с}$; $\rho_c = 1000 \text{ кг/м}^3$; $w_{пр.с} = 1,789 \text{ м/с}$.

По приведенным скоростям фаз и по их свойствам рассчитываем числа Рейнольдса фаз:

$$Re_d = 1,1905 \cdot 1,504 \cdot 0,02 / 1,789 \cdot 10^{-5} = 2001,69;$$

$$Re^c = 1000 \cdot 1,789 \cdot 0,02 / 1,002 \cdot 10^{-3} = 35708,58,$$

а затем и гидравлические коэффициенты трения:

$$\lambda_d = 0,186 / Re_d^{0,2} = 0,186 / 2001,69^{0,2} = 0,04067;$$

$$\lambda_c = 0,186 / Re_c^{0,2} = 0,186 / 35708,58^{0,2} = 0,02285.$$

Градиенты давления в «чистых» фазах при их одиночном движении составят

$$(dp/dx)_a = \frac{\lambda_d \rho_d w_{пр.д}^2}{2D} = 0,04067 \cdot 1,1905 \cdot 1,504^2 / (2 \cdot 0,02) = 2,738 \text{ Па/м};$$

$$(dp/dx)_c = \frac{\lambda_c \rho_c w_{пр.с}^2}{2D} = 0,02285 \cdot 1000 \cdot 1,789^2 / (2 \cdot 0,02) = 1828,62 \text{ Па/м}.$$

Параметр X равен

$$X^2 = \frac{(dp/dx)_c}{(dp/dx)_d} = \frac{1828,62}{2,738} = 667,923; X = 25,844.$$

По формуле (112) находим

$$\varphi = (1 + X^{0,8})^{-1} = (1 + 25,844^{0,8})^{-1} = 0,069.$$

Тогда по соотношениям (109) получаем

$$\Phi_d^2 = 1/\varphi^{2,5} = 1/0,069^{2,5} = 798,74;$$

$$\Phi_c^2 = 1/(1 - \varphi)^{2,5} = 1/0,931^{2,5} = 1,196;$$

Наконец, по выражениям (110) вычисляем градиент давления смеси:

$$(dp/dx)_{тр} = (dp/dx)_d \cdot \Phi_d^2 = 2,738 \cdot 798,74 = 2186,7 \text{ Па}\cdot\text{с};$$

$$(dp/dx)_{тр} = (dp/dx)_c \cdot \Phi_c^2 = 1,196 \cdot 1828,62 = 2186,7 \text{ Па}\cdot\text{с}.$$

10.4 Модель потока дрейфа

Разновидностью модели отдельного течения является модель потока дрейфа. Она отличается от описанной выше модели отдельного течения тем, что рассматривается только относительное движение фаз. Модель потока дрейфа используется при исследовании потоков газожидкостных смесей и взвесей твердых частиц в жидкости или газе. Свойства таких систем часто определяются не относительными расходами фаз, а размерами частиц дисперсной фазы и их объемным содержанием. Метод расчета параметров движения двухфазного потока основывается на определении приведенной скорости дрейфа $\overline{w}_{дп} = -\overline{w}_{сп}$ (84)). Эта величина равна разности скорости движения каждого компонента и средней скорости смеси. Поскольку приведенные скорости движения фаз, согласно (75), зависят лишь от их расхода и площади поперечного сечения канала, то приведенная скорость дрейфа в соответствии с (85) является функцией только объемной концентрации дисперсной фазы φ и свойств системы. Если скорости движения сплошной и дисперсной фаз одинаковы (это возможно при одинаковых плотностях фаз или при очень малых размерах частиц, как, например, в аэрозолях),

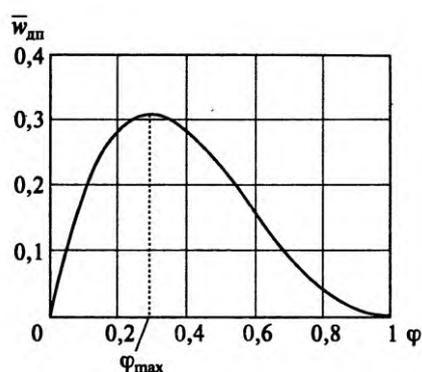


Рисунок 36 - Зависимость приведенной скорости дрейфа от объемной концентрации дисперсной фазы

то приведенная скорость дрейфа равна нулю. Это вытекает из определения А3.9) и выражения (86). Из (86) следует, что $\overline{w}_{дп} = 0$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = 1$. Таким образом, если плотности фаз различны, то $\overline{w}_{дп} \neq 0$ и зависимость $\overline{w}_{дп} = f(\varphi)$ изображается кривой, характерный вид которой показан на рисунке 36 для сис-

темы, в которой скорость движения дисперсной фазы больше скорости сплошной фазы. При значении φ_{\max} частицы дисперсной фазы приходят в соприкосновение, и дальнейшее увеличение φ обуславливает уменьшение приведенной скорости дрейфа. Значение φ_{\max} зависит от формы и размеров частиц, а также от характера сил взаимодействия между ними. Точка φ_{\max} соответствует обращению системы. При $\varphi > \varphi_{\max}$ дисперсная фаза становится сплошной, а сплошная - дисперсной. Очевидно, такое обращение фаз возможно, если обе они подвижны. Для систем жидкость—твердые частицы область $\varphi > \varphi_{\max}$ не имеет физического смысла.

Зависимость $\overline{w_{\text{дп}}} = f(\varphi)$ определяется по опытным данным.

Величина w_0 определяется из условия равенства сил тяжести и сопротивления сплошной фазы, действующих на частицу. Для сферической частицы это условие выражается равенством:

$$\frac{\pi}{6} D^2 g (\rho_d - \rho_c) = \zeta_0 \frac{\pi}{4} D^2 \frac{1}{2} \rho_c w_0^2, \quad (113)$$

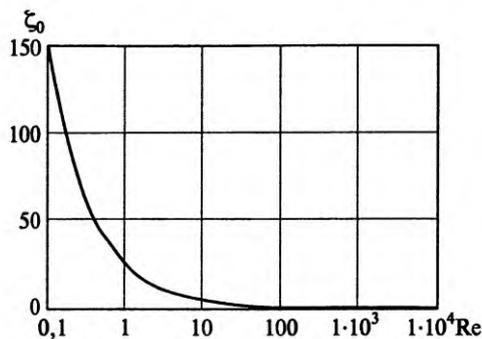


Рисунок 37 - Зависимость ζ_0 от Re при обтекании сферы

где D - диаметр частицы;

ζ_0 - коэффициент сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса $Re_0 = \rho_c w_0 D / \eta_0$ (рисунок 37).

