МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»
НОВОТРОИЦКИЙ ФИЛИАЛ

Кафедра металлургических технологий и оборудования

Т.В. СТЕПЫКО

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания
по выполнению контрольной работы/домашнего задания,
предусмотренных программой дисциплины в III семестре,
для студентов направлений подготовки 22.03.02 Металлургия,
13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 18.03.02 Химическая
технология, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
очной и заочной форм обучения

Новотроицк, 2019

УДК 531
ББК 30.12
С 79

Рецензенты:

Мастер по ремонту оборудования доменного цеха АО «Уральская Сталь»
Сальников В.П.

Доцент кафедры металлургических технологий и оборудования ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Новотроицкий филиал, к.п.н., доцент **Нефедов А.В.**

Степыко Т.В. Прикладная механика: методические указания по выполнению контрольной работы/домашнего задания, предусмотренных программой дисциплины в III семестре. – Новотроицк: НФ НИТУ МИСиС, 2019. 55 с.

Предназначены для студентов направлений подготовки: 22.03.02 Металлургия, 13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 18.03.02 Химическая технология, 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника, очной и заочной форм обучения

Рекомендовано Методическим Советом НФ НИТУ «МИСиС».

Содержание

Введение

В современном нам мире все науки условно делятся на общие или экспериментальные, теоретические и прикладные (для наших специальностей – технические). Известно, что в общих науках ученые работают непосредственно с явлениями и объектами природы, которые изучаются по схеме: наблюдение, построение простейших моделей и элементарной теории, проведение эксперимента с помощью приборов. Далее строится теория и осуществляется выход в практику. В теоретических науках физико – математического профиля теоретики работают уже не непосредственно с явлениями и объектами природы, а с их физико – математическими моделями, которые называют с конца 19 – века – математическими моделями (ММ). В прикладных – технических науках инженеры создают и исследуют объекты техники.

Теоретическая механика (ТМ) есть раздел механики, а механика является неотъемлемой, исторически первой частью физики. Ее идеи и методы являются основанием почти всех разделов физики.

1 ТМ – это наука о наиболее общих теоретических физико – математических методах описания механических движений, явлений и процессов. Она базируется на физических основах механики, а ее инструментами является математика и логика.

2 ТМ – это наука о методах построения и работы с математическими моделями (ММ) механических движений, явлений, процессов, а также объектов Природы и Техники, участвующих в них.

3 ТМ – это специализированный научный язык, позволяющий адекватно описывать механические движения, явления, процессы.

4 ТМ – это идейная и расчетная основа большинства отраслей современной техники, в том числе машиностроения, авиастроения, геодезического приборостроения и.т.д.

5 ТМ – это важный элемент технической культуры современной цивилизации.

Общие методические указания по изучению дисциплины

«Прикладная механика» в III семестре включает три раздела: статику (С), кинематику (К) и динамику (Д).

Для изучения необходимо иметь соответствующую математическую подготовку. Во всех разделах курса, начиная со статики, широко используется векторная алгебра. Необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически и аналитически сумму векторов, вычислять скалярное и векторное произведения двух векторов и знать свойства этих произведений, а в кинематике и динамике – дифференцировать векторы. Надо также уметь свободно пользоваться системой прямоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве, знать, что такое единичные векторы (орты) этих осей и как выражаются составляющие вектора по координатным осям с помощью ортов.

Для изучения кинематики надо уметь дифференцировать функции одного переменного, строить графики этих функций, быть знакомым с понятиями о естественном трехграннике, кривизне кривой и радиусе кривизны, знать основы теории кривых 2 – го порядка, изучаемой в аналитической геометрии.

Для изучения динамики надо уметь находить интегралы (неопределенные и определенные) от простейших функций, вычислять частные производные и полный дифференциал функций нескольких переменных, а также уметь интегрировать дифференциальные уравнения 1 – го порядка с разделяющимися переменными и линейные дифференциальные уравнения 2 – го порядка (однородные и неоднородные) с постоянными коэффициентами.

При изучении материала дисциплины по учебнику необходимо, уяснить существо каждого излагаемого там вопроса. Главное – это понять изложенное в учебнике, а не «заучить».

Изучать материал рекомендуется по темам или по главам учебника. Сначала следует прочитать весь материал темы, особенно не задерживаясь на том, что показалось не совсем понятным; часто это становится понятным из последующего. Затем надо вернуться к местам, вызвавшим затруднения, и внимательно разобраться в том, что было неясно. Особое внимание при повторном чтении обратите на формулировки соответствующих определений, теорем и т. П.; в точных формулировках, как правило, бывает существенно каждое слово и очень полезно понять, почему данное положение сформулировано именно так. Однако не следует стараться заучивать формулировки; важно понять их смысл и уметь изложить результат своими словами.

Необходимо также понять ход всех доказательств и разобраться в их деталях. Доказательства надо уметь воспроизводить самостоятельно, что нетрудно сделать, поняв идею доказательства; пытаться просто их «заучивать» не следует, никакой пользы это не принесет.

При изучении дисциплины особое внимание следует уделить приобретению навыков решения задач. Для этого, изучив материал данной темы, надо сначала обязательно разобраться в решениях соответствующих задач, которые приводятся в учебнике, обратив особое внимание на методические указания по их решению.

Закончив изучение темы, нужно проверить, можете ли вы дать ответ на все вопросы программы курса по этой теме.

Указания по выполнению домашнего задания и контрольной работы.

Домашнее задание выполняют студенты дневного обучения решают задачи С1, С2, К1, К2, Д1, Д2, Д3. Студенты заочного обучения выполняют контрольную работу и решают задачи С1, С2, К1, Д1.

К каждой задаче даются конкретные методические указания по ее решению, и приводится пример решения.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы. Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра зачетной книжки, а номер условия в таблице — по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рисунок 4 и условия 6 из таблицы.

1 Статика

Задача С1

Жесткая рама закреплена в точке А шарнирно, а в точке В прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке С к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом Р = 25 кН. На раму действует пара сил с моментом М=60кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения, которых указаны в таблице 1 (например, в условиях № 1 на раму действуют сила F_1 под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D, и сила F_2 под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке Е т. Д.).

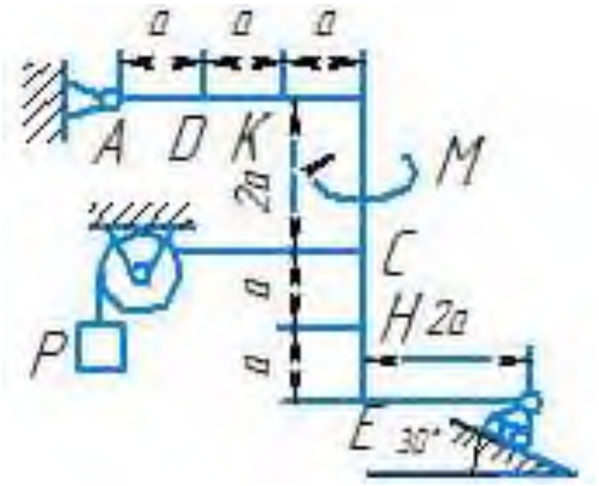
Определить реакции связей в точках А, В, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять а=0,5 м.

Рекомендации. Задача С 1 – на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении следует учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будут более простыми, если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы F часто удобно разложить ее на составляющие F' и F», для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона:

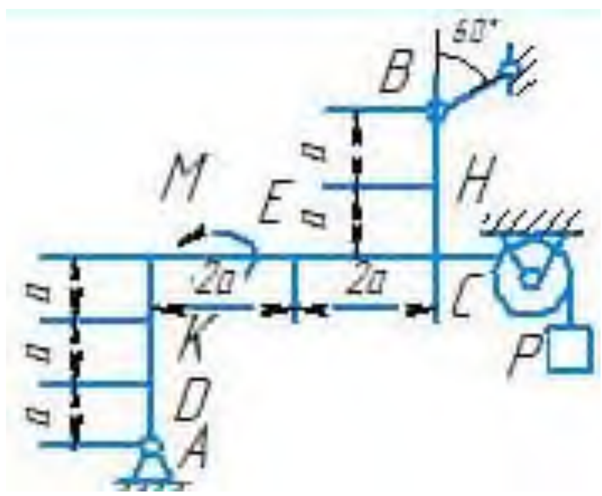
$$m_o(F)=m_o(F')+m_o(F'')$$

На рисунке 1 представлены расчетные схемы к задаче С 1.

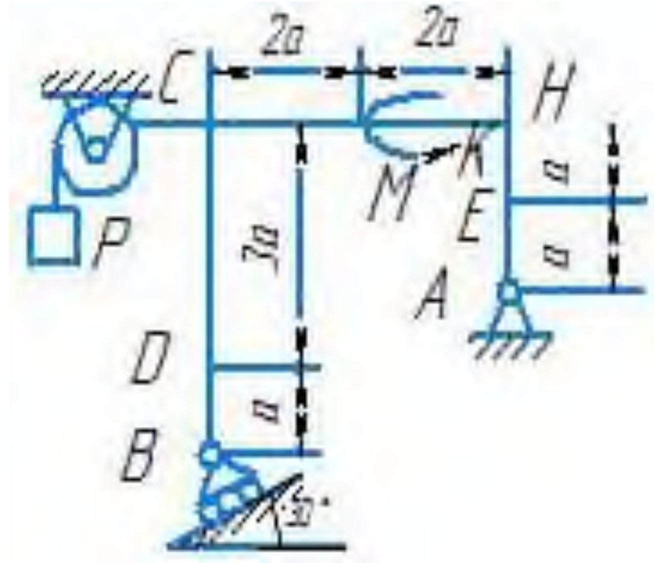
I



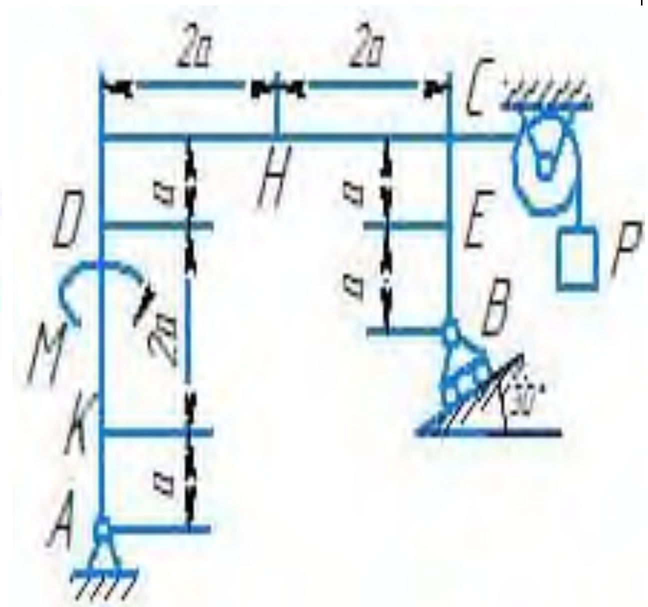
II



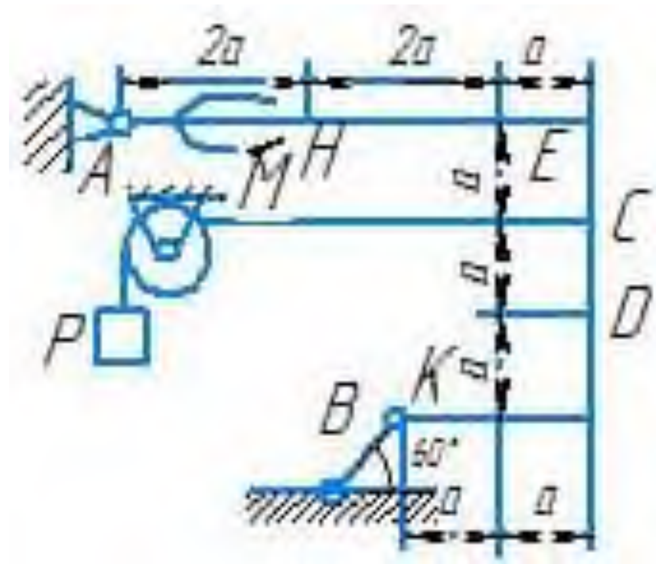
III



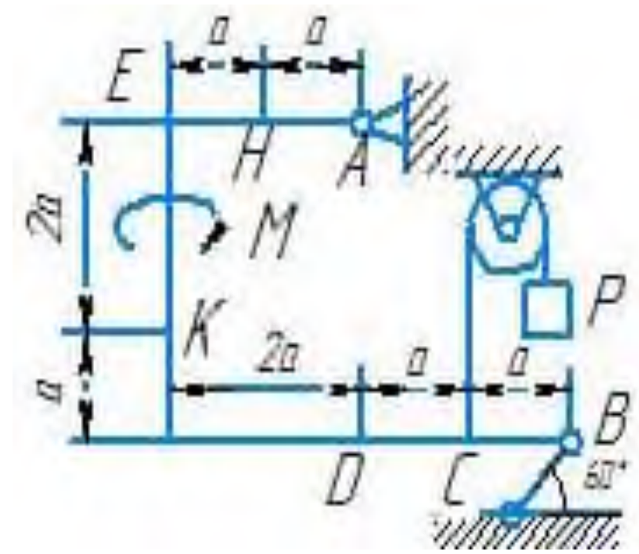
IV



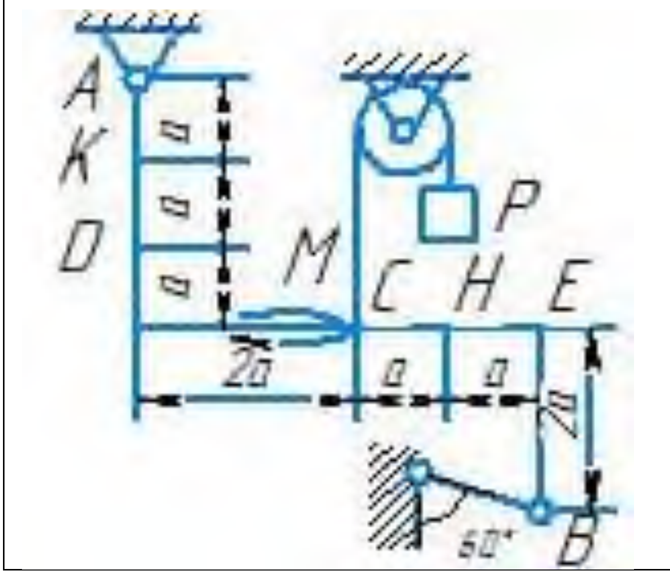
V



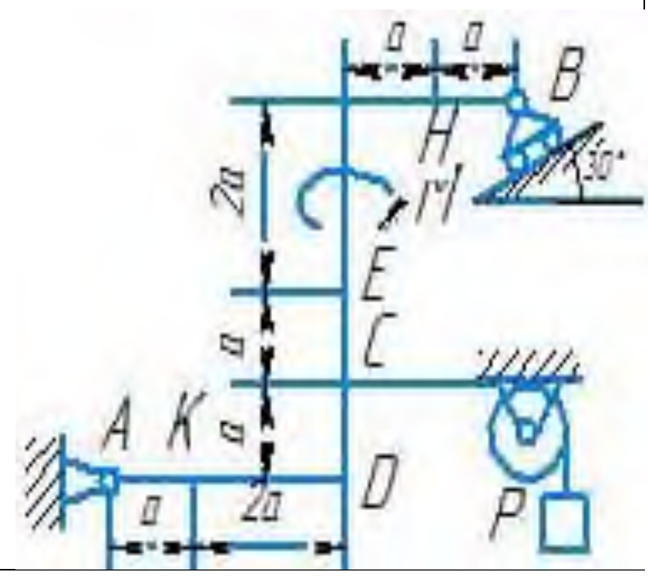
VI



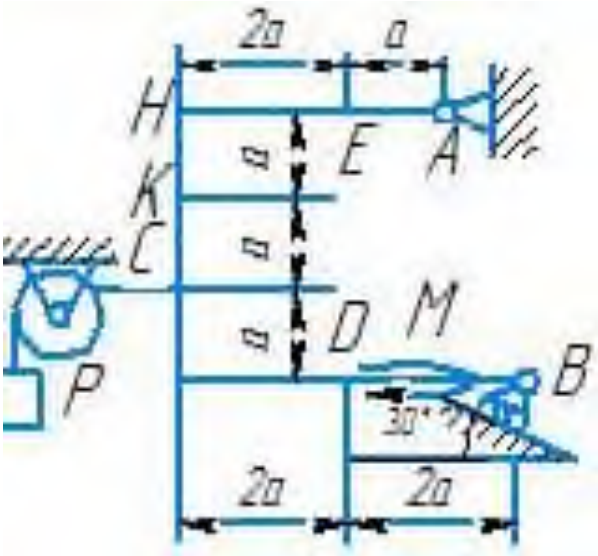
VII



VIII



IX



X

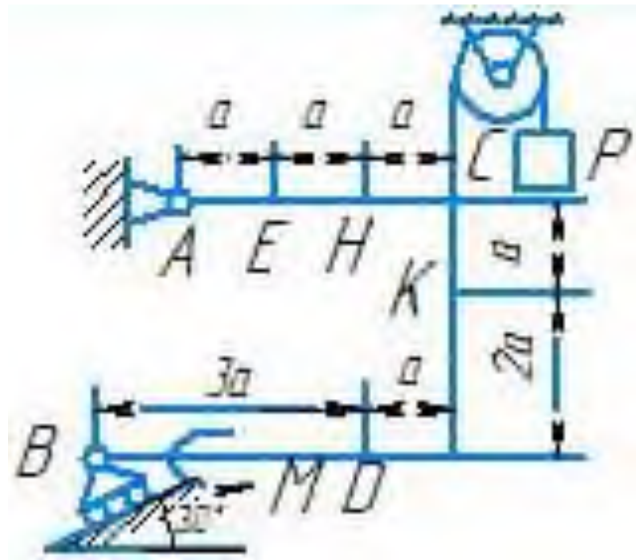
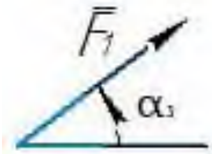
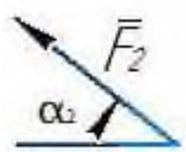
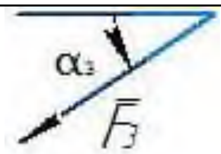
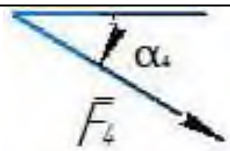


Рисунок 1 – Расчетные схемы к задаче С 1

В таблице 1 представлены числовые значения к задаче С 1.

