

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

**НОВОТРОИЦКИЙ ФИЛИАЛ**

Кафедра оборудование металлургических предприятий

Т.В. Степыко

**Сопротивление материалов**

Методическое пособие для проведения практических занятий

Для студентов направлений: 150400 «Металлургия»,  
151000 «Технологические машины и оборудование»,  
140100 «Теплоэнергетика и теплотехника»,  
240100 «Химическая технология»,  
140400 «Электроэнергетика и электротехника»,  
очной и заочной форм обучения

Новотроицк, 2014

УДК 539.3/6

**Рецензенты:**

Начальник цеха сервисного обслуживания сталеплавильного производства ОАО «Уральская Сталь» **Прохоров А.В.**

Зав. кафедрой оборудование металлургических предприятий ФГАОУ ВПО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Новотроицкий филиал, к.п.н. **Нефедов А.В.**

Степыко Т.В. Сопротивление материалов: Методическое пособие для проведения практических занятий. – Новотроицк: НФ НИТУ «МИСиС», 2014. – 96с.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 150400 «Металлургия», 151000 «Технологические машины и оборудование», 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника», 240100 «Химическая технология», 140400 «Электроэнергетика и электротехника», очной и заочной формы обучения.

Рекомендовано Методическим Советом НФ НИТУ «МИСиС».

© Новотроицкий филиал  
ФГАОУ ВПО «Национальный  
исследовательский технологиче-  
ский университет «МИСиС», 2014

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Анализ внутренних силовых факторов.....	5
1.1 Теоретическая часть.....	5
1.2 Практическая часть.....	7
1.3 Вопросы для самопроверки.....	8
2 Растяжение и сжатие.....	9
2.1 Теоретическая часть.....	9
2.2 Практическая часть.....	12
2.3 Вопросы для самопроверки.....	19
3 Прямой изгиб.....	20
3.1 Теоретическая часть.....	20
3.2 Практическая часть.....	23
3.3 Вопросы для самопроверки.....	31
4 Энергетические методы определения перемещений.....	32
4.1 Теоретическая часть.....	32
4.2 Практическая часть.....	35
4.3 Вопросы для самопроверки.....	47
5. Основы теории напряженного и деформированного состояния.....	49
5.1 Теоретическая часть.....	49
5.2 Практическая часть.....	51
5.3 Вопросы для самопроверки.....	57
6 Сдвиг и кручение.....	59
6.1 Теоретическая часть.....	59
6.2 Практическая часть.....	61
6.3 Вопросы для самопроверки.....	65
7 Метод сил.....	66
7.1 Теоретическая часть.....	66
7.2 Практическая часть.....	67
7.3 Вопросы для самопроверки.....	73
8 Сложное сопротивление.....	74
8.1 Теоретическая часть.....	74
8.2 Практическая часть.....	75
8.3 Вопросы для самопроверки.....	79
9 Устойчивость продольно сжатых стержней.....	81
9.1 Теоретическая часть.....	81
9.2 Практическая часть.....	83
9.3 Вопросы для самопроверки.....	86
Задачи для выполнения контрольных и домашних работ.....	88
Список используемых источников.....	95

## **ВВЕДЕНИЕ**

В методическом пособии рассматриваются темы практических занятий, охватывающие основные разделы курса сопротивления материалов: построение эпюр внутренних усилий для стержней, валов, балок, ломаных стержней и рам, кривых брусьев, расчеты на прочность и жесткость при растяжении и сжатии, кручении; определение деформаций балок при изгибе; статически неопределимые задачи изгиба балок; определение перемещений в балках и рамах, расчет рам методом сил; теория напряженного и деформированного состояния, сложное сопротивление; устойчивость сжатых стержней.

Все практические занятия предваряются кратким изложением соответствующего теоретического материала. В пособии использована Международная система единиц (СИ). Обозначения величин приняты в соответствии с международными рекомендациями ИСО. Примеры могут быть использованы студентами при выполнении домашних и контрольных работ.

# 1 АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

## 1.1 Теоретическая часть

При изучении классификации внешних сил (нагрузок) следует отчетливо представлять их разновидности в зависимости от способа их приложения – объемные и поверхностные. Поверхностные нагрузки делят на распределенные и сосредоточенные. По характеру действия нагрузки делят на статические и динамические. Необходимо разбираться в разновидностях каждой из нагрузок и суметь привести пример на каждую из них.