Выражая скорость через число Рейнольдса и преобразуя правую часть, получаем

$$\zeta_0 Re_0^2 = \frac{4 D^3 g \rho_d - \rho_c}{3 v_c^2 \rho_c} = \frac{4}{3} Ar, \quad (114)$$

где Ar — число Архимеда:

$$Ar = \frac{\left(\frac{D^3 g}{v_c^2} \right) (\rho_d - \rho_c)}{\rho_c}.$$

Таким образом, величина $\zeta_0 Re_0$ не зависит от w_0 , а является функцией только физико-механических свойств системы. В большинстве практически важных случаев для системы жидкость-твердые частицы $Re_0 < 500$. При этом зависимость ζ_0 от Re_0 можно представить формулой

$$\zeta_0 = \frac{A}{Re_0} (1 + 0,15 Re_0^{0,687}). \quad (115)$$

Для сферической частицы $A = 24$. При $Re_0 > 500$

$$\zeta_0 = 0,44. \quad (116)$$

С помощью приведенных зависимостей находится значение w_0 .

Для частиц, форма которых отличается от сферической, в качестве определяющего размера принимается эквивалентный диаметр, равный диаметру сферы того же объема K , что и рассматриваемая частица:

$$V = \pi D_3^3 / 6 \text{ или } D_3 = 1,24 \sqrt[3]{V}.$$

Движущиеся в вязкой жидкости частицы несферической формы уже при малых значениях числа Рейнольдса ($\geq 0,05$) ориентируются наибольшей площадью проекции вдоль потока жидкости. Для частиц, имеющих форму тетраэдра и куба, такое ориентирование полностью устанавливается при $Re = 10$, а для частиц иной формы — при $Re = 20$. При значениях $Re = 70+300$ возникает неустойчивость движения частиц, проявляющаяся в колебаниях и вращении.

Влияние формы частицы на коэффициент сопротивления ζ_0 учитывается с помощью так называемого фактора (или коэффициента) формы ψ , определяемого как отношение поверхностей сферической F_c и рассматриваемой F частиц одинакового объема:

$$\psi = \frac{F_c}{F} = \frac{\pi D_3^2}{F} \approx 4,88 \frac{V^{2/3}}{F}.$$

Для несферических частиц коэффициент сопротивления при $Re_0 < 500$ определяется по формуле (117), в которой, согласно опытным данным:

$$A = \frac{24}{0,843 \lg \frac{\psi}{0,065}}.$$

При $Re_0 > 500$ значение ζ_0 находится с помощью эмпирического соотношения $\zeta_0 = 5,32 - 4,88\psi$. Для сферических частиц $\psi = 1$, для несферических - $\psi < 1$. Чем меньше ψ , тем больше ζ_0 и меньше скорость движения частицы (скорость осаждения) w_0 .

При одновременном движении большого числа частиц вместо ζ_0 в уравнении нужно использовать коэффициент сопротивления ζ , который можно представить в виде произведения ζ_0 для одиночной частицы на функцию концентрации частиц $f(\varphi)$, учитывающую особенности их группового движения

$$\zeta = \zeta_0 f(\varphi). \quad (117)$$

Величина ζ_0 представляет собой коэффициент сопротивления одиночной частицы, движущейся в неподвижной жидкости с той же относительной скоростью $w_{дп}$, что и в рассматриваемом потоке.

Коэффициент ζ_0 рассчитывается по приведенным выше зависимостям, в которых число Рейнольдса определяется выражением

$$Re_0 = \rho_c w_{дп} D_э / \eta_c.$$

Функция $f(\varphi)$ находится следующим образом. В состоянии равновесия значения ζRe^2 для частицы определенного размера одинаковы независимо от того, является она одиночной или нет. Поэтому

$$\zeta Re_d^2 = \zeta_0 Re_0^2 = (4/3) Ar. \quad (118)$$

Отсюда получаем при $Re < 500$

$$Re_0(1 + 0,15 Re_0^{0,687}) = f(\varphi) Re_d(1 + 0,15 Re_d^{0,687}). \quad (119)$$

При $Re > 500$

$$Re_0^2 = f(\varphi) Re_d^2. \quad (120)$$

Умножая левую и правую части выражения на $\rho_c D_c / \eta_c$, получим

$$Re_d = Re_0(1 - \varphi)^n.$$

Нетрудно установить, что при $Re > 500$ величина $f(\varphi) = (1 - \varphi)^{-2n}$. Сопоставляя то же равенство, получаем при меньших значениях числа Рейнольдса, т. е. когда величина $0,15Re^{0,687}$ мала по сравнению с единицей $f(\varphi) = (1 - \varphi)^{-n}$.

Приходим к выводу, что величина $f(\varphi)$ изменяется в следующих пределах: $f(\varphi) = (1 - \varphi)^{-4,78} + (1 - \varphi)^{-4,65}$. Поэтому можно принять

$$f(\varphi) = (1\varphi)^{-4,7}. \quad (121)$$

Поскольку $(1 - \varphi) < 1$, то $f(\varphi) > 1$, и коэффициент сопротивления S , при групповом движении частиц больше, чем для одиночной частицы. Отсюда следует, что скорость движения частиц относительно сплошной среды уменьшается с увеличением их концентрации.

10.5 Система жидкость-газ

Типичные структуры газожидкостных потоков иллюстрируются рисунке 38 на примере кипения жидкости в вертикальной трубе. Внизу имеется однофазный жидкостный поток, который переходит в двухфазную систему из пузырьков пара, распределенных в жидкости. По мере увеличения расхода пара отдельные пузырьки сливаются, образуя крупные «снаряды», и возникает пузырьково-снарядная

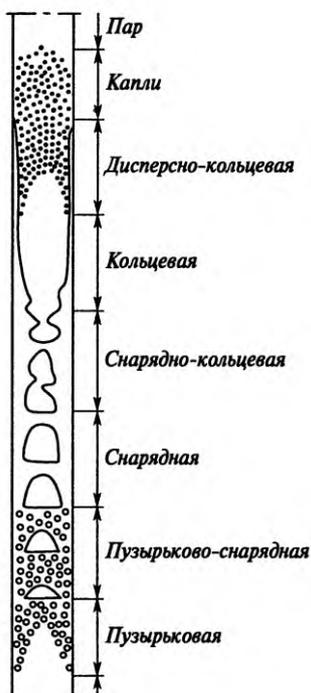


Рисунок 38 - Структуры двухфазных потоков при кипении жидкости в вертикальной трубе

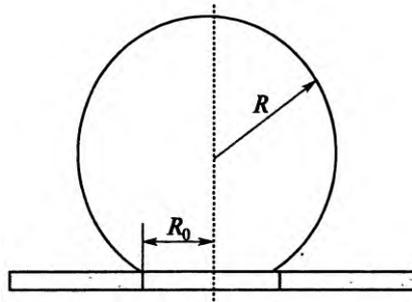


Рисунок 39 - Образование пузырька при истечении газа через отверстие

а затем снарядно-кольцевая, дисперсно-кольцевая и капельная структуры двухфазного потока. Распределение дисперсной фазы в сплошной фазе, характерное для каждой из этих структур, показано на рисунке 38. Условия образования двухфазного потока определенной структуры и переход одной структуры в другую зависят от совокупности физико-механических характеристик системы (физических свойств фаз, геометрических характеристик системы).