Таблица 1 – Числовые значения к задаче С 1

								
	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН	
Номер условия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	H	30	-	-	-	-	K	60
1	-	-	D	15	E	60	-	-
2	K	75	-	-	-	-	E	30
3	-	-	K	60	H	30	-	-
4	D	30	-	-	-	-	E	60
5	-	-	H	30	-	-	D	75
6	E	60	-	-	K	15	-	-
7	-	-	D	60	-	-	H	15

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	H	60	-	-	D	30	-	-
9	-	-	E	75	K	30	-	-

1.1.1 Пример решения задачи С 1

Жесткая пластина ABCD (рисунок 1.2) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B – подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке 1.2.

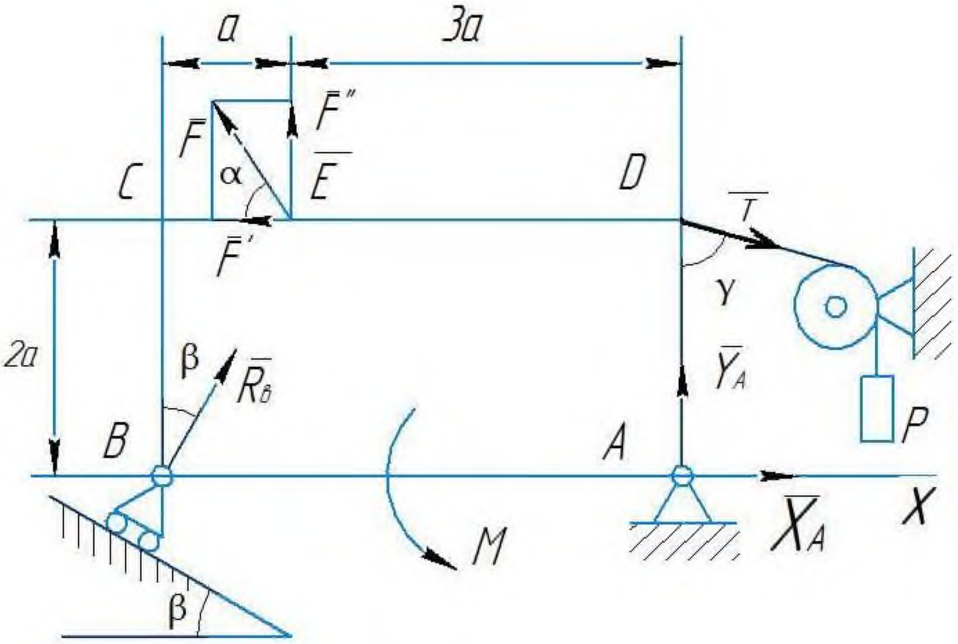


Рисунок 1.2 – Жесткая пластина

Дано: F = 25кН, α = 60°, P = 18кН, γ = 75°, M = 50 кН·м, β = 30°, a = 0,5м. Определить: реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

Решение: 1 Рассмотрим равновесие пластины.

Проведем координатные оси xy и изобразим действующие на пластину силы: силу F, пару сил с моментом M, натяжение троса T (по модулю T = P) и реакции связей X_A, $У_A$, R_a (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2 Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы F относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т.е. разложим силу F на составляющие F', F»:

$$F' = F \cdot \cos\alpha;$$
$$F'' = F \cdot \sin\alpha);$$

и учтем, что

$$m_A(F) = m_A(F') + m_A(F'').$$

Получим:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0 \tag{1.1}$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0 \tag{1.2}$$

$$\sum m_A(F_k) = 0 \; M - R_B \cos\beta \cdot 4a + F\cos\alpha \cdot 2a - F\sin\alpha \cdot 3a - T\sin\gamma \cdot 2a = 0 \tag{1.3}$$

Подставив в составленные уравнения, числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: X_A= - 8,5кН; $У_A$= - 23,3кН; R_B=7,3кН.

Знаки указывают, что силы X_A и $У_A$ направлены противоположно показанным направлениям рисунка С 2.

1.2 Задача С 2

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке С или соединены друг с другом шарнирно, или свободно опираются друг о друга. Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке А или шарнир, или жесткая заделка; в точке В или невесомый стержень ВВ', или гладкая плоскость, или шарнир; в точке D или невесомый стержень DD', или шарнирная опора на катках.

На каждую конструкцию действует: пара сил с моментом М = 60 кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности q = 20 кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в таблице 2 и 2.1; там же в столбце «Участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила F_2 под углом 60^0 к горизонтальной оси, приложенная в точке L, сила F_4 под углом 30^0 к горизонтальной оси, приложенная в точке Е, и нагрузка, распределенная на участке СК).

Определить реакции связей в точках А, В, С, вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять, а = 0,2 м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в таблице 2.1.

Рекомендации. Задача С 2 – на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем – равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

В таблице 2 и 2.1 указаны силы, их направления точки приложения, и участки действия распределенной нагрузки к задаче С 2.

Таблица 2 – Участок действия распределенной нагрузки к задаче С 2

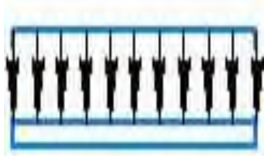
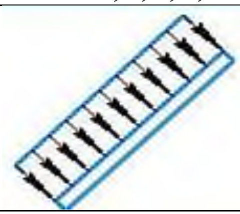
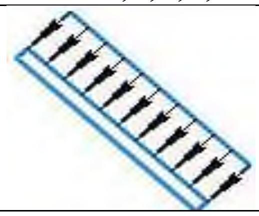
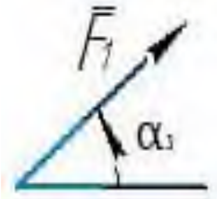
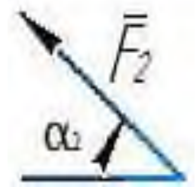
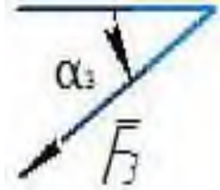
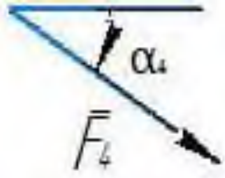
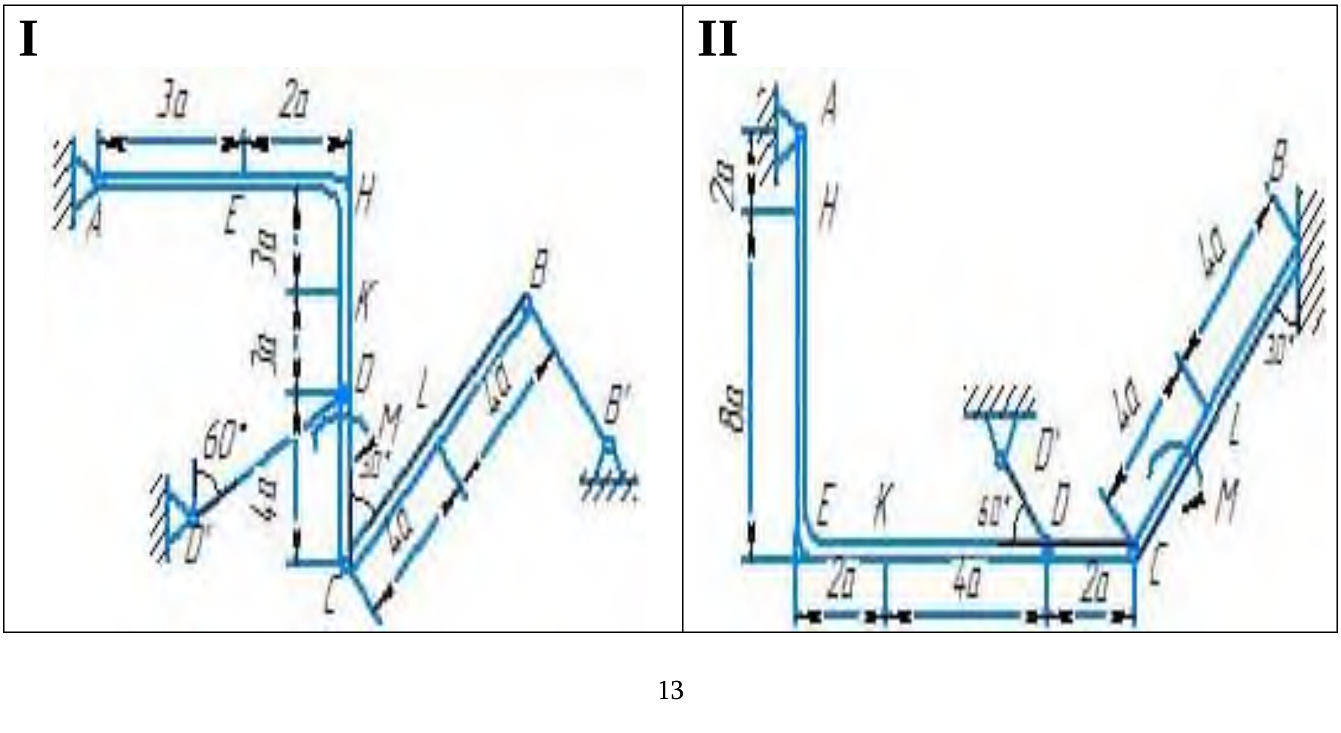
Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	Рис. 1,2,4,7,9	Рис. 0,3,5,6,8
			

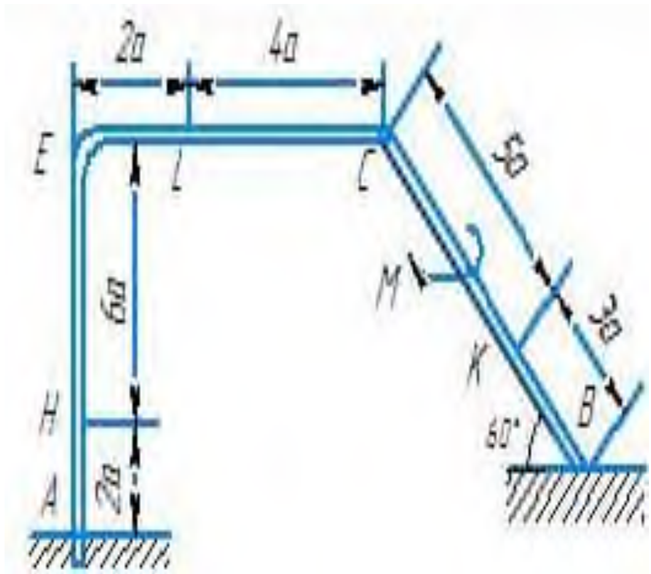
Таблица С 2.1 – Исходные данные к задаче С 2

Силы									Участок
	F_1 = 10 кН		F_2 = 20 кН		F_3 = 30 кН		F_4 = 40 кН		
Номер усло-вия	Точка приложения	α_1, град	Точка приложения	α_2, град	Точка приложения	α_3, град	Точка приложения	α_4, град	
0	K	60	-	-	H	30	-	-	CL
1	-	-	L	60	-	-	E	30	CK
2	L	15	-	-	K	60	-	-	AE
3	-	-	K	30	-	-	H	60	CL
4	L	30	-	-	E	60	-	-	CK
5	-	-	L	75	-	-	K	30	AE
6	E	60	-	-	K	75	-	-	CL
7	-	-	H	60	L	30	-	-	CK
8	-	-	K	30	-	-	E	15	CL
9	H	30	-	-	-	-	L	60	CK

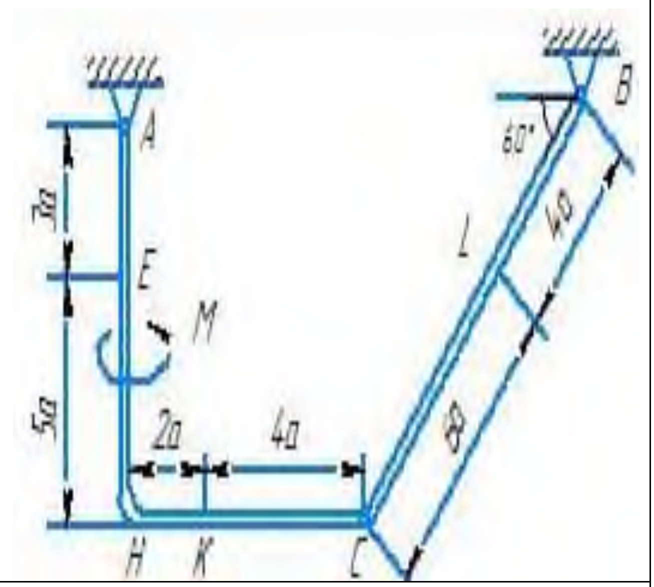
На рисунке 2 представлены расчетные схемы к задаче С2.