Образование газовых пузырьков. Истечение газа через отверстия в распределительном устройстве - один из распространенных способов образования газовых пузырьков в жидкости. В этом случае образующийся газовый пузырек соединен с поверхностью распределительного устройства шейкой (рисунок 39). Максимальный размер пузырька определяется условием равновесия подъемной силы и силы поверхностного натяжения. Считая пузырек сферическим, получаем

$$\frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}}) = 2\pi R_0 \sigma,$$

где R - радиус сферического пузырька;

R_0 - радиус отверстия в распределительном устройстве;

σ - поверхностное натяжение.

Отсюда

$$R = \sqrt[3]{\frac{3\sigma R_0}{2g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}}. \quad (122)$$

С.С. Кугателадзе и М.А. Стырикович показали, что с опытными данными лучше согласуется выражение, отличающееся от (121) лишь числовым коэффициентом:

$$R = \sqrt[3]{\frac{\sigma R_0}{g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}}. \quad (123)$$

Выражение (123) не учитывает инерционных сил, обусловленных динамическим воздействием потока газа, вытекающего из отверстия, т. е. оно справедливо при малой скорости образования пузырьков.

Когда скорость газа в отверстии велика, для определения объема пузырька V_n рекомендуется использовать уравнение

$$(36\pi)^{1/3} = \frac{2g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}{5\eta_{\text{ж}}V_{\text{г}}} V_n^{1/3} + \frac{V_{\text{г}}\rho_{\text{г}}}{F_0\eta_{\text{ж}}} V_n^{1/3},$$

где $V_{\text{г}}$ - объемный расход газа через отверстие, м³/с;

F_0 - площадь сечения отверстия, м².

Если скорость газа в отверстии w_0 удовлетворяет неравенству

$$w_0\rho_{\text{г}}^{1/2}[g\sigma(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})]^{-1/4} > 1,25\{\sigma/[gR_0^2(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})]\}^{1/12},$$

то из отверстия выходят не отдельные пузырьки, а струя газа, которая в объеме жидкости дробится на пузырьки. Вследствие слияния пузырьков при групповом движении размер и скорости их движения являются функцией высоты слоя жидкости. Так как процесс слияния пузырьков зависит от многих факторов, его влияние следует учитывать на основании экспериментальных данных.

Для распределительных устройств с большим числом отверстий приведенные уравнения дают приближенные результаты.

При использовании таких распределительных устройств в случае относительно больших расходов газа под перфорированным листом образуется газовая «подушка», высота которой $h_{\text{п}}$ эквивалентна разности давлений Δp под и над листом. Величина Δp складывается из разности давлений в пузырьке и на плоской поверхности ($\Delta p_{\text{п}}$) и гидравлического сопротивления при истечении газа из отверстия ($\Delta p_{\text{г}}$). Перепад $\Delta p_{\text{п}}$ обусловлен действием сил поверхностного натяжения на границе жидкости и газа. Эти силы сжимают газ в пузырьке. Значение $\Delta p_{\text{п}}$ для сферического пузырька определяется формулой Лапласа:

$$\Delta p_{\text{п}} = 2\sigma/R.$$

Величина $\Delta p_{\text{г}}$ равна

$$\Delta p_{\text{г}} = \frac{1}{2}\zeta'_0\rho_{\text{г}}w_0^2,$$

где ζ'_0 - коэффициент сопротивления при истечении газа через отверстие.

$$\text{Следовательно, } \Delta p = \Delta p_{\text{п}} + \Delta p_{\text{г}} = \frac{2\sigma}{R} + \frac{1}{2}\zeta'_0\rho_{\text{г}}w_0^2.$$

Отсюда с учетом (127) высота газовой «подушки» составит

$$h_{\text{п}} = \frac{\Delta p}{g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})} = \frac{2}{g} \sqrt[3]{\frac{\sigma^2}{R_0(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})^2}} + \zeta'_0 \frac{\rho_{\text{г}} w_0^2}{2g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}. \quad (124)$$

Для диспергирования газа в жидкости часто используется механическое перемешивание. В этом случае размер пузырьков зависит от касательных напряжений, под действием которых крупные пузырьки дробятся. Максимальный устойчивый размер пузырька определяется равенством сил поверхностного натяжения и сил, действующих на пузырек со стороны жидкости. Исходя из этого баланса, приходим к следующей формуле для определения максимального устойчивого диаметра пузырька D :

$$D = 0,725 \left(\frac{\sigma}{\rho_{\text{ж}}} \right)^{3/5} \varepsilon_{\text{м}}^{-2/5}, \quad (125)$$

где $\varepsilon_{\text{м}}^{-2/5}$ - мощность, диссипированная в единице массы жидкости.

Движение одиночных пузырей. При установившемся движении на пузырек действует подъемная сила, пропорциональная его объему и разности плотностей жидкости и газа, и равная ей сила сопротивления f_c :

$$f_c = \zeta \frac{w^2}{2} \rho_{\text{ж}} F = V_{\text{п}} g (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}}),$$

где ζ - коэффициент сопротивления;

w - скорость всплывания пузырька;

F - скорость поперечного сечения пузырька.

Отсюда

$$w = \sqrt{\frac{2g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})V_{\text{п}}}{\zeta F \rho_{\text{ж}}}}. \quad (126)$$

Чем меньше объем пузырька, тем ближе его форма к сферической. Вследствие подвижности поверхности раздела фаз газовый пузырек всплывает с большей скоростью, чем твердая частица того же размера при прочих равных условиях. Это обусловлено тем, что жидкость «прилипает» к поверхности твердого тела и, таким образом, неподвижна относительно него. На поверхности же

раздела жидкости и газа происходит относительное движение фаз. Поэтому при движении твердой частицы вблизи ее поверхности достигаются большие градиенты скорости, чем при всплывании газового пузырька при аналогичных условиях. Следовательно, вязкое трение оказывает на твердую частицу большее воздействие, чем на пузырек газа. Рыбчинский и Адамар теоретическим путем получили формулу для определения скорости всплывания сферической частицы диаметром D при $Re < 0$:

$$w = \frac{g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})D^2}{6\eta_{\text{ж}}} \frac{1 + (\eta_{\text{г}}/\eta_{\text{ж}})}{2 + 3(\eta_{\text{г}}/\eta_{\text{ж}})}. \quad (127)$$

При $\eta_{\text{г}} > \eta_{\text{ж}}$ (что характерно для твердых частиц) получается формула Стокса

$$w = \frac{g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})D^2}{18\eta_{\text{ж}}}, \quad (128)$$

а при $\eta_{\text{г}} < \eta_{\text{ж}}$ (что характерно для газовых пузырьков)

$$w = \frac{g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})D^2}{12\eta_{\text{ж}}}. \quad (129)$$

Как следует из сопоставления этих выражений, при одинаковой разности плотностей и вязкости жидкости газовые пузырьки всплывают в 1,5 раза быстрее сферических твердых частиц того же размера. Так, было обнаружено, что скорость всплывания пузырьков воздуха в обычной воде значительно меньше, чем в дважды дистиллированной.

С увеличением размера пузырьков, вследствие уменьшающегося влияния сил поверхностного натяжения по сравнению с динамическим действием жидкости, их форма отклоняется от сферической. Они приобретают неустойчивую форму, приближающуюся к сплюснутому сфероиду, а траектория их движения отклоняется от вертикали. Скорость движения таких пузырьков можно рассчитать, исходя из следующих соображений. Работа уменьшения толщины сплюснутого сфероида на величину dh равна изменению энергии, обусловленной поверхностным натяжением. Это изменение энергии равно поверхностному натяжению σ , умноженному на приращение поверхности dF . Таким образом,

$$\zeta \frac{w^2}{2} \rho_{\text{ж}} F dh = -\sigma dF, \quad (130)$$

где w - скорость всплывания пузырька;

ζ - коэффициент сопротивления.

Знак минус в уравнении (130) обусловлен тем, что рост поперечного сечения F сопровождается уменьшением высоты пузырька. Объем пузырька при его деформации не изменяется, т. е. $V_n = Fh = \text{const}$. Поэтому

$$dV_n = Fdh + hdF = 0.$$

Заменяя в (134) Fdh на $-hdF$, получаем

$$h = \frac{V_n}{F} = \frac{2\sigma}{\zeta\rho_{\text{ж}}w^2}.$$

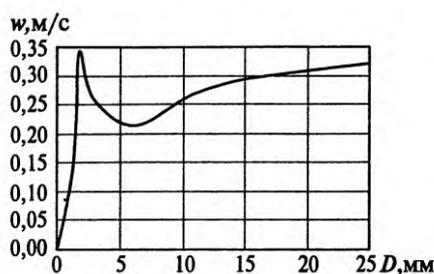


Рисунок 39 - Зависимость скорости всплывания w одиночного газового пузыря от его размера D

Подставляя полученное значение V_n/F (130), имеем

$$w = \sqrt{\frac{4g\sigma(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}{\zeta^2\rho_{\text{ж}}^2}}.$$

Это формула ДА. Франк-Каменецкого. При $Re > 100$ величина ζ , изменяется сравнительно мало. Поскольку значение числа Рейнольдса возрастает с увеличением размера пузыря, то скорость всплывания больших пузырей должна мало зависеть от их размера. Это подтверждается приведенным на рисунке 39 графиком, построенным по данным о скорости всплывания воздушных пузырей в воде. По оси абсцисс указывается значение эквивалентного диаметра пузыря, определяемого как диаметр сферы, объем которой равен объему пузыря.

Скорость всплывания мелких пузырьков возрастает с увеличением их размера в соответствии с формулой Стокса. Скорость же всплывания пузырьков диаметром 2-5 мм уменьшается вследствие вызванной деформацией по-

вышения коэффициента сопротивления. По достижении относительно устойчивой сплюснутой формы скорость всплывания пузырька медленно возрастает с увеличением его размера.

Для учета деформации пузырей и получения зависимостей, по которым определяется коэффициент сопротивления ξ , приходится проводить специальные эксперименты. Обработку опытных данных следует выполнять в числах подобия, которые выявляются из системы уравнений, описывающих процесс движения пузырей. Эта система состоит из уравнения Навье—Стокса

$$\rho_{\text{ж}} \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}}) - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} w = 0$$

и уравнения, выражающего условие равенства давлений на поверхности раздела фаз со стороны жидкости и со стороны газа:

$$p_{\text{ж}} - 2\eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{\text{гр}} = p_{\text{г}} + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где $(\partial w / \partial y)_{\text{гр}}$ - производная скорости на границе раздела фаз (по внешней нормали);

R_1 и R_2 - главные радиусы кривизны газового пузыря.

Последнее уравнение, входящее в систему, описывает поверхность пузыря:

$$f(x, y, z, \tau) = 0.$$

Используя анализ размерностей, приходим к следующим безразмерным комплексам (числам подобия):

$$\frac{\rho_{\text{ж}} w^2}{gl(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}; \frac{\Delta p}{\rho_{\text{ж}} w^2}; \frac{wl\rho}{\eta}; \frac{w\tau}{l}; \frac{\Delta pl}{\sigma}; \frac{\Delta pl}{\eta w}, \quad (131)$$

где l — определяющий размер.

Сочетания этих безразмерных комплексов также являются числами подобия:

$$\frac{\Delta p}{\rho_{\text{ж}} w^2} \frac{\Delta pl}{\sigma} \frac{\rho_{\text{ж}} w^2}{gl(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})} = \frac{\sigma}{gl^2(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})} = A; \quad (132)$$

$$\left(\frac{wl\rho_{\text{ж}}}{\eta}\right)^2 \left[\frac{\sigma}{gl^2(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}\right]^{3/2} \frac{gl(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}{\rho_{\text{ж}}w^2} = \frac{\sigma^{3/2}\rho_{\text{ж}}}{\eta^2\sqrt{g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}}. \quad (133)$$

Число подобия $\Delta pl/(\eta w)$ не является независимым, поскольку

$$\frac{\Delta pl}{\eta w} = \frac{\Delta p}{\rho w^2} \frac{wl\rho}{\eta} = \text{Eu} \cdot \text{Re}.$$

Вместо безразмерного комплекса можно ввести число Архимеда:

$$\text{Ar} = \frac{gl^3}{v^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{ж}}}\right) = \frac{\sigma^{3/2}\rho_{\text{ж}}}{\eta^2\sqrt{g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}} : \left[\frac{\sigma}{gl^2(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}\right]^{3/2}.$$

Следовательно, процесс всплывания пузыря газа описывается обобщенной зависимостью

$$f \left[\frac{wl\rho}{\eta}, \frac{\Delta p}{\rho w^2}, \frac{w\tau}{l}, \frac{gl^3}{v^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{ж}}}\right), \frac{\sigma}{gl^2(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})} \right] = 0. \quad (134)$$

Скорость всплывания пузыря определяется его размером, а также свойствами жидкости и газа, которые входят в условия однозначности. В связи с этим два последних числа подобия являются определяющими. Поэтому установившееся движение пузыря в жидкости можно представить зависимостью

$$\text{Re} = \frac{wD_{\text{э}}}{v} = f \left[\frac{gl}{v^2} \left(1 - \frac{\rho_{\text{г}}}{\rho_{\text{ж}}}\right), \frac{\sigma}{gl^2(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})} \right] = f(\text{Ar}, A),$$

где $D_{\text{э}} = 2R_{\text{э}}$ - эквивалентный диаметр пузыря, являющийся определяющим размером.