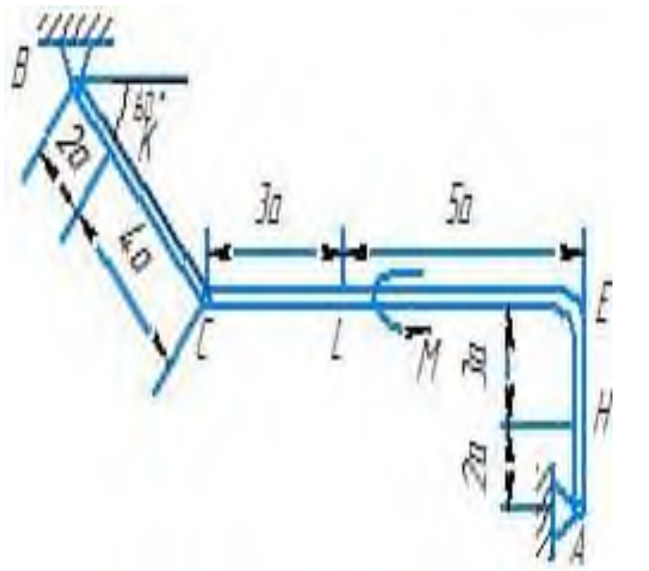
III



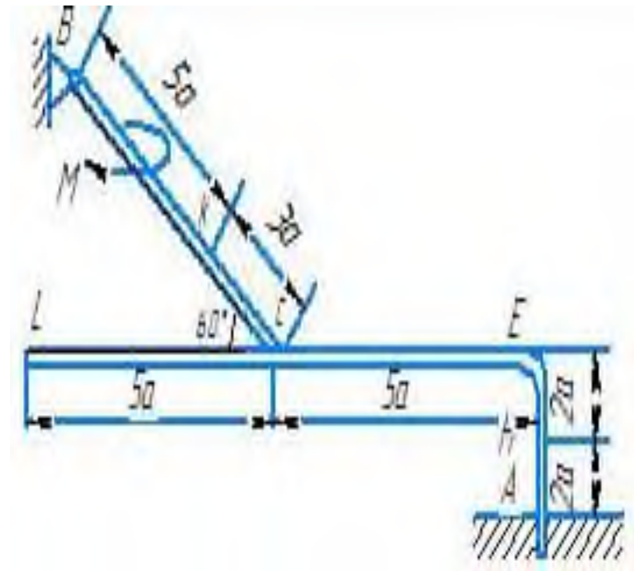
IV



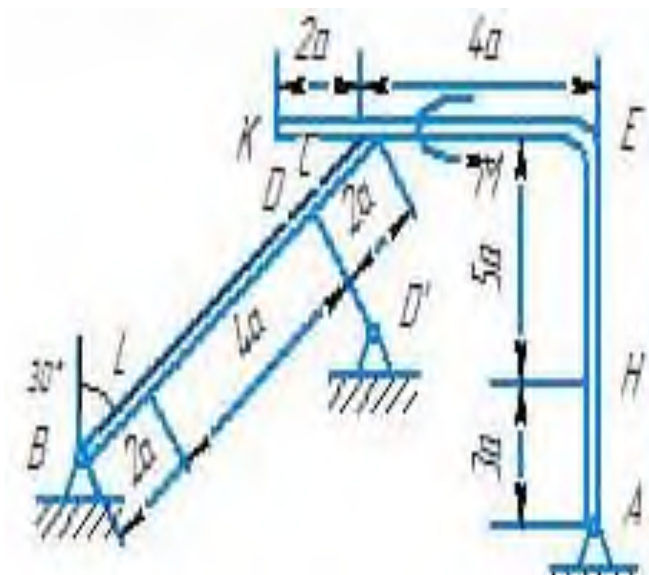
V



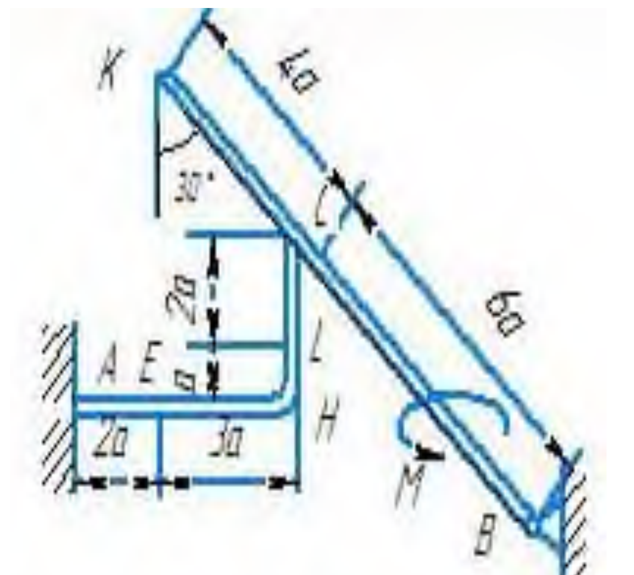
VI



VII



VIII



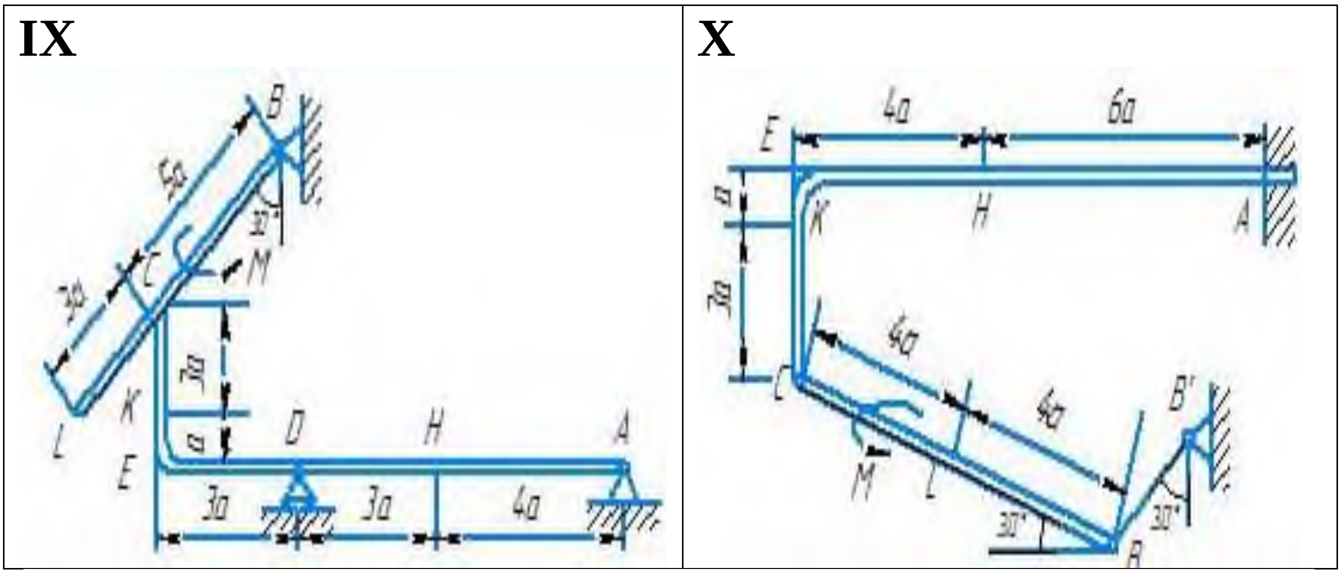


Рисунок 2 – Расчетные схемы к задаче С 2

1.2.1 Пример решения задачи С 2

На угольнике АВС (<АСВ = 90^0), конец А которого жестко заделан, в точке С опирается стержень DE.

Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила F, а к угольнику – равномерно распределенная на участке КВ нагрузка интенсивности q и пара с моментом М.

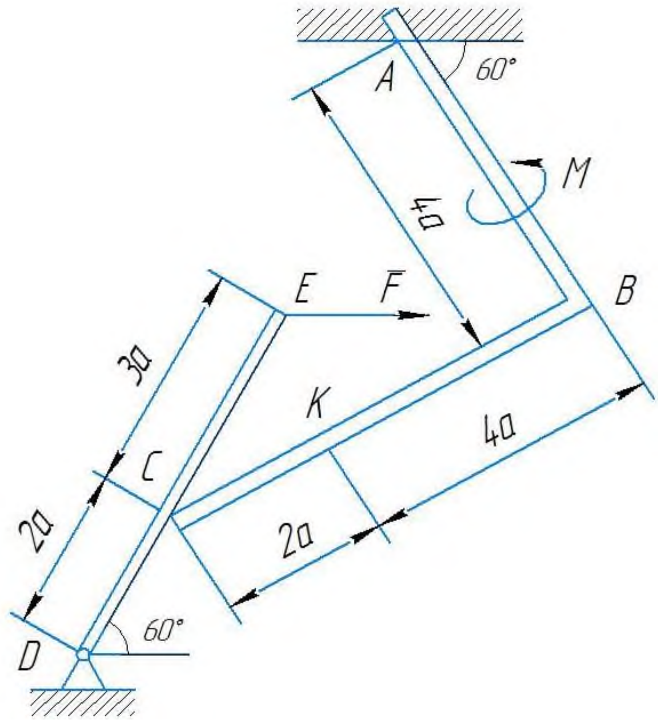


Рисунок 2.1 – Жесткий угольник и стержень

Дано: F=10кН, M=5кН·м, q=20кН/м, a=0,2м.

Определить: реакции в точках A, C, D, вызванные заданными нагрузками.

$$\sum F_{kx} = 0 \qquad X_D + F + N\sin 60^0 = 0 \tag{2.1}$$

$$\sum F_{ky} = 0 \qquad Y_D + N\cos 60^0 = 0 \tag{2.2}$$

$$\sum m_D(F_k) = 0 \qquad N\cdot 2a - F\sin 60^0 \cdot 5a = 0 \tag{2.3}$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника.

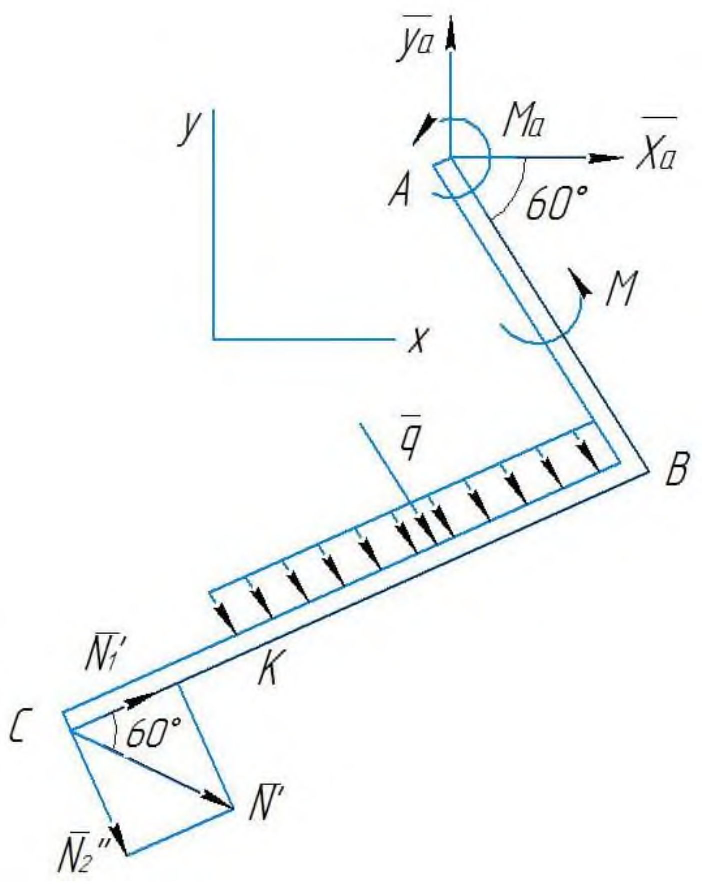


Рисунок 2.3 – Жесткий угольник

На него действуют сила давления стержня N', направленная противоположно реакции N, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой Q, приложенной в середине участка KB (численно Q = q·4a = 16 кН), пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими X_A, Y_A, и пары с моментом M_A.

Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0 \qquad X_A + Q\cos 60^0 + N'\sin 60 = 0 \tag{2.4}$$

$$\sum F_{ky} = 0 \qquad Y_A - Q\sin 60^0 - N'\cos 60 = 0 \tag{2.5}$$

$$\sum m_D(F_k) = 0 \qquad M_A + M + Q\cdot 2a + N'\cos 60^0 \cdot 4a + N'\cos 30^0 \cdot 6a = 0 \tag{2.6}$$

При вычислении момента силы N' разлагаем ее на составляющие $N_1^{'}$, $N_2^{'}$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения, числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (2.1-2.6), найдем искомые реакции.

При решении учитываем, что численно N' = N в силу равенства действия и противодействия.

Ответ: N = 21,7кН,Y_D = -10,8кН, X_D = 8,8кН, X_A = -26,8кН, Y_A = 24,7кН, M_A = -42,6 кН·м.

Знаки указывают, что силы Y_D, X_A и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

1.3 Контрольные вопросы

1. Абсолютно твердое тело, сила.
2. Задачи статики.
3. Исходные положения статики.
4. Закон параллелограмма сил.
5. Закон равенства действия и противодействия.
6. Связи и их реакции.
7. Сложение и разложение сил.
8. Равновесие системы сходящихся сил.
9. Момент силы относительно центра.
10. Пара сил.
11. Момент пары.
12. Свойства пары сил.
13. Теорема о параллельном переносе силы.
14. Приведение системы сил к данному центру.
15. Условия равновесия системы сил.
16. Теорема о моменте равнодействующей.
17. Алгебраические моменты силы.
18. Алгебраические моменты пары.
19. Равновесие плоской системы сил.
20. Равновесие плоской системы параллельных сил.

2 Кинематика

2.1 Задача К 1

Точка В движется в плоскости ху; (траектория точки на рисунках показана условно). Закон движения точки задан уравнениями

$$x=f_l(t),\ y=f_2(t).$$

где х и у выражены в сантиметрах, t - в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1=1с определить скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

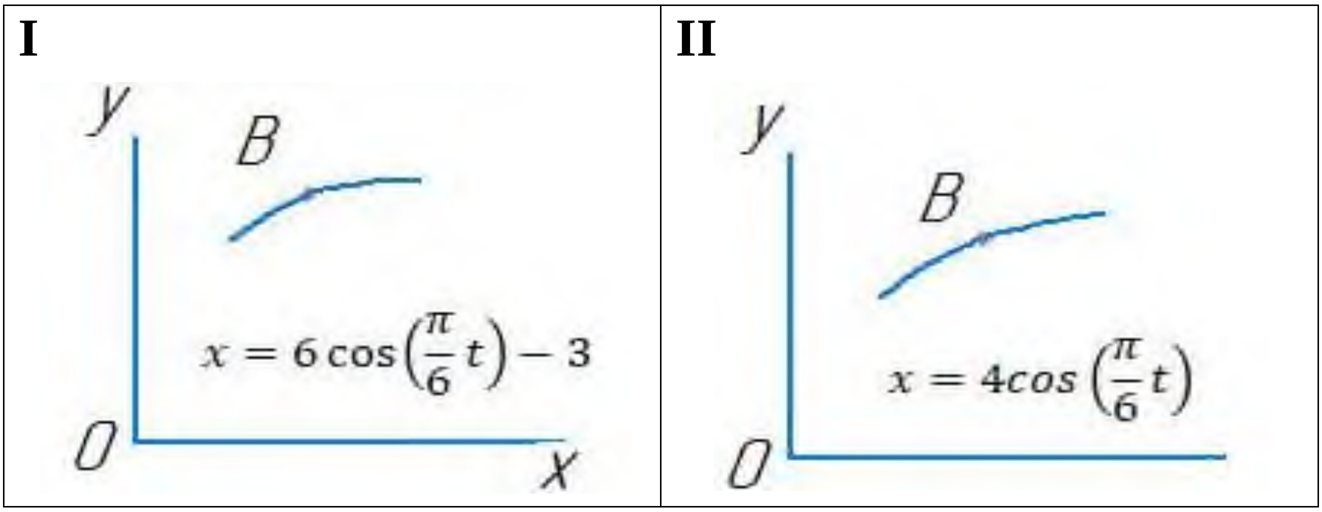
Зависимость $x=f_1(t)$ указана непосредственно на рисунках, а зависимость $y=f_2(t)$ дана в таблице 3.

Рекомендации. Задача К 1 относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки), а также формул, по которым определяются касательное и нормальное ускорения точки.

В данной задаче все искомые величины нужно определить только для момента времени t_1 = lс. В некоторых вариантах задачи при определении траектории или при последующих расчетах (для их упрощения) следует учесть известные из тригонометрии формулы:

$$\mathbf{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha=2 \cos^2 \alpha - 1;\ \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.}$$

На рисунке 3 представлены расчетные схемы к задаче К 1.