Обработка имеющихся к настоящему времени экспериментальных данных привела к следующим зависимостям:

при ламинарном режиме течения ($\text{Re} < 2$)

$$w = \frac{2g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})R_{\text{э}}^2}{9\eta}; \quad (135)$$

при движении пузырей, имеющих форму сфероидов, в интервале $2 < \text{Re} < A^{0,42}$

$$w = 1,81R_3^{1.28}v^{-0,52}; \quad (136)$$

в интервале $4A^{0,42} < Re < 3A^{0,50}$

$$w = 1,35 \sqrt{\frac{\sigma}{R_3(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}}; \quad (137)$$

при движении газообразных пузырей при $Re > 3A^{0,50}$

$$w = 1,35 \sqrt{\frac{g\sigma(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})}{\rho_{\text{ж}}^2}}. \quad (138)$$

При малых значениях Re получается единая зависимость $w = f(Re)$ для всех жидкостей. При $Re > A^{0,42}$ для каждой жидкости имеется своя зависимость $w = f(Re)$, поскольку w является также функцией поверхностного натяжения σ .

Изложенные выводы относятся к свободному движению пузырей, не осложненному влиянием стенок. При движении пузыря в трубе он вытесняет жидкость, которая перемещается в направлении, противоположном направлению движения пузыря. Поэтому относительная скорость пузыря $w_{\text{отн}}$ равна разности абсолютной скорости пузыря и скорости жидкости $w_{\text{ж}}$:

$$w_{\text{отн}} = w - w_{\text{ж}}$$

При перемещении пузыря за время A на расстояние dx он вытесняет объем, равный $\pi R_3^2 dx$, заполняемый втекающей сверху со скоростью $w_{\text{ж}}$ жидкостью:

$$\pi R_3^2 dx = -w_{\text{ж}} \pi (R_{\text{т}}^2 - R_3^2) dt,$$

где $R_{\text{т}}$ - радиус трубы.

Знак минус в правой части этого уравнения обусловлен тем, что скорость жидкости и пузыря направлены в противоположные стороны. Абсолютная скорость движения пузыря $w = dx/dt$. Следовательно, $wR_3^2 = -w_{\text{ж}}(R_{\text{т}}^2 - R_3^2)$ или $w = w_{\text{ж}} [1 - (R_{\text{т}}/R_3)^2]$.

Отсюда

$$w_{\text{отн}} = w - w_{\text{ж}} = -(R_{\text{т}} - R_3)^2 w_{\text{ж}} = \frac{w}{1 - (R_{\text{т}}/R_3)^2}. \quad (139)$$

При всплывании пузыря в неограниченном объеме жидкости относительная скорость $w_{отн}$ равна абсолютной w_0 . Поэтому следует

$$w = w_0[1 - (R_T/R_0)^2]. \quad (140)$$

Таким образом, скорость всплывания пузыря в трубе меньше скорости всплывания в неограниченном объеме жидкости. В приведенном элементарном расчете не принимается во внимание деформация пузырей. Роль этого фактора учитывается на основании опытных данных.

Гидравлическое сопротивление при движении газожидкостных смесей в пузырьковом режиме рассчитывается на основании модели гомогенного течения. Гидравлический коэффициент трения вычисляется по формулам для однородных жидкостей. При турбулентном режиме движения удовлетворительные результаты получаются при использовании значения $\lambda = 0,02$.

С увеличением газонаполнения образуются крупные пузыри газа, для которых характерно неустойчивое колебательное движение. Мелкие пузырьки в следе крупного пузыря движутся с большей, чем он, скоростью. В результате происходит слияние пузырьков, причем мелкие пузырьки поглощаются крупными пузырями. Это возможно, когда эквивалентный радиус удовлетворяет неравенству $Re > 2\sqrt{\sigma/(g\rho_{ж})}$. Нестационарное движение крупных пузырей приводит к сильной турбулизации потока, и возникает режим течения, называемый пенисто-турбулентным. Для такого режима показатель степени n , определяющий приведенную скорость дрейфа, меньше единицы. Скорость движения газа относительно средней скорости газожидкостной смеси (скорость дрейфа) при этом равна

$$w_{дп} = 1,53 \sqrt{\frac{\sigma g(\rho_{ж} - \rho_{г})}{\rho_{ж}^2}}.$$

Пенисто-турбулентный режим является переходным между пузырьковым и снарядным режимами, причем для снарядного режима характерно периодическое движение крупных одиночных пузырей, которые разделены жидкими перемычками и занимают почти все поперечное сечение канала. При движении в вертикальном канале скорость пузыря w_d складывается из приведенной (средней) скорости движения газожидкостной смеси $w_{пр}$ и скорости всплывания w_n :

$$w_d = w_{пр} + w_n. \quad (141)$$

Скорость всплывания w_n определяется действием трех сил: инерции жидкости, вязкости и поверхностного натяжения. При различных условиях относи-

тельный вклад этих сил различен. Поэтому w_{Π} находится по опытным данным, обработанным с использованием чисел подобия, приведенных выше. Как показывают экспериментальные данные, при снаряжном режиме движения скорость всплывания пузыря практически не зависит от его формы и размера, а определяется гидродинамической обстановкой перед носовой и за кормовой его частями. При ламинарном режиме движения, который наблюдается при значениях $Ar < 4$, носовая и кормовая части пузыря скруглены и течение за кормой ламинарное. В случае турбулентного режима движения жидкостей с малой вязкостью при $Ar > 9 \cdot 10^4$ кормовая часть пузыря плоская, а течение за ней турбулентное. Для вычисления значения w_{Π} рекомендуется формула

$$\frac{\rho_{\text{ж}} w_{\Pi}^2}{\pi D_{\text{т}} (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})} = k_1^2. \quad (142)$$

В качестве определяющего размера принимается диаметр канала $D_{\text{т}}$ в первой области преобладающее влияние оказывают инерционные силы, во второй - силы вязкого трения, в третьей - силы поверхностного натяжения. В последнем случае пузырь неподвижен относительно жидкости, так как силы поверхностного натяжения уравновешивают подъемную силу.

Вследствие влияния профиля скоростей в «пробках» жидкости, разделяющих газы «снаряды», а также влияния течений за кормовой частью пузыря скорость его движения оказывается больше рассчитанной. Для учета влияния указанных факторов в эту формулу вводятся поправочные коэффициенты C_1 и C_2 :

$$w_{\text{д}} = C_1 w_{\text{пр}} + C_2 w_{\Pi}. \quad (143)$$

При развитом турбулентном течении в жидкой «пробке» ($Re_{\text{ж}} > 8000$) $C_1 = 1,2$ и $C_2 = 1$. Для каналов, в которых происходит кипение, $C_2 = 1,6$. С учетом (143) получается следующее выражение для φ :

$$\varphi = w_{\text{пр,д}} / [C_1 (w_{\text{пр,с}} + w_{\text{пр,д}}) + C_2 w_{\Pi}].$$

Градиент давления, обусловленный трением, при снаряжном режиме движения газожидкостной смеси в вертикальной трубе приближенно рассчитывают по величине гидравлического коэффициента трения $\lambda_{\text{ж}}$ для однородного потока жидкости, движущегося со средней скоростью смеси $w_{\text{пр}}$:

$$-\left(\frac{dp}{dy}\right)_{\text{тр}} = \lambda_{\text{ж}} \frac{\rho_{\text{см}} w_{\text{пр}}^2}{2D} = \frac{1}{2} \lambda_{\text{ж}} (1 - \varphi) \rho_{\text{ж}} \frac{w_{\text{пр}}^2}{D}, \quad (144)$$

где $\rho_{\text{см}} \approx (1 - \varphi) \rho_{\text{ж}}$.