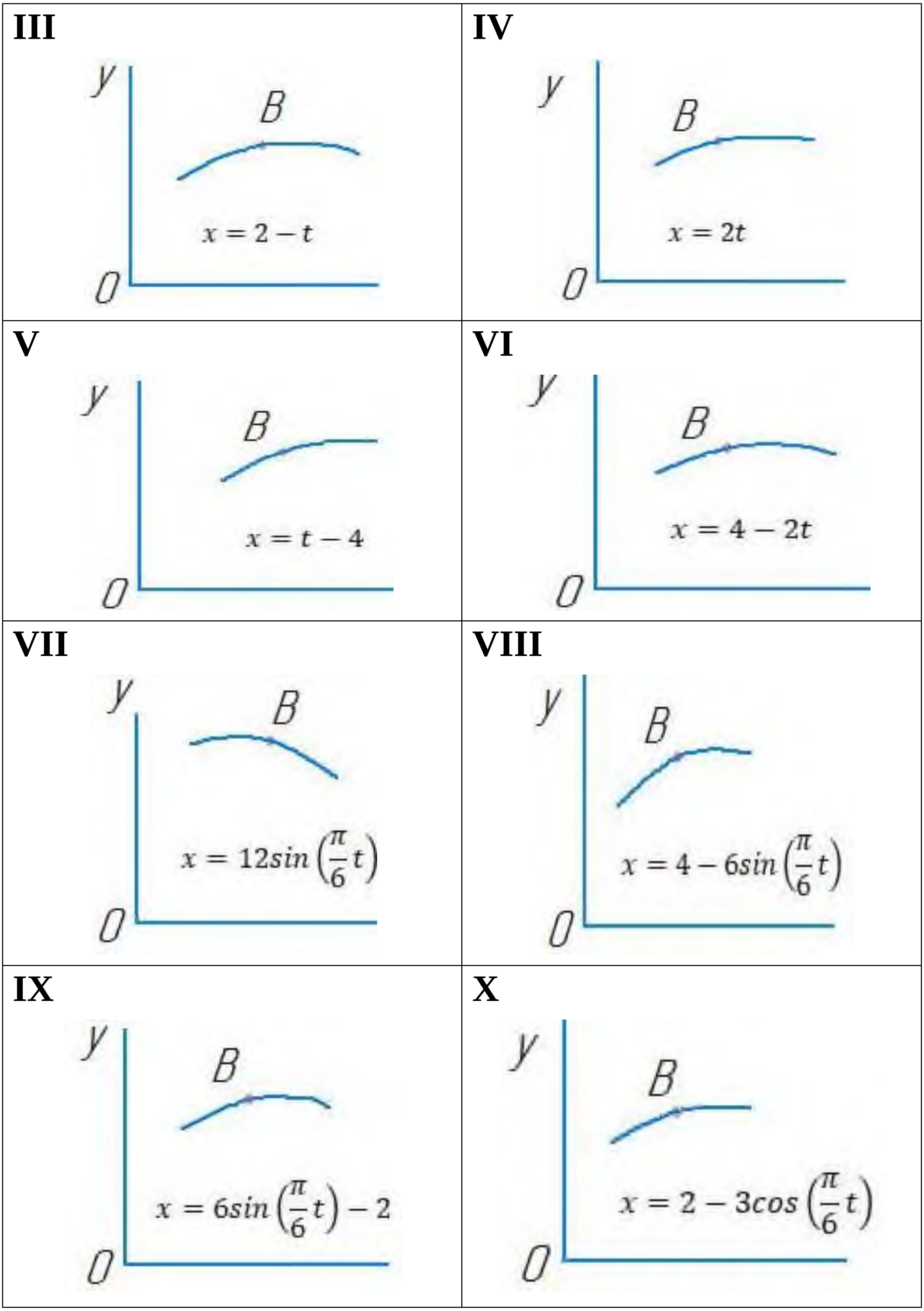


Рисунок 3 - Расчетные схемы к задаче К 1

Таблица 3 - Исходные данные к задаче К 1

Номер условия	$y=f_2(t)$		
	Рис. 0-2	Рис. 3-6	Рис. 7-9
0	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2t^2+2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)+2$
1	$-4-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$14-16\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$(2+t)^2$	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
3	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-4$	$2t^3$	$-10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
4	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)-2$	$2+2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$-10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-3t^2$	$8-12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
6	$2-6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$2-2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
7	$2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)-2$	$(t+1)^3$	$6-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
8	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)+5$	$2-t^3$	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)-3$
9	$3-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$4\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

2.1.1 Пример решения задачи К 1

Даны уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+3;$$

$$y=2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)-1;$$

где (x, y - в сантиметрах, t - в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени t_1=1с найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение: 1 Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \text{ или } cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right) \tag{3.1}$$

Из уравнений движения находим выражения соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим:

$$cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2};$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2};$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рисунок):

$$x = (y+1)^2 + 1 \tag{3.2}$$

2 Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$\vartheta_X = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$\vartheta_Y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_X^2} + \sqrt{\vartheta_Y^2}.$$

При t_1=1с

$$\vartheta_{1x} = 1{,}11 \text{см/с}, \ \vartheta_{1Y} = 0{,}73 \text{ см/с}, \ \vartheta_1 = 1{,}33 \text{см /с}. \tag{3.3}$$

3 Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_X = \frac{d\vartheta_X}{dt} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right);$$

$$a_Y = \frac{d\vartheta y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2}\ .$$

При t_1 =1 с

$a_{1X} = 0{,}87$ см/с^2, $a_{1Y} = -0{,}12$ см/с^2, $a_1 =$ 0,88 см/с^2. (3.4)

4 Касательное ускорение найдем, дифференцируя по времени, равенство $\vartheta^2 = \vartheta_X^2 + \vartheta_Y^2$. Получим:

$$2\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = 2\vartheta_X \frac{d\vartheta_X}{dt} + 2\vartheta_Y \frac{d\vartheta_Y}{dt}; \qquad (3.5)$$

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\vartheta_X \cdot a_X + \vartheta_Y \cdot a_Y}{\vartheta}.$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (3.5), определены и даются равенствами (3.3) и (3.4). Подставив в (3.5) эти числа, найдем сразу, что при t_1 =1 с $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2.

5 Нормальное ускорение точки

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}\ .$$

Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и $a_{1\tau}$, получим, что при t_1 =1с a_{1n}= 0,58 см/с^2.

6 Радиус кривизны траектории

$$\rho = \frac{\vartheta^2}{a_n}.$$

Подставляя сюда числовые значения ϑ_1 и a_{1n}, найдем, что при t =1 с ρ_1 = 3,05см.

Ответ: ϑ_1= 1,33 см/с,

a_1 = 0,88 см/с^2,

$a_{1\tau}$ =0,66 см/с^2,

a_{1n}=0,58 см/с^2,

ρ_1 =3,05 см.

2 Задача К 2

Прямоугольная пластина или круглая пластина радиуса R = 60см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = f_1(t)$заданному в таблице 4. Положительное направление отсчета угла φ показано на рисунках дуговой стрелкой. На рисунках 0, 1, 2, 5, 6 ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку О (пластина вращается в своей плоскости); на рисунках 3, 4, 7, 8, 9 ось вращения 00_1 лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD (рисунки 0 - 4) или по окружности радиуса R (рисунки 5 - 9) движется точка М; закон ее относительного движения, т. е, зависимость s=AM=f_2(t) (s выражено в сантиметрах, t - в секундах), задан в таблице отдельно для рисунков 0 - 4 и для рисунков 5 - 9; там же даны размеры b и I. На рисунках точка М показана в положении, при котором s=AM>0 (при s<0 точка М находится по другую сторону от точки А).

Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени t_1 = 1с.

Таблица 4 - Исходные данные к задаче К 2

Номер условия	Для всех рисунков $\varphi = f_1(t)$	Для рисунков 0 - 4		Для рисунков 5 - 9	
		b, см	$s = AM = f_2(t)$	l	$s = A\breve{M} = f_2(t)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	$4(t^2 - t)$	12	$50(3t - t^2) - 64$	R	$\frac{\pi}{3}R(4t^2 - 2t^3)$
1	$3t^2 - 8t$	16	$40(3t^2 - t^4) - 32$	4/3R	$\frac{\pi}{2}R(2t^2 - t^3)$
2	$6t^3 - 12t^2$	10	$80(t^2 - t) + 40$	R	$\frac{\pi}{3}R(2t^2 - 1)$
3	$t^2 - 2t^3$	16	$60(t^4 - 3t^2) + 56$	R	$\frac{\pi}{6}R(3t - t^2)$
4	$10t^2 - 5t^3$	8	$80(2t^2 - t^3) - 48$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
5	$2(t^2 - t)$	20	$60(t^3 - 2t^2)$	R	$\frac{\pi}{3}R(t^3 - 2t)$
6	$5t - 4t^2$	12	$40(t^2 - 3t) + 32$	4/3R	$\frac{\pi}{2}R(t^3 - 2t^2)$
7	$15t - 3t^3$	8	$60(t - t^3) + 24$	R	$\frac{\pi}{6}R(t - 5t^2)$

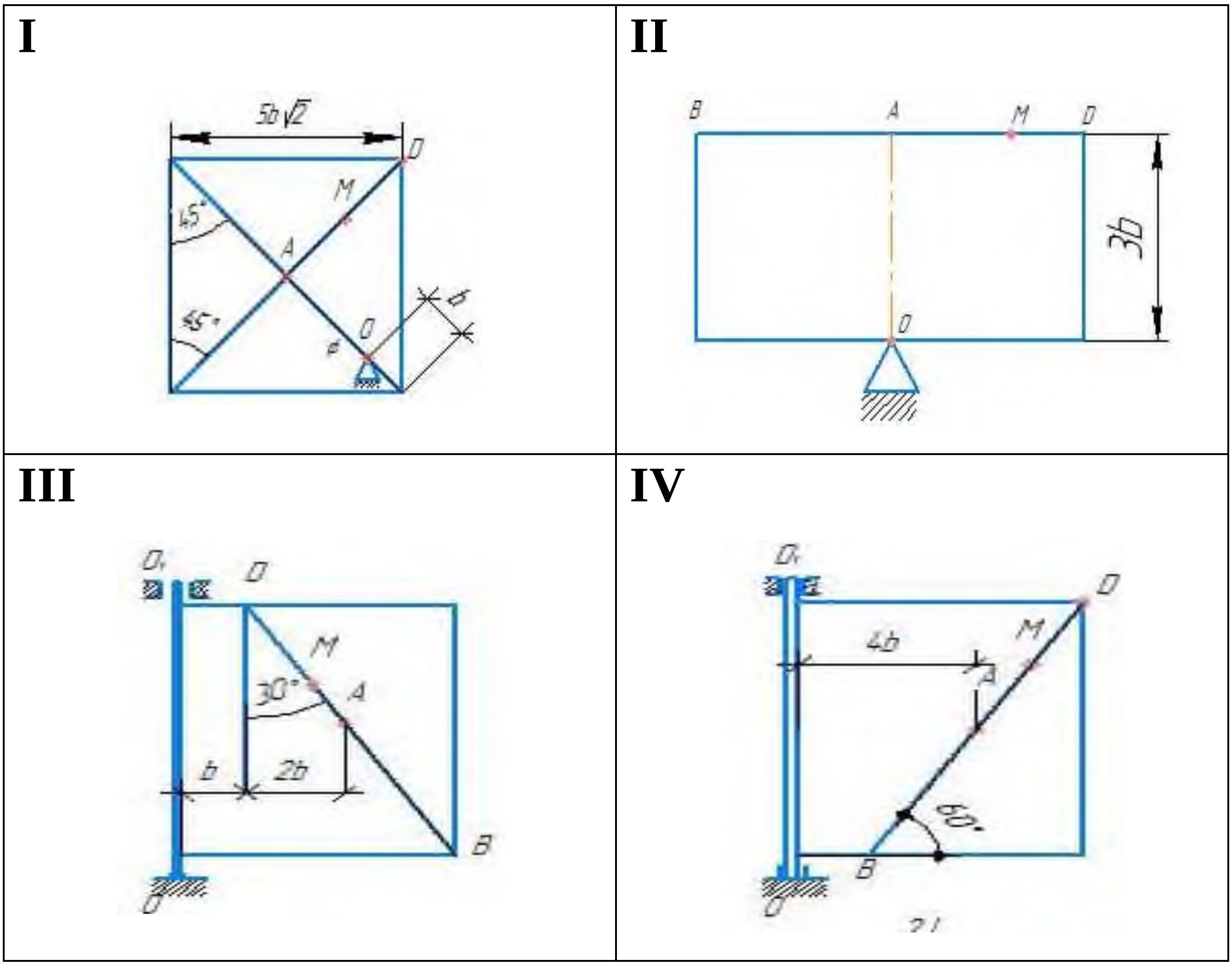
Продолжение таблицы 4

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
8	$2t^3 - 11t$	10	$50(5t^3 - t) - 30$	R	$\frac{\pi}{3}R(3t^2 - t)$
9	$6t^2 - 3t^3$	20	$40(t - 2t^3) - 40$	4/3R	$\frac{\pi}{2}R(t - 2t^2)$

Рекомендации. Задача К 2 - на сложное движение точки. Для ее решения воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить все расчеты, следует по условиям задачи определить, где находится точка М на пластине в момент времени t_1 = 1с, и изобразить точку именно в этом положении (а не в произвольном, показанном на рисунках к задаче).

В случаях, относящихся к рисункам V - IX, при решении задачи не подставлять числового значения R, пока не будут определены положение точки М в момент времени t_1 =1 с и угол между радиусами СМ и СА в этот момент.

На рисунке 4 представлены расчетные схемы к задаче К 2.



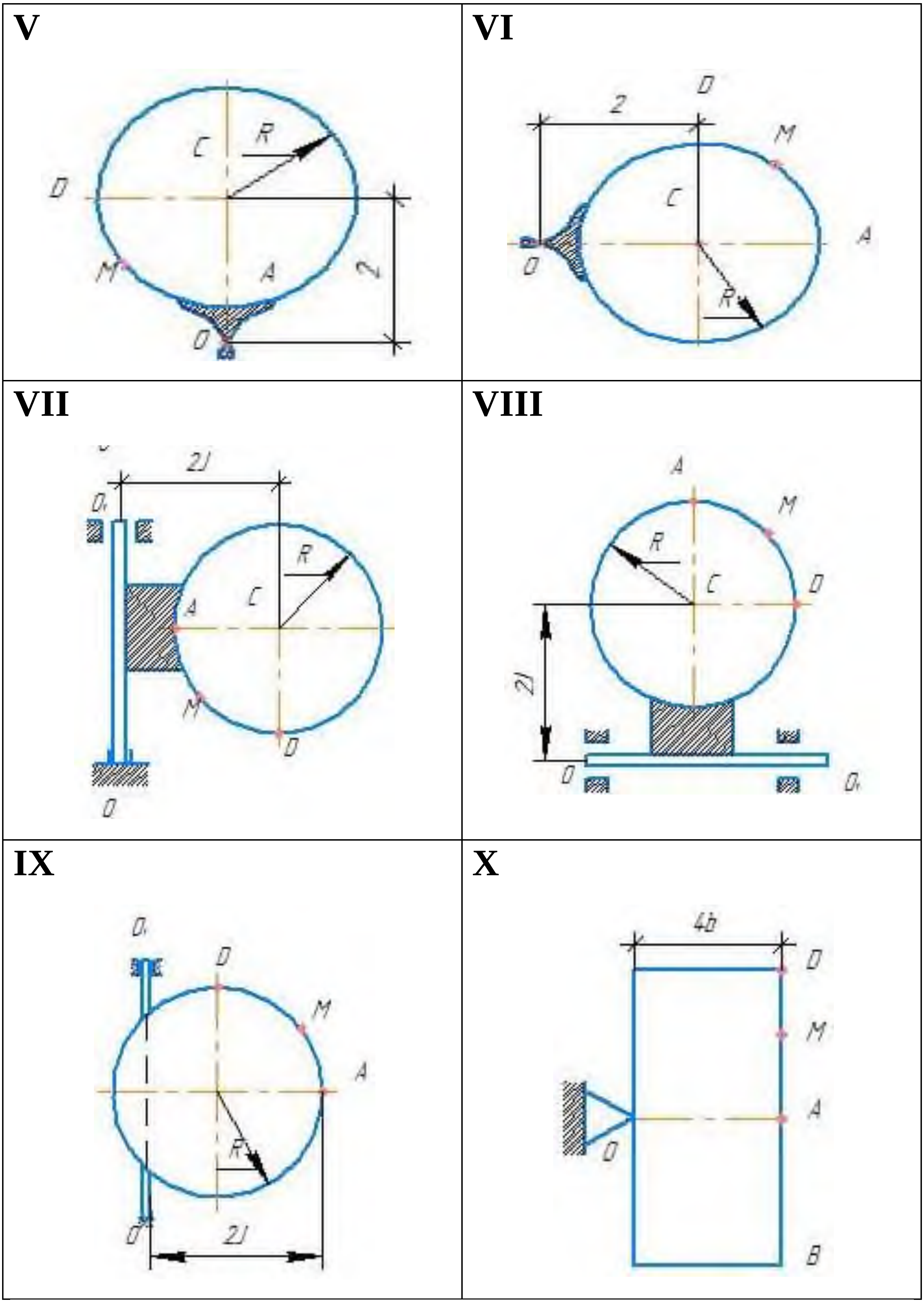


Рисунок 4 - Расчетные схемы к задаче К 2

2.2.1 Пример решения задачи К 2

Шар радиуса R (рисунок 4.1, а) вращается вокруг своего диаметра AB по закону $\varphi = f_1(t)$(положительное направление отсчета угла φ показано на рисунке 4.1, а дуговой стрелкой).