С увеличением расхода газа длина жидкостных пробок между пузырями уменьшается и при определенном значении $w_{\text{пр,д}}$ снарядный режим течения переходит в кольцевой. При восходящем движении газожидкостных смесей в вертикальных трубах это значение $w_{\text{пр,д}}$ определяется из выражения

$$w_{\text{пр,д}} \rho_{\text{г}}^{1/2} = 0,9 [g D_{\text{T}} (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{г}})]^{1/2}. \quad (145)$$

При снарядном течении газожидкостной смеси по горизонтальным трубам скорость дрейфа, обусловленная действием подъемной силы, равна нулю. Однако скорость движения пузырей больше приведенной скорости за счет наличия пленки жидкости между пузырем и стенкой трубы. На основании опытных данных при $Re > 3000$ получена следующая формула для определения скорости движения пузыря:

$$w_{\text{д}} = 1,2 w_{\text{пр}} = \frac{1,2(V_{\text{с}} + V_{\text{д}})}{F}.$$

Для φ находим

$$\varphi = 0,84 V_{\text{д}} / (V_{\text{с}} + V_{\text{д}}). \quad (146)$$

В связи с малой плотностью газовой фазы давление вдоль вертикальной поверхности пузыря практически постоянно. Поэтому гидравлическое сопротивление складывается из сопротивления пузыря в носовой и кормовой частях и гидравлического сопротивления при движении жидких пробок. Поскольку при заданном объемном расходе газа число пузырей зависит от их размера, для практических расчетов требуется независимая оценка последних. Для определения падения давления на один пузырь Δp без учета жидкостной пробки рекомендуются формулы:

при $Re_{\text{ж}} = (w_{\text{пр}} D_{\text{T}} \rho_{\text{ж}} / \eta_{\text{ж}}) < 270$

$$\Delta p = \frac{90 \eta_{\text{ж}} w_{\text{пр}}}{D_{\text{T}}}; \quad (147)$$

при $270 < Re_{\text{ж}} < 830$

$$\Delta p = 0,163 \rho_{\text{ж}} w_{\text{пр}}^2. \quad (148)$$

В наклонных трубах при снаряжном течении пузырь скользит вдоль верхней поверхности трубы и скорость движения оказывается выше, чем в горизонтальной трубе, даже если наклон к горизонту составляет всего несколько градусов. Это может существенно влиять на движение газожидкостных смесей, особенно при неточной установке горизонтальных труб.

Под кольцевым режимом течения понимается режим, характеризующийся разделением движением фаз. Газовая фаза движется в ядре потока, а жидкость образует пленку на стенках трубы. Жидкая и газовая фазы могут перемещаться в одном (прямоток) или в противоположных (противоток) направлениях. Кольцевой режим движения наблюдается в испарителях, пленочных абсорберах, выпарных и других аппаратах. В химической технике чаще всего приходится иметь дело с вертикальными потоками.

Условия взаимодействия фаз и характер их движения зависят от приведенных расходов. При нисходящем движении жидкости и малых скоростях восходящего потока газа поверхность раздела фаз гладкая и коэффициент трения такой же, как и для гладких труб. С увеличением скорости встречного движения газа на поверхности жидкости возникают волны, с их гребней срываются капли, и за счет этого средняя плотность ядра потока возрастает. При дальнейшем увеличении скорости газа возникает дисперсно-кольцевой режим и, наконец, происходит захлебывание и обращение движения жидкой фазы - она увлекается газовым потоком вверх.

При ламинарном движении свободно стекающей жидкой пленки ее толщина и профили скорости могут быть рассчитаны на основе уравнений Навье-Стокса. Для средней скорости и толщины пленки выведены уравнения

$$w_{cp} = \left(\frac{vg}{48}\right)^{1/3} Re_{пл}^{2/3}, \delta = \left(\frac{3v^2}{49}\right)^{1/3} Re_{пл}^{1/3},$$

а для профиля скорости - $w_x = \frac{g}{v} y \left(\delta - \frac{y}{2}\right) \sin\beta$.

Переход от ламинарного режима течения к ламинарно-волновому происходит при $Re = 12$, однако, как показывают опытные данные, если можно пренебречь трением на границе жидкость—газ, т. е. при малых скоростях газа, то приведенное выше уравнение для толщины пленки дает приемлемые результаты при $Re_{пл} < 1000$. При $Re_{пл} > 1000$ рекомендуется использовать уравнение

$$\delta_{cp} = 0,115 \left(\frac{v_{ж}^2}{g}\right)^{1/3} Re_{пл}^{0,6}. \quad (149)$$

Режим и направление движения пленки жидкости в значительной степени определяются величиной касательных напряжений на границе раздела между жидкостью и газом $\sigma_{тп}$. Чаще всего скорость газа $w_{г}$ значительно больше скорости жидкости. Поэтому в соответствии с уравнением для касательных напряжений

$$\tau_0 = \lambda \frac{\rho w_{ср}^2}{8}$$

имеем

$$\sigma_{тп} = \lambda_{п} \frac{1}{8} \rho_{г} w_{г}^2 = \frac{\lambda_{п} \rho_{г} w_{пр.г}^2}{8\varphi^2},$$

где $\lambda_{п}$ - коэффициент трения на границе раздела фаз;

$w_{пр.г}$ - приведенная скорость газа ($w_{пр.г} = w_{пр.г} \varphi$).

Исходя из модели раздельного течения, можно выразить градиент давления по высоте трубы, обусловленный трением, с помощью соотношения:

$$-\left(\frac{dp}{dy}\right)_{тр} = \frac{\lambda_{п} \rho_{г} w_{пр.г}^2}{2\varphi^{5/2} D}, \quad (150)$$

где D - диаметр трубы.

Если бы тот же поток заполнял все сечение трубы, то градиент давления был бы равен

$$-\left(\frac{dp}{dy}\right)_{г} = \frac{\lambda'_{п} \rho_{г} w_{пр.г}^2}{2D}, \quad (151)$$

Сопоставляя эти два выражения и учитывая определение (105), имеем

$$\lambda_{п} = \varphi^{5/2} \Phi_{г}^2 \lambda'_{п},$$

где $\Phi_{г}^2$ - параметр двухфазности для газа.