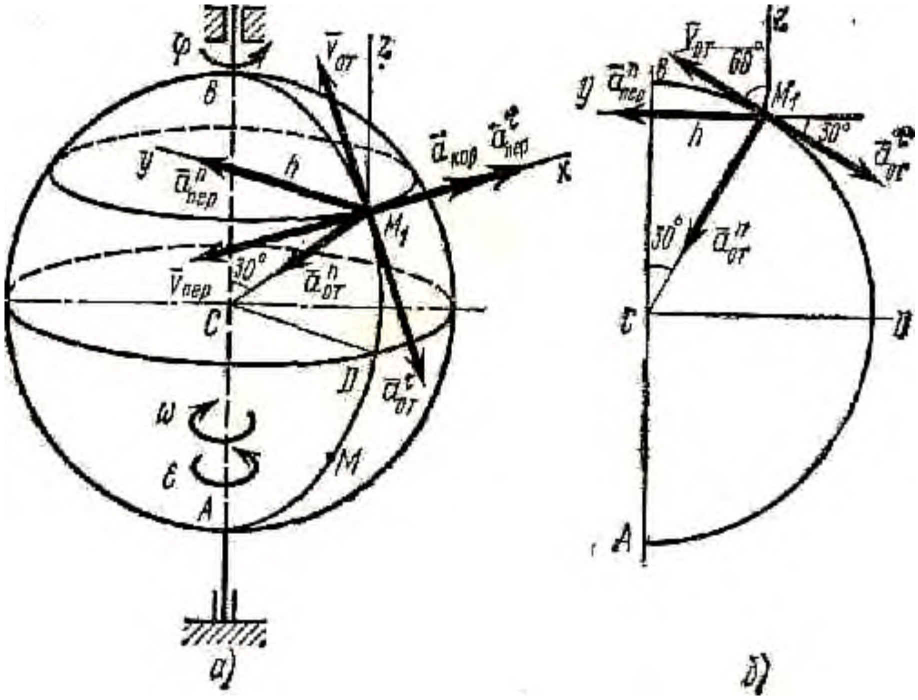


Рисунок 4.1 - Шар радиуса R

По дуге большого круга («меридиану») ADB движется точка M по закону s = AM = f_2(t); положительное направление отсчета s от A к D.

Дано: R=0,5м, $\varphi = 2t^3 - 4t^2$, $s = \dfrac{\pi}{6}R\left(7t - 2t^2\right)$($\varphi$ - в радианах, s - в метрах, t - в секундах).

Определить: $\vartheta_{аб}$ и $a_{аб}$ в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение: Рассмотрим движение точки M как сложное, считая ее движение по дуге ADB относительным (AB - относительная траектория точки), а вращение шара - переносным движением. Тогда абсолютная скорость $\vartheta_{аб}$ и абсолютное ускорение $a_{аб}$ точки найдутся по формулам:

$$\vartheta_{аб} = \vartheta_{от} + \vartheta_{пер}, \quad a_{аб} = a_{от} + a_{пер} + a_{кор}; \qquad (4.1)$$

где $a_{от} = a^{\tau}{}_{от} + a^{n}{}_{от}$;

$a_{пер} = a^{\tau}{}_{пер} + a^{n}{}_{пер}$.

Определим все характеристики относительного и переносного движений.

1 Относительное движение. Это движение происходит по закону

$$s = AM = \frac{\pi}{6}\left(7t - 2t^2\right); \qquad (4.2)$$

Сначала установим, где будет находиться точка М на дуге ADB в момент времени t_1. Полагая в уравнении (2) t=1 с, получим:

$$s_1 = \frac{5}{6}\pi R.$$

Тогда $\angle ACM = \frac{s_1}{R} = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ$

или $\angle BCM = 30°$.

Изображаем на рисунке 4.1, а точку в положении, определяемом этим углом (точка M_1).

Теперь находим числовые значения $\vartheta_{om}, a_{om}^{\tau}, a_{om}^{n}$:

$$\vartheta_{om} = s' = \frac{\pi}{6}R(7 - 4t);$$

$$a_{om}^{\tau} = \vartheta_{om}' = -\frac{2}{3}\pi R;$$

$$a_{om}^{n} = \frac{\vartheta_{om}^2}{\rho_{om}} = \frac{\vartheta_{om}^2}{R};$$

где ρ_{om} — радиус кривизны относительной траектории, т. е. дуги ADB.

Для момента времени t_1=1с, учитывая, что R=0,5м, получим:

$$\vartheta_{om} = \frac{\pi R}{6}3 = \frac{\pi}{4}\ \text{м/с};$$

$$a_{om}^{\tau} = -\frac{\pi}{3}\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{om}^{n} = \frac{\pi^2}{8}\ \text{м/с}^2. \qquad (4.3)$$

Знаки показывают, что вектор $V_{ОТ}$ направлен в сторону положительного отсчета расстояния s, а вектор $a^{\tau}_{от}$ - в противоположную сторону; вектор $a^{n}_{от}$ направлен к центру С дуги ADB. Изображаем все эти векторы на рисунке 4.1, а. Для наглядности приведен рисунок 4.1, б, где дуга ADB совмещена с плоскостью чертежа.

2 Переносное движение. Это движение (вращение) происходит по закону $\varphi = 2t^3 - 4t^2$. Найдем угловую скорость ω и угловое ускорение ε переносного вращения:

$$\omega = \varphi' = 6t^2 - 8t;$$
$$\varepsilon = \omega' = 12t - 8;$$

и при t_1=1с:

$$\omega = -2c^{-1}; \tag{4.4}$$

Знаки указывают, что при t_1 = 1 с направление ε совпадает с направлением положительного отсчета угла φ, а направление ω ему противоположно; отметим это на рисунке 4.1, а соответствующими дуговыми стрелками.

Для определения $\vartheta_{пер}$ и $a_{пер}$ находим сначала расстояние h точки M_1 от оси вращения. Получаем $h = R\sin 30°$=0,25м. Тогда в момент времени t_1 = 1с, учитывая равенства (4.4), получим:

$$\vartheta_{пер} = |\omega| h = 0{,}5 \text{ м/с};$$
$$a^{\tau}_{пер} = \varepsilon h = 1 \text{ м/с}^2;$$
$$a^{n}_{пер} = \omega^2 h = 1 \text{ м/с}^2. \tag{4.5}$$

Изображаем на рисунке 4.1, а векторы $\vartheta_{пер}$ и $a^{\tau}_{пер}$ с учетом направлений ω и ε вектор $a^{n}_{пер}$ (направлен к оси вращения).

3 Кориолисово ускорение. Так как угол между вектором $\vartheta_{от}$ и осью вращения (вектором ω) равен 60°, то численно в момент времени t_1 = l с [см. равенства (4.3) и (4.4)]

$$a_{кор} = 2|\vartheta_{от}| \cdot |\omega| \sin 60^{\circ} = 2\frac{\pi}{4} 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2{,}72 \text{ м/с}^2. \tag{4.6}$$

Направление $a_{кор}$ найдем, спроектировав вектор $\vartheta_{от}$ на плоскость, перпендикулярную оси вращения (проекция направлена так же, как вектор $a_{пер}^{\tau}$), и повернув затем эту проекцию в сторону ω, т, е. по ходу часовой стрелки, на 90°. Иначе направление $a_{кор}$ можно найти, учтя, что $a_{кор} = 2(\omega \times \vartheta_{от})$ Изображаем вектор $a_{кор}$ на рисунке 4.1, а.

Теперь можно вычислить значения $\vartheta_{аб}$ и $a_{аб}$.

4. Определение $\vartheta_{аб}$. Так как $\vartheta_{аб} = \vartheta_{от} + \vartheta_{пер}$, а векторы $\vartheta_{от}$ и $\vartheta_{пер}$ взаимно перпендикулярны (см. рисунок 4.1, а), то в момент времени t_1=1с

$$\vartheta_{аб} = \sqrt{\vartheta_{от}^2 + \vartheta_{пер}^2};$$

$$\vartheta_{аб} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + (0{,}5)^2} = 0{,}93 \text{ м/с}.$$

5. Определение $a_{аб}$. По теореме о сложении ускорений

$$a_{кор} = a_{от}^{\tau} + a_{от}^{n} + a_{пер}^{\tau} + a_{пер}^{n} + a_{кор}. \qquad (4.7)$$

Для определения $a_{аб}$ проведем координатные оси M_1xyz (см. рисунок 4.1, а) и вычислим проекции вектора $a_{аб}$ на эти оси. Учтем при этом что векторы $a_{пер}^{\tau}$ и $a_{кор}$ лежат на проведенной оси x, а векторы $a_{от}^{\tau}$, $a_{от}^{n}$ и $a_{пер}$ расположены в плоскости дуги ADB, т. е. в плоскости M_1yz (см. рисунок 4.1, б). Тогда, проектируя обе части равенства (4.7) на координатные оси и учтя одновременно равенства (4.3), (4.5), (4.6), получим для момента времени t_1=1с:

$$a_{абч} = a_{пер}^{\tau} + a_{кор} = 1 + 2{,}72 = 3{,}72 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{абу} = a_{пер}^{n} + a_{от}^{n} \cdot \cos 60^{\circ} - \left|a_{от}^{\tau}\right| \cdot \cos 30^{\circ} = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0{,}71 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{абz} = -\left|\ a_{от}^{\tau}\ \right| \cdot \cos 60^{\circ} - a_{от}^{n} \cdot \cos 30^{\circ} = -\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2\sqrt{3}}{16}\ \right) = -1{,}59 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда находим значение $a_{аб}$ в момент времени t_1 =1 с:

$$a_{аб} = \sqrt{a_{абx}^2 + a_{абy}^2 + a_{абz}^2} = 4{,}1 \text{ м/с}^2.$$

О т в е т: $\vartheta_{аб} = 0{,}93$ м/с $a_{аб}$=4,1 м/с^2

2.3 Контрольные вопросы

1. Кинематика точки.
2. Способы задания движения точки (векторный способ).
3. Вектор скорости точки.
4. Вектор ускорения точки.
5. Определение скорости точки при координатном способе задания движения.
6. Определение ускорения точки при координатном способе задания движения.
7. Касательное и нормальное ускорение точки.
8. Поступательное движение твердого тела.
9. Вращательное движение твердого тела вокруг оси.
10. Угловая скорость.
11. Угловое ускорение.
12. Равномерное и равнопеременное вращения.
13. Скорости точек вращающегося тела.
14. Ускорение точек вращающегося тела.
15. Уравнение плоскопараллельного движения.
16. Определение скоростей точек плоской фигуры.
17. Мгновенный центр скоростей.
18. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку (уравнение движения, угловая скорость).
19. Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку (геометрическая картина движения тела, угловое ускорение).
20. Относительное, переносное и абсолютное движения.

3 Динамика

3.1 Задача Д 1

Груз D массой m, получив в точке A начальную скорость ϑ_0, движется в изогнутой трубе ABC, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный.

На участке AB на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила Q (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды R, зависящая от скорости ϑ груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке AB пренебречь.

В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу f = 0,2) и переменная сила F, проекция которой F_x на ось x задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние AB = L или время t_1 движения груза от точки A до точки B, найти закон движения груза на участке BC, т. е. x = f(t), где x = BD.

Рекомендации. Задача Д 1 - на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части.

Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке AB, учтя начальные условия.

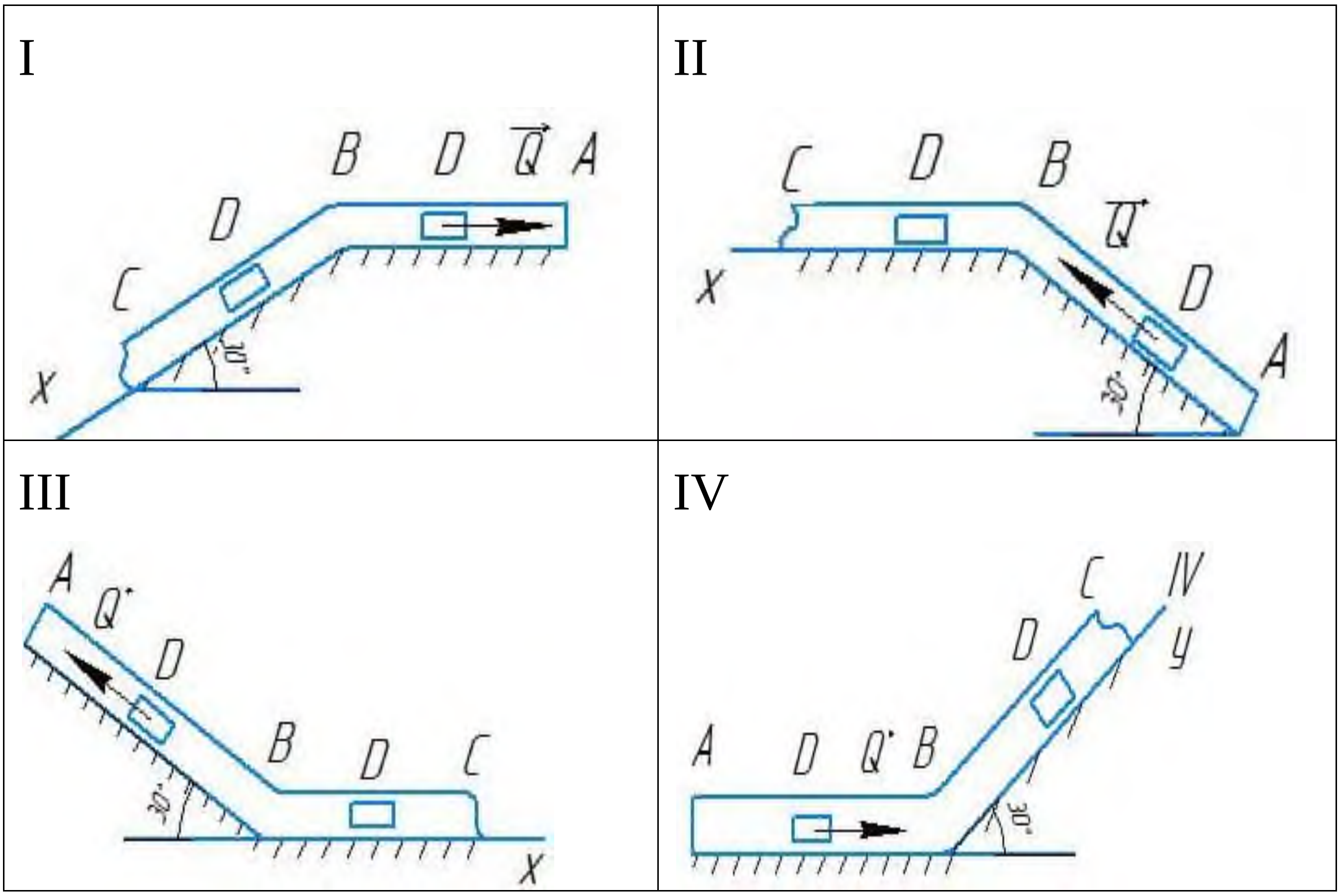
Затем, зная время движения груза на участке AB или длину этого участка, определить скорость груза в точке B. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке BC. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке BC тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке B, и полагая в этот момент t=0. При интегрировании уравнения движения на участке AB в случае, когда задана длина L участка, целесообразно перейти к переменному x, учтя, что

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = \vartheta_x \frac{d\vartheta_x}{dx}.$$

Таблица 5 - Исходные данные к задаче Д 1

Номер условия	m, кг	ϑ_0, м/с	Q, Н	R, Н	L, м	t, с	F_x, Н
0	2	20	6	$0{,}4\vartheta$	-	2,5	2sin(4t)
1	2,4	12	6	$0{,}8\vartheta^2$	1,5	-	6t
2	4,5	18	9	$0{,}5\vartheta$	-	3	3sin(2t)
3	6	14	22	$0{,}6\vartheta^2$	5	-	-3cos(2t)
4	1,6	18	4	$0{,}4\vartheta$	-	2	4cos(4t)
5	8	10	16	$0{,}5\vartheta^2$	4	-	-6sin(2t)
6	1,8	24	5	$0{,}3\vartheta$	-	2	$9t^2$
7	4	12	12	$0{,}8\vartheta^2$	2,5	-	-8cos(4t)
8	3	22	9	$0{,}5\vartheta$	-	3	2cos(2t)
9	4,8	10	12	$0{,}2\vartheta^2$	4	-	-6 sin(4t)

На рисунке 5 представлены расчетные схемы к задаче Д 1.



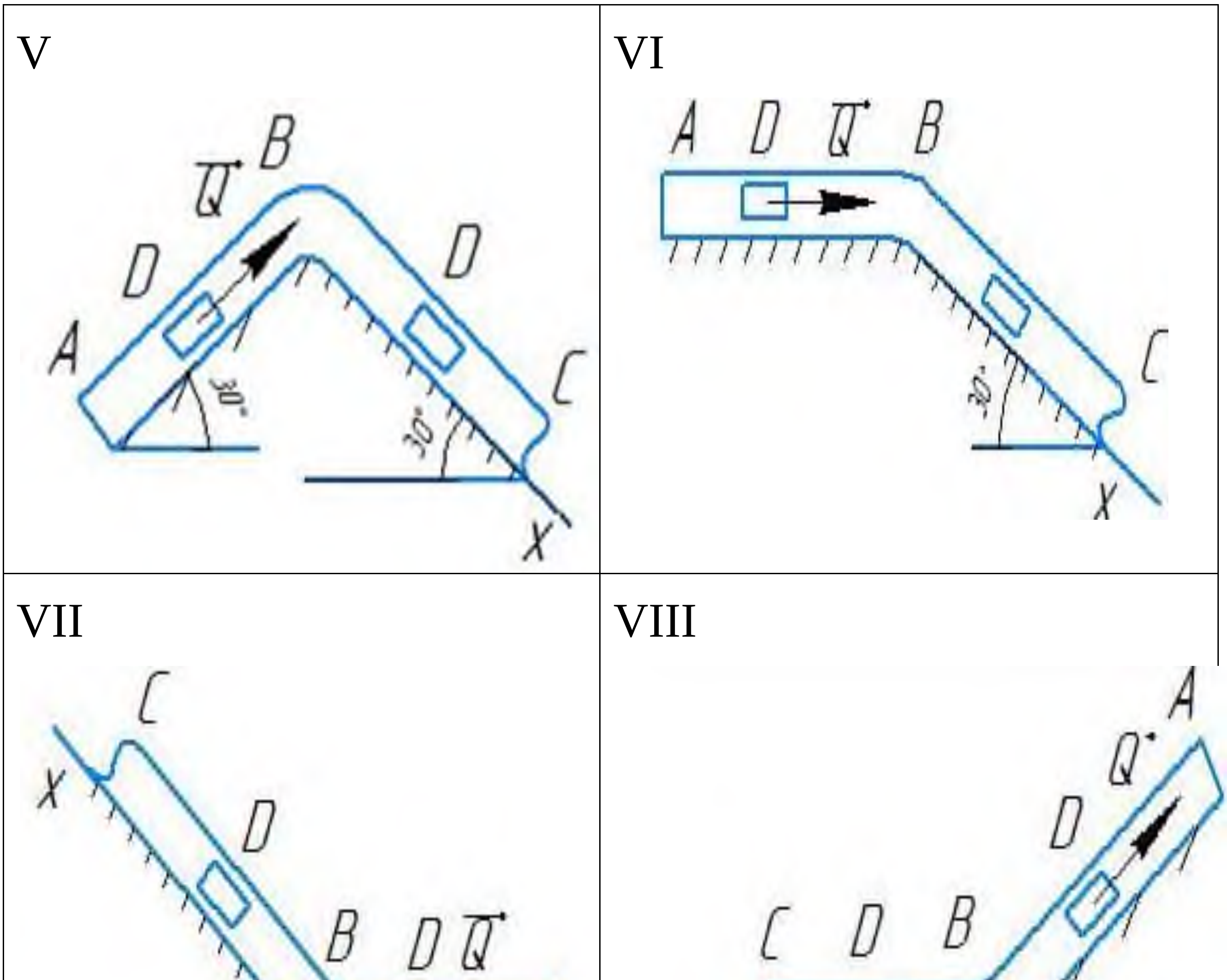


Рисунок 5 - Расчетные схемы к задаче Д 1

3.1.1 Пример решения задачи Д 1

На вертикальном участке AB трубы (рисунок 5.1) на груз D массой m действуют сила тяжести и сила сопротивления R; движение от точки A, где ϑ_0 =0, до точки B длится t = 1с.

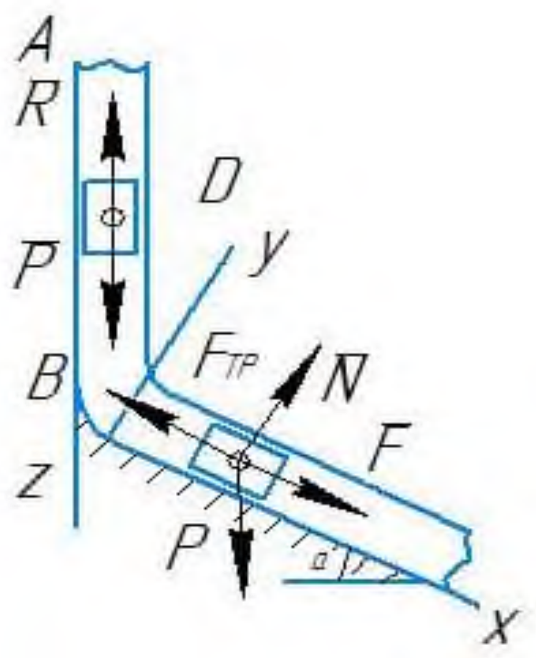


Рисунок 5.1 - Изогнутая труба ABC

На наклонном участке BC на груз действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу равен f) и переменная сила F = F(t), заданная в ньютонах.

Дано: m = 8 кг, R = μϑ^2, μ = 0,2 кг/м, ϑ_0 = 0, t_1 = 2с, f = 0,2 Fx = 16 sin(4t), α=30°.

Определить: x=f (t) - закон движения груза на участке BC.

Решение: 1 Рассмотрим движение груза на участке AB, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы P = mq и R. Проводим ось Az и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{d\vartheta_z}{dt} = \sum F_{kz};$$

$$m\frac{d\vartheta_z}{dt} = P_z + R_z. \qquad (5.1)$$

Далее находим Pz = P = m·q, Rz = -R = -μ ϑ^2 подчеркиваем, что в уравнении все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят. Учтя еще, что $\vartheta_z = \vartheta$, получим:

$$m\frac{d\vartheta}{dt} = m\,\mathrm{q} - \mu\vartheta^2 \;;$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mq}{\mu} - \vartheta^2\right). \tag{5.2}$$

Введем для сокращения записей обозначение

$$n^2 = \frac{mq}{\mu} = 400 \ (n{=}20 \text{ м/с}); \tag{5.3}$$

где q≈м/с^2.

Тогда, разделяя в уравнении (5.2) переменные и взяв затем от обеих частей равенства интегралы, получим

$$\frac{d\vartheta}{n^2 - \vartheta^2} = \frac{\mu}{m}dt\,;$$

$$\frac{1}{2n}In\frac{n+\vartheta}{n-\vartheta} = \frac{\mu}{m}t + C_1. \tag{5.4}$$

По начальным условиям при t = 0 $\vartheta = \vartheta_0 = 0$, что дает

$$C_1 = \frac{1}{2n}In1 = 0.$$

Введя еще одно обозначение

$$k = n\frac{\mu}{m} = 0{,}5 \text{ с}^{-1}; \tag{5.5}$$

получим из (5.4)

$$In\frac{n+\vartheta}{n-\vartheta} = 2kt\,;$$

$$\frac{n+\vartheta}{n-\vartheta} = e^{2kt}.$$

Отсюда находим, что

$$\vartheta = n\frac{e^{2kt}-1}{e^{2kt}+1}. \tag{5.6}$$

Полагая здесь t = t_1 = 2с и заменяя n и k их значениями (5.3) и (5.5), определим скорость ϑ_B груза в точке В (число e=2,7):

$$\vartheta_B = 20\frac{e^2-1}{e^2+1} = 15{,}2\ \text{м/с}. \tag{5.7}$$

2. Рассмотрим движение груза на участке ВС; найденная скорость ϑ_B будет для движения на этом участке начальной скоростью $(\vartheta_0 = \vartheta_B)$. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы P = mq, N, $F_{тр}$ и F. Проведем из точки В оси Вх и Ву и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось Вх:

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = P_x + N_x + F_{трx} + F_x;$$

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = mq\sin\alpha - F_{тр} + F_x; \tag{5.8}$$

где $F_{тр}=f\cdot N$.

Для определения N составим уравнение в проекции на ось Ву. Так как ay=0, получим 0 = N - mq·cosα, откуда N = m·q·cosα.

Следовательно, Fтр = f·m·q·cosα; кроме того, Fx = 16·sin(4t) и уравнение (5.8) примет вид

$$m\frac{d\vartheta_x}{dt} = mq(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t). \tag{5.9}$$

Разделив обе части равенства на m, вычислим q·(sinα-f·cosα) = q·(sin30° - 0,2·cos30°) = 3,2; 16/m = 2 и подставим эти значения в (5.9). Тогда получим:

$$\frac{d\vartheta_x}{dt} = 3{,}2 + 2\sin(4t). \tag{5.10}$$

Умножая обе части уравнения (10) на dt и интегрируя, найдем:

$$\vartheta_x = 3{,}2t - \frac{1}{2}\cos(4t) + C_1. \qquad (5.11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке B, считая в этот момент t = 0. Тогда при t = 0 $\vartheta = \vartheta_0 = \vartheta_B$, где ϑ_B дается равенством (5.7). Подставляя эти величины в (5.11), получим:

$$C_2 = \vartheta_B + 0{,}5\cos 0 = 15{,}2 + 0{,}5 = 15{,}7.$$

При найденном значении C2 уравнение (5.11) дает:

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 0{,}5\cos(4t) + 15{,}7. \qquad (5.12)$$

Умножая здесь обе части на dt и снова интегрируя, найдем:

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}13\sin(4t) + 15{,}7t + C_3. \qquad (5.13)$$

Так как при t=0 x=0, то C_3=0 и окончательно искомый закон движения груза будет:

$$x = 1{,}6t^2 + 15{,}7t - 0{,}13\sin(4t) \qquad (5.14)$$

где x - в метрах, t - в секундах.

3.2 Задача Д 2

Груз 1 массой m укреплен на пружинной подвеске в лифте (рисунок 6, таблица 6). Лифт движется вертикально по закону

$$\xi = \frac{1}{2}(\alpha_1 t^2) + \alpha_2 \sin(\omega t) + \alpha_3 \cos(\omega t);$$

где ось ξ направлена по вертикали вверх;

ξ выражено в метрах;

t - в секундах).

На груз действует сила сопротивления среды $R = \mu\vartheta$ где ϑ - скорость груза по отношению к лифту.

Найти закон движения груза по отношению к лифту, т. е. x= f(t); начало координат поместить в положении статического равновесия груза при неподвижном лифте (во избежание ошибок в знаках, направить ось x в сторону удлинения пружины, а груз изобразить в положении, при котором x>0 и пружина растянута). При подсчетах можно принять q≈10 м/с^2. Массой пружин и соединительной планкой 2 пренебречь.

В таблице обозначено: c_1, c_2, c_3 - коэффициенты жесткости пружин, λ_0 - удлинение пружины с эквивалентной жесткостью в начальный момент времени t=0, ϑ_0 - начальная скорость груза по отношению к лифту (направлена вертикально вверх). Прочерк в столбцах c_1, c_2, c_3 означает, что соответствующая пружина отсутствует и на чертеже изображаться не должна. Если при этом конец одной из оставшихся пружин окажется свободным, его следует прикрепить в соответствующем, месте или к грузу или к потолку (полу) лифта; то же следует сделать, если свободными окажутся соединенные планкой 2 концы обеих оставшихся пружин.

Условие $\mu = 0$ означает, что сила сопротивления R отсутствует.

Рекомендации. Задача Д 2 охватывает одновременно темы относительное движение и колебания материальной точки. Сначала нужно составить дифференциальное уравнение относительного движения (по отношению к лифту) рассматриваемого в задаче груза, для чего присоединить к действующим силам переносную силу инерции. При этом заменить подвеску одной пружиной с жесткостью, эквивалентной жесткости подвески. Затем проинтегрировать полученное линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, учтя начальные условия.

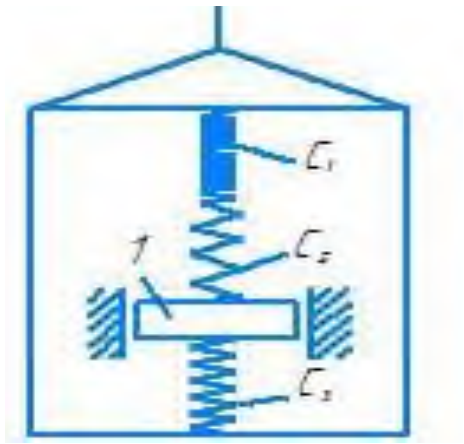
В таблице 6 представлены исходные данные к задаче Д 2.

Таблица 6 - Исходные данные к задаче Д 2

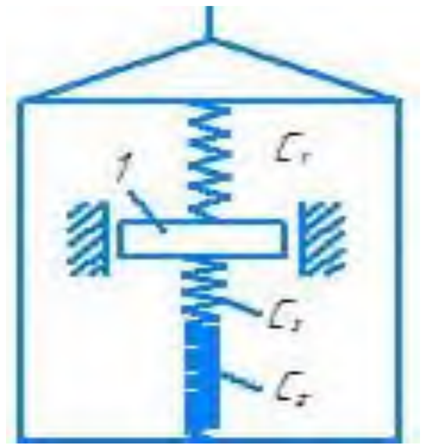
Номер условия	m, кг	c_1, Н/м	c_2, Н/м	c_3, Н/м	α_1, м/с^2	α_2, м	α_3, м	ω, 1/с	μ, Нс/м	λ_0, м	ϑ_0, м/с
0	1	300	150	-	0	0,1	0	15	0	0	0
1	0,8	-	240	120	1,5q	0	0	-	8	0,1	0
2	0,5	-	100	150	0	0,8	0	5	0	0	4
3	1	240	-	160	0	0	0,5	6	0	0	0
4	0,5	80	120	-	-q	0	0	-	6	0,15	0
5	2	-	400	400	0	0	0,1	16	0	0	0
6	0,4	60	-	120	q	0	0	-	4	0	2
7	0,5	120	-	180	0	0,1	0	20	0	0	0
8	0,4	50	200	-	0	0	0,2	20	0	0,15	0
9	1	200	-	300	1,5q	0	0	-	20	0	3

На рисунке 6 представлены расчетные схемы задачи Д 2.

I



II



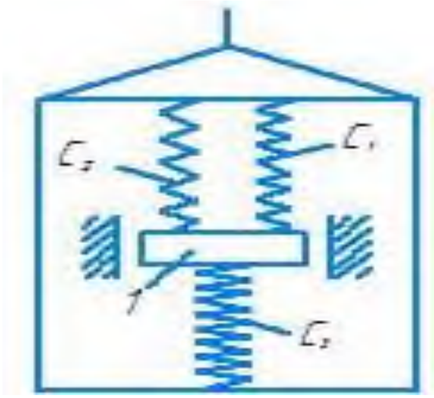
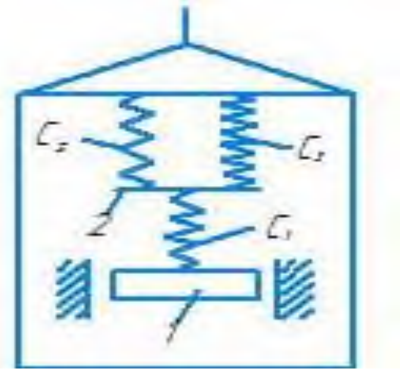
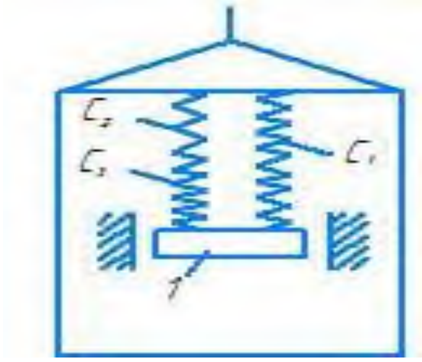
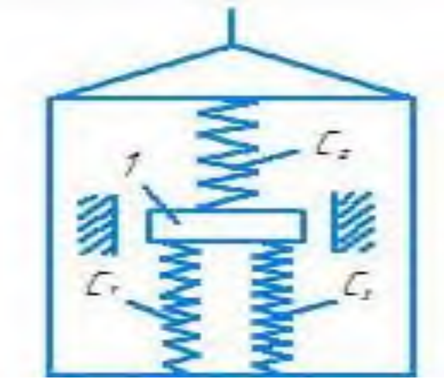
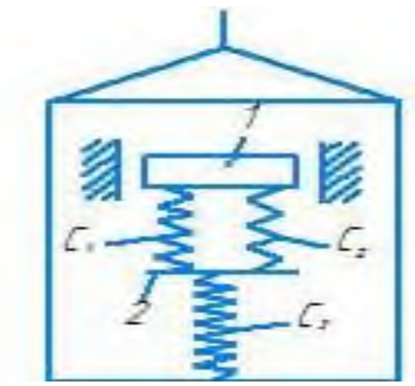
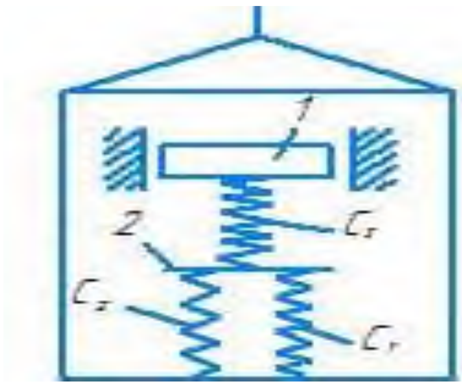
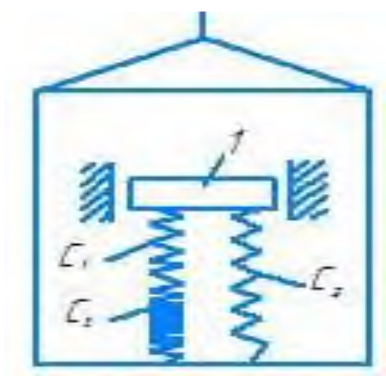
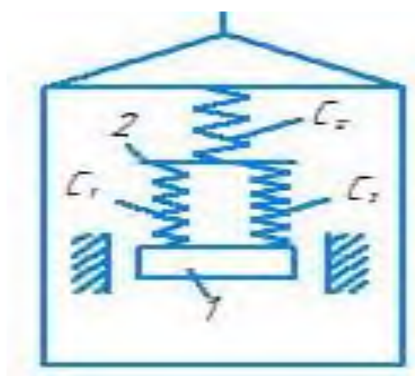
III 	**IV** 
V 	**VI** 
VII 	**VIII** 
IX 	**X** 

Рисунок 6 - Расчетные схемы задачи Д 2

3.2.1 Пример решения задачи Д 2

Груз D массой m прикрепленный к двум последовательно соединенным пружинам с коэффициентами жесткости c_1 и c_2, перемещается по пазу AB призматической тележки (рисунок 6.1, а).