На основании обработки опытных данных гидравлический коэффициент трения на границе газ-жидкость при волновом течении пленки выражается в зависимости от отношения толщины пленки δ к диаметру трубы D :

$$\lambda_{п} = 0,02 \left(1 + \frac{300\delta}{D}\right). \quad (152)$$

Соотношение (152) по форме аналогично уравнению, которое используется для расчета гидравлического коэффициента трения при движении одно-

родного потока в шероховатой трубе. Анализ опытных данных приводит к выводу, что пленка с волновой поверхностью примерно эквивалентна шероховатой трубе с размером шероховатости, превосходящим в 4 раза среднюю толщину пленки.

При заданном расходе жидкости нижней границей скорости газа, отвечающей кольцевому режиму течения, является скорость газа, при которой происходит образование жидкостных перемычек, предшествующих переходу к снарядному режиму течения. Верхним пределом скорости газа является ее значение, при котором кольцевой режим переходит в дисперсно-кольцевой.

Режим движения жидкости и газа определяется значениями их приведенных скоростей $w_{пр.ж}$ и $w_{пр.г}$. Жидкостные перемычки образуются, когда сила сопротивления, пропорциональная кинетической энергии потока газа, уравновешивает силу тяжести. В качестве обобщенных переменных при обработке опытных данных принимают безразмерные величины

$$w_{г}^* = w_{пр.г} \rho_{г}^{1/2} [gD(\rho_{ж} - \rho_{г})]^{-1/2};$$

$$w_{ж}^* = w_{пр.ж} \rho_{ж}^{1/2} [gD(\rho_{ж} - \rho_{г})]^{-1/2},$$

которые можно рассматривать как производные от безразмерного комплекса $\rho_{ж} w^2 / [g l^2 (\rho_{ж} - \rho_{г})]$, являющегося производным от числа Фруда $Fr = w^2 / (gl)$. Для определения условий захлебывания при противоточном движении жидкости и газа в вертикальных трубах на основании обработки опытных данных получена формула

$$(w_{г}^*)^{1/2} + (w_{ж}^*)^{1/2} = C. \quad (153)$$

Величина постоянной C зависит от конструктивного оформления верхних концов труб. Для труб с острыми кромками $C = 0,725$; для труб со скругленными кромками, когда возмущениями потока можно пренебречь, $C = 0,88 + 1$.

Определение границы между кольцевым и дисперсно-кольцевым режимами течения представляет значительные трудности в связи с тем, что на отрыв капель с поверхности жидкости влияет значительное число факторов. При относительно небольших приведенных скоростях и вязкости жидкости переход к дисперсно-кольцевому режиму приближенно определяется условием

$$(w_{пр.г} \eta_{п} / \sigma) (\rho_{г} / \rho_{ж})^{1/2} > 2,46 \cdot 10^{-4}. \quad (154)$$

Для вычисления объемной концентрации c_p в восходящем кольцевом потоке рекомендуется следующее эмпирическое соотношение, хорошо описывающее опытные данные при $\varphi > 75+80\%$:

$$\frac{w_{\Gamma}^*}{1 - 2,85(1 - \varphi)} - \frac{w_{\text{ж}}^*}{2,85(1 - \varphi)} = 0,775. \quad (155)$$

Подробные сведения о закономерностях кольцевого течения двухфазных систем приводятся в специальной литературе.

Под дисперсным течением понимается движение потока газа со взвешенными в нем частицами жидкости. Поведение капель в объеме газа во многих отношениях подобно поведению газовых пузырьков в объеме жидкости и описывается аналогичными уравнениями. Принципиальное различие между поведением капель и пузырьков обусловлено тем, что пузырьки имеют значительно меньшую плотность. Вследствие этого силы сопротивления со стороны жидкости значительно превышают силы инерции. Для капель же картина обратная. Поэтому поведение капель в газовом потоке во многом зависит от начального импульса, сообщаемого капле в момент ее образования.

Устойчивость капли в газовом потоке определяется соотношением инерционных сил и сил поверхностного натяжения. Оно характеризуется значением числа Вебера $We = \rho_{\Gamma} w^2 D / \sigma$, где w - относительная скорость капли, а D - ее диаметр.

При $We > 12$ капля теряет устойчивость и дробится. Согласно опытным данным, максимальный размер устойчивой капли при значениях числа Рейнольдса $Re > 1000$ примерно равен

$$R_{\text{макс}} \cong \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\Gamma})}}. \quad (156)$$

Газожидкостные смеси с дисперсной жидкой фазой нестабильны. Поведение таких смесей определяется одновременно протекающими явлениями образования капель и их сепарации из газового потока. В технике приходится иметь дело с различными задачами, относящимися к дисперсному течению. Так, в ряде процессов необходимо распылять жидкость (распылительная сушка, сжигание жидкого топлива и т. п.), в других процессах (выпаривание, барботаж и т. д.) требуется уменьшить или предотвратить унос жидкости газом или паром. В связи со сложностью явлений образования капель при взаимодействии газа с жидкостью в настоящее время нет обобщений, которые можно было бы рекомендовать для инженерных расчетов. Для отдельных случаев используются опытные данные, приводимые в специальной литературе.

11 Оценка выполнения домашнего задания/контрольной работы

Форма отчетности домашнего задания/контрольной работы – печатная и электронная. Должным образом выполненные и оформленные домашнее задание/контрольная работа регистрируются на кафедре в журнале учета и представляются на проверку руководителю домашнего задания/контрольной работы не позднее, чем за неделю до установленного срока его защиты. Руководитель вносит в текст пояснительной записки свои замечания по домашнему заданию/курсовой работе, возвращает домашнее задание/курсовую работу на доработку с указанием причины или принимает решение о допуске студента к его защите, делая об этом запись на титульном листе пояснительной записки домашнего задания/контрольной работы.

Домашнее задание/контрольная работа считается зачтенной, если проверена преподавателем, ведущим занятие, и имеет соответствующую запись о правильном ее выполнении.

При оценке домашнего задания/контрольной работы используется бинарная система, которая предусматривает оценки «зачтено» или «не зачтено».

Оценка «зачтено» ставится в случае, если домашнее задание/контрольная работа соответствует всем предъявляемым требованиям и правильно выполнены расчеты всех параметров.

Оценка «не зачтено» ставится в случае, если домашнее задание/контрольная работа не соответствует большинству предъявляемых критериев, расчеты параметров приведены с ошибками.

В случае дистанционного обучения студент должен зарегистрироваться на курс в LMS Canvas, используемый преимущественно для асинхронного взаимодействия между участниками образовательного процесса посредством сети «Интернет», ознакомиться с содержанием домашнего задания/контрольной работы, сроками сдачи, критериями оценки. В установленные сроки в рубрике «Задания» курса, созданного в LMS Canvas, студент должен выполнить домашнее задание/контрольную работу и подгрузить домашнее задание/контрольную работу для проверки в виде файла. Удобно называть файл работы следующим образом: название предмета (сокращенно), группа, ФИО, дата актуализации (при повторном размещении). Если работа содержит формулы и рисунки, то ее следует подгружать pdf формате. Подгружаемая для проверки работа должна содержать все необходимые структурные элементы и быть оформлена в соответствии с требованиями. Преподаватель в течение установленного срока (не более десяти дней) проверяет работу и размещает в комментариях к заданию рецензию, в которой указывает как положительные стороны работы, так и замечания.