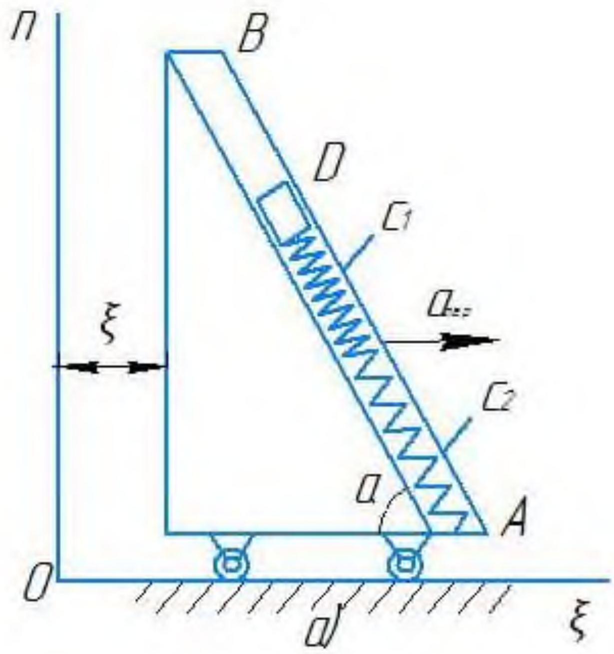


Рисунок 6.1 – Тележка

Тележка движется по закону $\xi = f_1(t)$. Начальное удлинение пружины с эквивалентной жесткостью λ_o, а начальная скорость груза по отношению к тележке ϑ_0 (направлена от D к B).

Дано: m = 0,4 кг, c_1 = 200 Н/м, c_2 = 50 Н/м, λ_o = 0,1 м, $\vartheta_0 = 1$м/с, $\alpha = 60^0$,

$$\xi = 2t^2 + 0{,}4\sin(4t)\,; \tag{6.1}$$

где ξ - в метрах,

t - в секундах).

Определить: x=f(t) - закон движения груза по отношению к тележке.

Решение: 1 Заменим прикрепленные к грузу пружины одной эквивалентной пружиной с коэффициентом жесткости $c_{экв}$ = с значение **С** здесь определяется из условия, что при равновесии под действием какой-нибудь, приложенной к свободному концу пружин силы Q усилия в любом поперечном сечении пружин одинаковы и равны Q. Тогда если удлинения пружин равны соответственно λ_1 и λ_2, то удлинение эквивалентной пружины $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ и должно быть $c_1\lambda_1 = c_2\lambda_2 = c\lambda = Q$, откуда $\lambda_1 = Q/c_1$, $\lambda_2 = Q/c_2$, $\lambda = Q/c$.

Но так как-то $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, то

$$\frac{Q}{c} = \frac{Q}{c_1} + \frac{Q}{c_2} \text{ и } c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = 40 \text{ Н/м} \tag{6.2}$$

2. Составим теперь дифференциальное уравнение относительного движения груза (по отношению к тележке). Сначала заметим, что при неподвижной тележке в положении статического равновесия груза эквивалентная пружина (длину ее в недеформированном состоянии обозначим L_0) под действием силы тяжести P будет сжата на величину $\lambda_{ст}$ (рисунок 6.2, б).

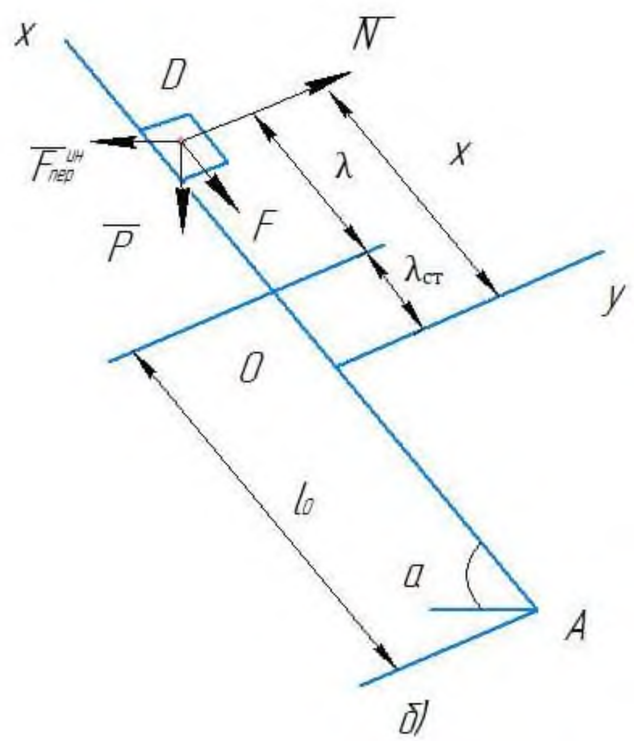


Рисунок 6.2 – Статическое равновесие

Из условия равновесия следует, что

$$c\lambda_{CT} = P\sin\alpha$$

$$\lambda_{CT} = \frac{mq\sin\alpha}{c} = 0{,}08 \text{ м.} \tag{6.3}$$

Свяжем тогда с тележкой подвижную систему отсчета Oxy, начало O которой поместим в положении статического равновесия груза, а ось Ox направим вдоль паза AB в сторону удлинения пружины (рисунок 6.2, б). Рассмотрим груз в положении, при котором x>0 и пружина растянута; изобразим действующие на груз силы: силу тяжести P, силу упругости F и реакцию паза N. Для составления уравнения относительного движения груза присоединим к этим силам переносную силу инерции $F^{и}_{пер} = -ma_{пер}$: кориолисова сила инерции здесь равна нулю, так как переносное движение (движение тележки) является поступательным. Тогда уравнение относительного движения в векторной форме будет иметь вид

$$ma_{от} = P + F + N + F^{и}_{пер}.$$

Проектируя обе его части на ось x, получим:

$$mx'' = -P\sin\alpha - F + N + F^{и}_{пер}\cos\alpha. \tag{6.4}$$

Найдем значения F и $F_{пер.}$ Так как при положении груза, определяемом координатой x>0 (рисунок 6.2, б), эквивалентная пружина имеет удлинение $\lambda = x - \lambda_{CT}$ что $F = c\lambda = c(x - \lambda_{CT})$. Далее $F^{и}_{пер} = ma_{пер} = m\xi''$, где ξ'' - ускорение тележки. Из равенства (6.1) находим, что $\xi'' = 4 - 6{,}4\sin(4t)$. Кроме того, cos α=0,5. Подставляя все эти величины в уравнение (6.4), получим:

$$mx'' = -P\sin\alpha - c(x - \lambda_{CT}) + m[2 - 3{,}2\sin(4t)].$$

Согласно равенству (6.3) члены – P sinα и $c\lambda_{ст}$ в правой части сокращаются, и окончательно дифференциальное уравнение относительного движения груза примет вид

$$x'' + k^2x = b_1 + b_2\sin(4t); \tag{6.5}$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = 100\ \text{с}^{-2},\ \ b_1 = 2\ \text{м/с}\ \ b_2 = -3{,}2\ \text{м/с}. \tag{6.6}$$

3. Для определения закона движения груза надо проинтегрировать уравнение (6.5). Его общее решение, как известно из теории дифференциальных уравнений:

$$x = x_1 + x_2; \tag{6.7}$$

где x_1 -общее решение однородного уравнения $x'' + k^2 x = 0$, т. е.

$$x_1 = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt); \tag{6.8}$$

где x_2 — частное решение уравнения (6.5).

Учитывая, каковы правая и левая части этого уравнения, ищем x_2 в виде

$$x_2 = A + B\sin(4t). \tag{6.9}$$

Для определения постоянных А и В находим $x_2'' = -16B\sin(4t)$, подставляем значения x_2'' и x_2 в уравнение (6.5) и приравниваем в его обеих частях свободные члены и коэффициенты при sin (4t). В результате, принимая во внимание обозначения (6.6), получим:

$$A = \frac{b_1}{k^2} = 0{,}02 \text{ м};$$

$$B = \frac{b_2}{k^2 - 16} = -0{,}04 \text{ м}.$$

Тогда из равенств (6.7)—(6.9), учитывая, что $k = 10$ с$^{-1}$, получим следующее общее решение уравнения (6.5):

$$x = C_1 \sin(10t) + C_2 \cos(10t) - 0{,}04\sin(4t) + 0{,}02. \tag{6.10}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем еще $\vartheta_x = x'$;

$$\vartheta_x = 10C_1 \cos(10t) - 10C_2 \sin(10t) - 0{,}16\cos(4t). \tag{6.11}$$

По условиям задачи при t=0 $\vartheta_x = \vartheta_0 = 1$ м/с, $\lambda = \lambda_0 = 0{,}1$ м. Тогда, как видно из рисунка 6.2, б и равенства (6.3), $x_0 = \lambda_0 + \lambda_{CT} = 0{,}18$ м. Подставив эти начальные данные в уравнения (6.10) и (6.11), найдем из них, что $C_1 = 0{,}12$. $C_2 = 0{,}16$. В результате уравнение (6.10) примет окончательно вид

$$x = 0{,}12\sin(10t) + 0{,}16\cos(10t) - 0{,}04\sin(4t) + 0{,}02. \tag{6.12}$$

Это уравнение и определяет искомый закон относительного движения груза, т. е. закон совершаемых им колебаний.

Примечания: 1. Если груз был бы прикреплен к двум параллельным пружинам, то при равновесии под действием некоторой силы Q каждая из пружин и эквивалентная пружина имели бы одно и то же удлинение λ. Тогда для двух пружин $c_1\lambda + c_2\lambda = Q$, а для эквивалентной пружины $c\lambda=Q$; отсюда и определяется значение

$$c_{экв}=c=c_1+c_2$$

2. Если пружины были бы прикреплены к тележке в точке B (рисунок 6.1, а), а груз D находился на другом их конце, то в положении статического равновесия эквивалентная пружина была бы растянута на величину $\lambda_{ст}$, а не сжата, что следует учесть при изображении схемы, подобной показанной на рисунке 6.2, б, и при определении зависимости между x, λ и $\lambda_{ст}$ (в этом случае $\lambda=x+\lambda ст$).

3.3 Задача Д 3

Механическая система состоит из грузов 1 и 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3=0,3м, r_3=0,1м и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3 = 0,2м, блока 4 радиуса R_4=0,2м и катка (или подвижного блока) 5; тело 5 считать сплошным однородным цилиндром, а массу блока 4 - равномерно распределенной по ободу. Коэффициент трения грузов о плоскость f = 0,1. Тела системы соединены друг с другом нитями, перекинутыми через блоки и намотанными на шкив 3 (или на шкив и каток); участки нитей параллельны соответствующим плоскостям. К одному из тел прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c.

Под действием силы F=f(s), зависящей от перемещения s точки ее приложения, система приходит в движение из состояния покоя; деформация пружины в момент начала движения равна нулю. При движении на шкив 3 действует постоянный момент M сил сопротивления (от трения в подшипниках).

Определить значение искомой величины, в тот момент времени, когда перемещение s станет равным s_1=0,2м. Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы, где обозначено: ϑ_1, ϑ_2, ϑ_{C5}— скорости грузов 1, 2 и центра масс тела 5 соответственно, ω_3 и ω_4— угловые скорости тел 3 и 4.

Все катки, включая и катки, обмотанные нитями (как, например, каток 5 на рисунке 1), катятся по плоскостям без скольжения.

На всех рисунках не изображать груз 2, если m_2=0; остальные тела должны изображаться и тогда, когда их масса равна нулю.

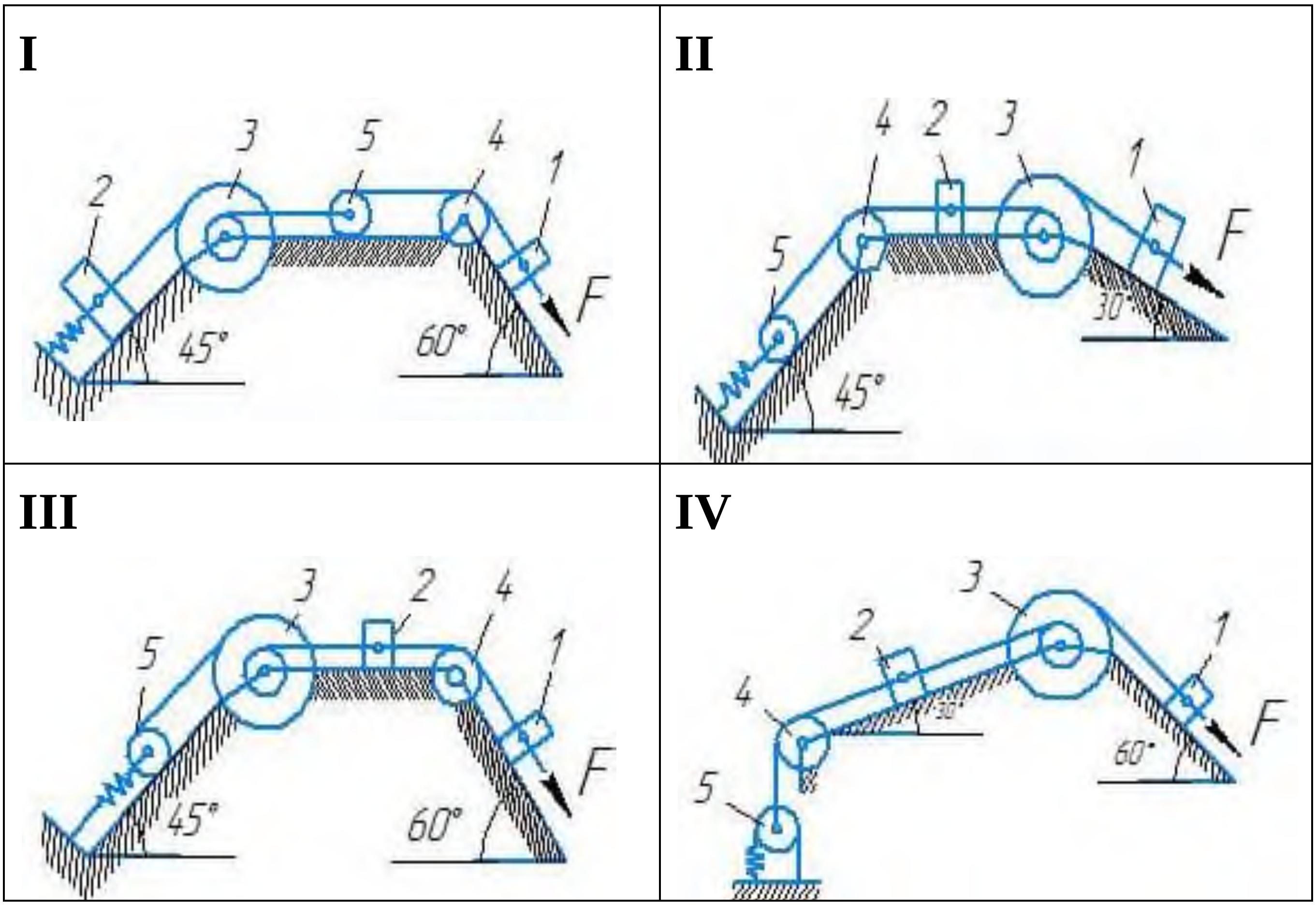
Рекомендации. Задача Д 3 - на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия T системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении T для установления зависимости между скоростями точек тела, движущегося плоскопараллельно, или между его угловой скоростью и скоростью центра масс воспользоваться мгновенным центром скоростей (кинематика). При вычислении работы надо все перемещения выразить через заданное перемещение S_1, учтя, что зависимость между перемещениями здесь будет такой же, как между соответствующими скоростями.

В таблице 7 представлены исходные данные к задаче Д 3.

Таблица 7 - Исходные данные к задаче Д 3

Номер условия	m_1, кг	m_2, кг	m_3, кг	m_4, кг	m_5, кг	c, Н/м	M, Нм	F=f(s), Н	Найти
0	0	6	4	0	5	200	1,2	80(4+5s)	ω_3
1	8	0	0	4	6	320	0,8	50(8+3s)	ϑ_1
2	0	4	6	0	5	240	1,4	60(6+5s)	ϑ_2
3	0	6	0	5	4	300	1,8	80(5+6s)	ω_4
4	5	0	4	0	6	240	1,2	40(9+4s)	ϑ_1
5	0	5	0	6	4	200	1,6	50(7+8s)	ϑ_{C5}
6	8	0	5	0	6	280	0,8	40(8+9s)	ω_3
7	0	4	0	6	5	300	1,5	60(8+5s)	ϑ_2
8	4	0	0	5	6	320	1,4	50(9+2s)	ω_4
9	0	5	6	0	4	280	1,6	80(6+7s)	ϑ_{C5}

На рисунке 7 представлены расчетные схемы задачи Д 3.



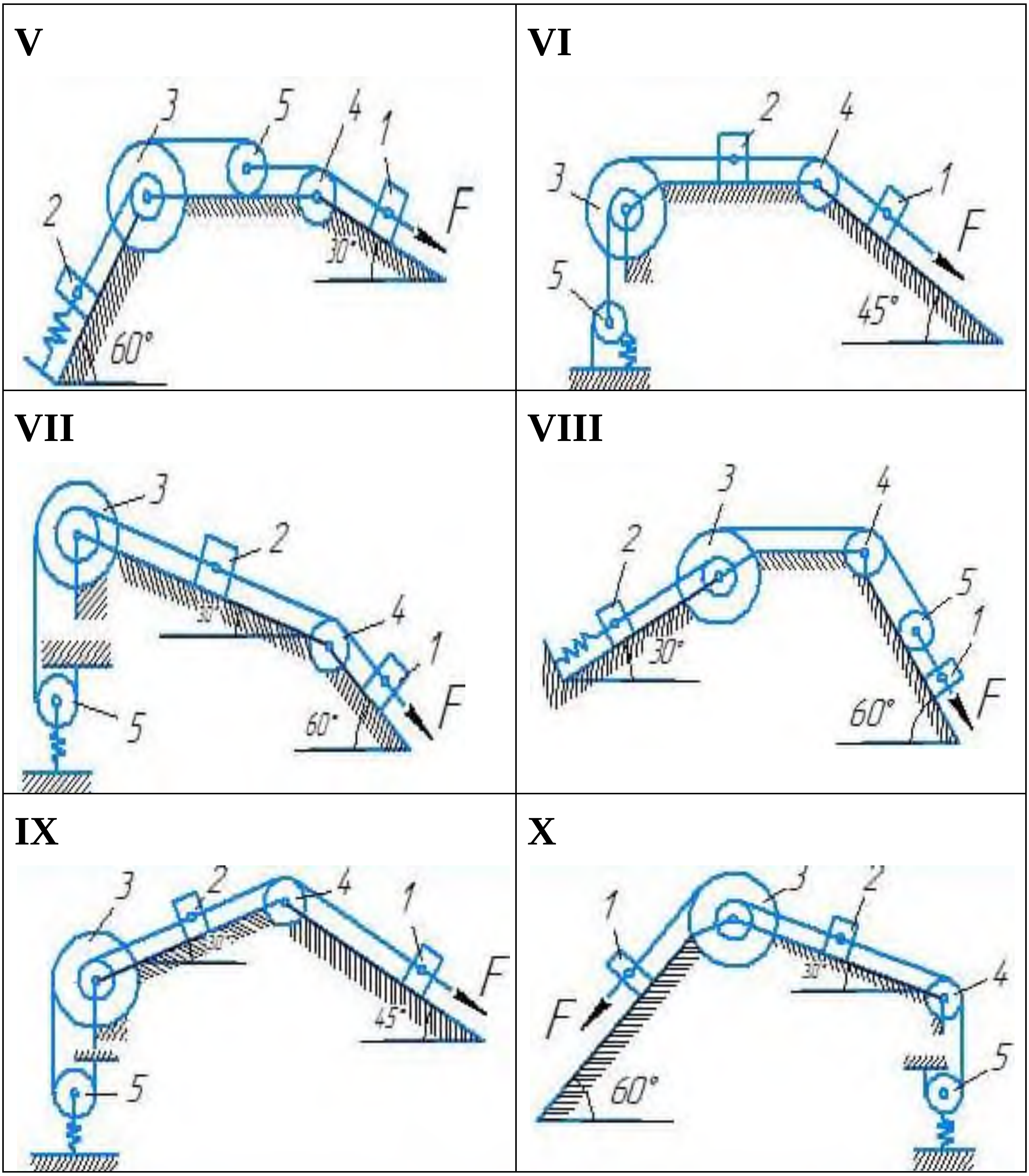


Рисунок 7 - Расчетные схемы задачи Д 3

3.3.1 Пример решения задачи Д 3

Механическая система (рисунок 7.1, а) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 1, подвижного блока 2, ступенчатого шкива 3 с радиусами ступеней R_3 и r_3 и радиусом инерции относительно оси вращения ρ_3, блока 4 и груза 5 (коэффициент трения груза о плоскость равен f). Тела системы соединены нитями, намотанными на шкив 3. К центру E блока 2 прикреплена пружина с коэффициентом жесткости c; ее начальная деформация равна нулю.

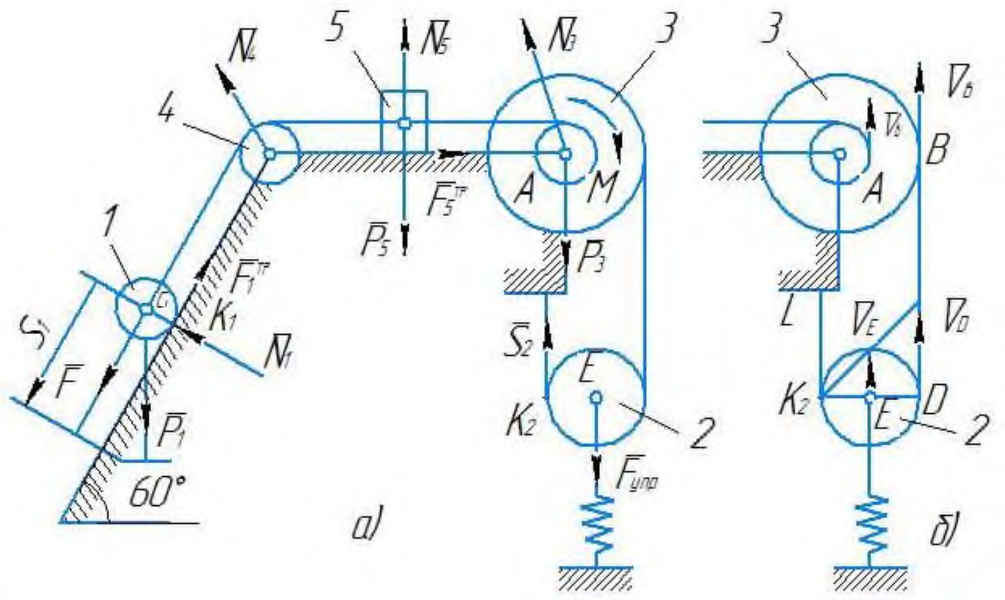


Рисунок 7.1 - Механическая система

Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы F=(s), зависящей от перемещения s точки ее приложения. На шкив 3 при движении действует постоянный момент M сил сопротивления.

Дано: m_1 = 8кг, m_2 = 0, m_3 = 4кг, m_4 = 0, m_5 = 10кг, R_3 = 0,3м, r_3=0,1м, ρ_3=0,2м, f = 0,1, c = 240Н/м, M = 0,6Н·м, F = 20(3+2s)Н, S_1 = 0,2м.

Определить: ω_3 в тот момент времени, когда s=s_1.

Решение. 1. Рассмотрим движение неизменяемой механической системы, состоящей из весомых тел 1, 3, 5 и невесомых тел 2, 4, соединенных нитями. Изобразим действующие на систему внешние силы: активные F, $F_{упр}$, P_1, Рз, P_5, реакции N_1, N_3, N_4, N_5, натяжение нити S_2, силы трения F_1^{Tp}, F_5^{Tp} и момент M.

Для определения ωз воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e . \tag{7.1}$$

2. Определяем T_0 и T. Так как в начальный момент система находилась в покое, то T_0=0. Величина T равна сумме энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_3 + T_5 . \tag{7.2}$$

Учитывая, что тело 1 движется плоскопараллельно, тело 5-поступательно, а тело 3 вращается вокруг неподвижной оси, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \vartheta_{C1}^2 + \frac{1}{2} I_{C1} \omega_1^2;$$
$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2;$$
$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 \vartheta_5^2. \quad (7.3)$$

Все входящие сюда скорости надо выразить через искомую ω_3. Для этого предварительно заметим, что $\vartheta_{C1} = \vartheta_5 = \vartheta_A$, где А - любая точка обода радиуса r_3 шкива 3 и что точка K_1 - мгновенный центр скоростей катка 1, радиус которого обозначим r_1. Тогда

$$\vartheta_{C1} = \vartheta_5 = \omega_3 r_3;$$
$$\omega_1 = \frac{\vartheta_{C1}}{K_1 C_1} = \frac{\vartheta_{C1}}{r_1} = \omega_3 \frac{r_3}{r_1}. \quad (7.4)$$

Кроме того, входящие в (7.3) моменты инерции имеют значения

$$I_{C1} = 0{,}5 m_1 r_1^2 \quad I_3 = m_3 \rho_3^2. \quad (7.5)$$

Подставив все величины (7.4) и (7.5) в равенства (7.3), а затем, используя равенство (7.2), получим окончательно

$$T = \left(\frac{3}{4} m_1 r_3^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 + \frac{1}{2} m_5 r_3^2 \right) \omega_3^2. \quad (7.6)$$

3. Теперь найдем сумму работ всех действующих внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка C_1, пройдет путь s_1. Введя обозначения: s_5 - перемещение груза 5 (s_5=s_1), φ_3 - угол поворота шкива 3, λ_0 и λ_1 - начальное и конечное удлинения пружины, получим:

$$A(F) = \int_0^{s_1} 20(3 + 2s)ds = 20(3s_1 + s_1^2);$$
$$\mathrm{A}(\mathrm{P}_1) = \mathrm{P}_1 \mathrm{s}_1 \sin 60^0;$$
$$A(F_5^{Tp}) = -F_5^{Tp} s_5 = -f P_5 s_1;$$
$$A(M) = -M \varphi_3;$$

$$A(F_{упр}) = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda_1^2).$$

Работы остальных сил равны нулю, так как точки K_1 и K_2, где приложены силы N_1, $F_1^{Тр}$ и S_2 - мгновенные центры скоростей; точки, где приложены P_3, N_3 и P_4 - неподвижны; а реакция N_5 перпендикулярна перемещению груза.

По условиям задачи $\lambda_o = 0$. Тогда $\lambda_1 = s_E$, где s_E - перемещение точки E (конца пружины). Величины s_E и φ_3 надо выразить через заданное перемещение s_1; для этого учтем, что зависимость между перемещениями здесь такая же, как и между соответствующими скоростями.

Тогда, поскольку $\omega_3 = \frac{\vartheta_A}{r_3} = \frac{\vartheta_{C1}}{r_3}$ (равенство $\vartheta_{C1} = \vartheta_A$ уже отмечалось), то и $\varphi_3 = \frac{s_1}{r_3}$.

Далее, из рисунка 7.1, б видно, что $\vartheta_D = \vartheta_B = \omega_3 R_3$, а так как точка K_2 является мгновенным центром скоростей для блока 2 (он как бы "катится" по участку нити K_2L), то $\vartheta_E = 0{,}5\vartheta_D = 0{,}5\omega_3 R_3$, следовательно, и $\lambda_1 = s_E = 0{,}5\varphi_3 R_3 = 0{,}5 s_1 \frac{R_3}{r_3}$ При найденных значениях φ_3 и λ_1 (для суммы всех вычисленных работ получим:

$$\sum A_K^e = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^0 - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1. \quad (7.7)$$

Подставляя выражения (7.6) и (7.7) в уравнение (7.1) и учитывая, то что $T_0=0$, придем к равенству

$$\left(\frac{3}{4}m_1 r_3^2 + \frac{1}{2}m_3\rho_3^2 + \frac{1}{2}m_5 r_3^2\right)\omega_3^2 = 20(3s_1 + s_1^2) + P_1 s_1 \sin 60^0 - fP_5 s_1 - M\frac{s_1}{r_3} - \frac{c}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}s_1. \quad (7.8)$$

Из равенства (7.8), подставив в него значения заданных величин, найдем искомую угловую скорость ω_3.

Ответ: $\omega_3=8{,}1c^{-1}$.

3.4 Контрольные вопросы

1. Основные понятия и определение динамики.
2. Первый закон динамики.
3. Второй закон динамики.
4. Третий закон динамики.
5. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.
6. Решение основной задачи динамики при прямолинейном движении точки.
7. Несвободное движение точки.
8. Относительное движение точки.
9. Свободные колебания без учета сил сопротивления.
10. Вынужденные колебания. Резонанс.
11. Механическая система.
12. Масса системы.
13. Момент инерции тела относительно оси.
14. Радиус инерции.
15. Дифференциальные уравнения движения системы.
16. Теорема о движении центра масс.
17. Закон сохранения движения центра масс.
18. Количество движения системы.
19. Теорема об изменении количества движения.
20. Закон сохранения количества движения.

Список использованных источников

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. Для вузов.-10-е изд., перераб. и доп. –М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 592 с.
2. Сопротивление материалов. Учеб. Пособие / Н.А. Костенко, С.В. Балясникова, Ю.Э. Волошановская и др.; Под. Ред. Н.А. Костенко. –М.: Высш. Шк., 2000. 430 с.
3. Ицкович Г.М. Сопротивление материалов: Учеб. пособие.-9-е изд., стер.-М.: Высш. шк., 2001. 68 с.
4. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокурова А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов/ Под ред. Л.С. Минина.-3-е изд., перераб. и доп. –М.: Высш. шк., 2001. 592 с.
5. Архангельский А.В. Сопротивление материалов: Учеб. пособие для упражнений. Ч.1.-М.: МИСиС, 1976,-127с. Ч.".-М.: МИСиС, 1977. 84 с.
6. Архангельский А.В. Ганзенко А.С. Сопротивление материалов. Лабораторный практикум. –М.: МИСиС, 1982. 80 с.
7. Эрдеди А.А. Эрдеди Н.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов.: Учеб пособие.-4-е изд., перераб. и доп.-М.: Высш.шк.; Издательский центр "Академия",2001. 318 с.
8. Архангельский А.В. Сопротивление материалов: Практикум.- изд.2-е. –М.: МИСиС, 2001. 177 с.

СТЕПЫКО ТАТЬЯНА ВЛАДИМИРОВНА

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания
по выполнению контрольной работы / домашнего задания,
предусмотренных программой дисциплины в III семестре,
для студентов направлений подготовки 22.03.02 Металлургия,
13.03.01 Теплоэнергетика и теплотехника, 18.03.02 Химическая технология,
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
очной и заочной форм обучения

Подписано в печать 25.12.2019 г.		
Формат 60x90 $^1\!/_{16}$ Рег. № 131	Печать цифровая Тираж 10 экз.	Уч.-изд.л. 3,44

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
Новотроицкий филиал
462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, 8.
E-mail: nf@misis.ru
Контактный тел. 8 (3537) 679729.