При наличии в рецензии замечаний и рекомендаций, студент вносит правки в работу и подгружает ее для проверки заново, следя при этом за сроками, в течение которых должно быть выполнено задание. При нарушении сроков, указанных преподавателем возможность подгрузить работу остается, но система выводит сообщение о нарушении сроков. По окончании семестра подгрузить работу не получится.

Список использованных источников

1. Кудинов А.А. Гидрогазодинамика. – М.: ИНФРА-М, 2013. – 336 с.
2. Швыдкий В.С., Ярошенко Ю.Г., Гордон Я.М., Шаврин В.С., Носков А.С. Механика жидкости и газа / Под ред. В.С. Швыдкого. – М.: ИКЦ «Академкнига», 2003. – 464 с.
3. Прибытков И.А. Механика жидкости и газов: Учебно-методическое пособие. – М.: МИСиС, 2002. – 82 с.
4. Метревели В.Н. Сборник задач по курсу гидравлики с решениями. – М.: Высшая школа, 2007. – 192 с.
5. Сборник задач по машиностроительной гидравлике: Учеб. пособие для машиностроительных вузов/Д.А. Бутаев, З.А. Калмыкова, Л.Г. Подвидз и др.; Под ред. И.И. Куколевского, Л.Г. Подвидза. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 448 с.
6. Задачник по гидравлике, гидромашинам и гидроприводу / Б.Б. Некрасов, И.В. Фатеев, Ю.А. Беленков и др.; Под ред. Б.Б. Некрасова. – М.: Высшая школа, 1989. – 192 с.
7. Ерохин В.Г., Маханько М.Г. Сборник задач по основам теплотехники и гидравлики. - М.: Энергия, 1972. – 176 с.

Приложение А

Основные физические свойства жидкостей и газов

Таблица П.А.1 - Термический коэффициент объемного расширения воды

Давление, Па·10 ⁻⁴	В _т , $\frac{1}{\text{град}}$ при температуре, °С				
	1-10	10-20	40-50	60-70	90-100
10	0,000014	0,000150	0,000422	0,000556	0,000719
980	0,000043	0,000165	0,000422	0,000548	0,000714
1960	0,000072	0,000183	0,000426	0,000539	-
4900	0,000149	0,000236	0,000429	0,000523	0,000661
8830	0,000229	0,000294	0,000437	0,000514	0,006621

Таблица П.А.2 - Зависимость плотности воды ρ , кг/м³, от температуры

Температура, °С	0	4	20	40	60	80	90	99
ρ	999,9	1000	998	992	983	972	965	959

Таблица П.А.3 - Зависимость динамического и кинематического коэффициентов вязкости воды от температуры

Коэффициенты	Температура, °С							
	0	4	20	40	60	80	90	99
$\mu \cdot 10^3$, Па·с	1,79	1,57	1,01	0,65	0,48	0,36	0,31	0,27
$\nu \cdot 10^4$, м ² /с	0,0179	0,0152	0,0101	0,0066	0,0048	0,0037	0,0033	0,0028

Таблица П.А.4 - Зависимость плотности и кинематического коэффициента вязкости сухого воздуха при давлении 101,3 кПа от температуры

Температура К(°С)	Плотность ρ , кг/м ³	Кинематическая вязкость $\nu \cdot 10^6$, м ² /с
1	2	3
273(0)	1,293	13,28
323(50)	1,093	17,95
373(100)	0,946	23,13
423(150)	0,846	28,99
473(200)	0,746	34,85
523(250)	0,674	40,61
573(300)	0,615	48,33
623(350)	0,566	55,46
673(400)	0,524	63,09
773(500)	0,456	79,38

Продолжение таблицы П.А.4

1	2	3
873(600)	0,404	96,89
973(700)	0,362	115,4
1073(800)	0,629	134,8
1173(900)	0,301	155,1
1273(1000)	0,277	177,1
1373(1100)	0,257	199,3
1473(1200)	0,239	223,7
1573(1300)	0,225	248,1
1673(1400)	0,211	175,0

Таблица П.А.5 - Зависимость плотности и кинематического коэффициента вязкости дымовых газов среднего состава (13% CO₂, 11% H₂O, 76% N₂) при давлении 101,3 кПа от температуры

Температура К(°С)	Плотность ρ, кг/м ³	Кинематическая вязкость ν·10 ⁶ , м ² /с	Температура К(°С)	Плотность ρ, кг/м ³	Кинематическая вязкость ν·10 ⁶ , м ² /с
273(0)	1,295	12,20	1073(800)	0,329	131,8
373(100)	0,950	21,54	1173(900)	0,301	152,5
473(200)	0,748	32,80	1273(1000)	0,275	174,3
573(300)	0,617	45,81	1373(1100)	0,257	197,1
673(400)	0,525	60,38	1473(1200)	0,240	221,0
773(500)	0,457	76,30	1573(1300)	0,225	245,1
873(600)	0,405	93,61	1673(1400)	0,212	270,5
973(700)	0,363	112,1	1773(1500)	0,199	295,2

Приложение Б

Коэффициенты при истечении жидкости и газа через отверстия и насадки

Таблица П.Б.1 - Значения коэффициентов ε , φ , μ , ξ при истечении жидкости и газа через отверстия и насадки (величины отнесены к выходному отверстию)

Условия истечения	φ	ε	μ	ξ
Круглое отверстие в тонкой стенке	0,97	0,64	0,62	0,06
Цилиндрическая насадка	0,82	1,0	0,82	0,49
Конически суживающаяся насадка	0,97	1,0	0,97	0,06
Конически расширяющаяся насадка	0,45-0,50	1,0	0,45-0,50	3,95-3,0
Круглое отверстие в толстой стенке	0,82	1,0	0,82	0,49
Коноидальная насадка	0,98	1,0	0,98	0,04

ГАНИН ДМИТРИЙ РУДОЛЬФОВИЧ
ГАВРИШ ПЕТР ВЛАДИМИРОВИЧ

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Методические указания
для выполнения домашнего задания/контрольной работы
по дисциплинам «Механика жидкости и газа», «Механика жидкости и газов»
для студентов направлений подготовки
22.03.02 Metallurgy, 15.03.02 Technological machines and equipment
всех форм обучения

Подписано в печать 16.12.2020 г.		
Формат 60x90 $\frac{1}{16}$ Рег. № 213	Печать цифровая Тираж 10 экз.	Уч.-изд. л. 8,375

ФГАОУ ВО

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Новотроицкий филиал

462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, 8.

E-mail: nf@misis.ru

Контактный тел. 8 (3537) 679729.