Нагрузки, действующие на тело, вызывают в нем деформации. Тело, деформации которого рассматриваются, имеет форму бруса, т.е. тела, у которого длина значительно больше линейных размеров поперечного сечения. Если деформация после прекращения действия сил на тело исчезает, то такая деформация называется упругой. Неисчезающие деформации называются остаточными или пластическими, такие деформации в машинах и сооружениях, как правило, не допускаются.

Внешние силы (нагрузки), действующие на брус, вызывают возникновение в нем внутренних сил (сил упругости). Для определения внутренних сил пользуются методом сечений, который позволяет определить внутренние силы в том или ином сечении тела, и заключается в следующем: брус, находящийся в равновесии, разрезают (мысленно) на две части, отбрасывают одну из частей, заменяют действие отброшенной части на оставшуюся внутренними силами и составляют уравнения равновесия для оставшейся части, на которую действуют приложенные к ней внешние и внутренние силы. Действующая в проведенном поперечном сечении система внутренних сил эквивалентна в общем случае одной силе и одному моменту. Разложив их на составляющие, получим соответствующие три силы (по направлению координатных осей  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $N_z$ ) и три момента (относительно этих осей  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ), которые называют внутренними силовыми факторами (ВСФ)

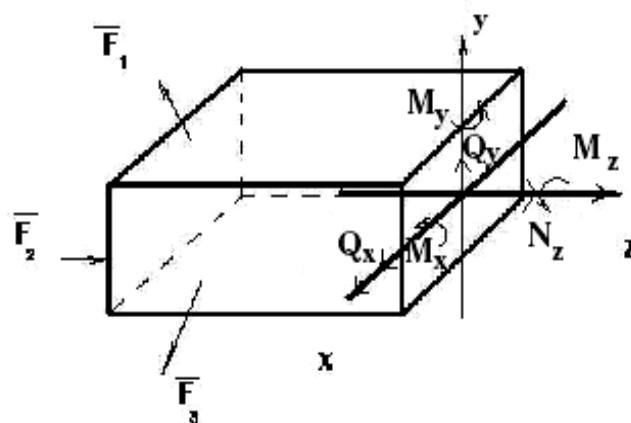


Рисунок 1- Распределение ВСФ

Возникновение тех или иных ВСФ зависит от фактического нагружения бруса. Определяют ВСФ с помощью уравнений равновесия статики (рисунок 1).

$$\begin{array}{ll}
 1 \sum F_{ix}=0 & 4 \sum M_x(F_i)=0 \\
 2 \sum F_{iy}=0 & 5 \sum M_y(F_i)=0 \\
 3 \sum F_{iz}=0 & 6 \sum M_z(F_i)=0
 \end{array}$$

Надо хорошо усвоить, что внутренним нормальным силам соответствуют нормальные напряжения –  $\sigma$  (сигма), касательным силам касательные напряжения –  $\tau$  (тау). Рисунок 2.

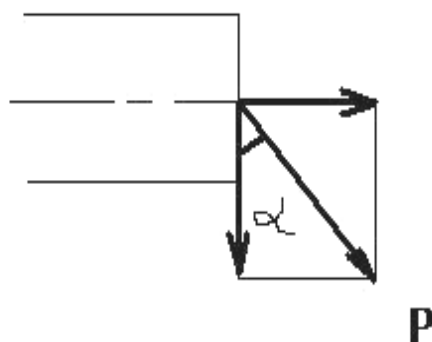


Рисунок 2- Распределение напряжений по сечению

Нормальное напряжение  $\sigma$ , действующее нормально, т.е. перпендикулярно к сечению, и касательное напряжение  $\tau$ , действующее параллельно плоскости сечения или касательно к нему, являются составляющими полного напря-

жения  $\rho$ , величина которого равна:  $\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  Напряжение выражает меру внутренних сил, возникающих в материале элемента конструкции.

## 1.2 Практическая часть

**Задача 1.** Построить эпюру продольных сил для жестко заземленной балки (рисунок 3).

Решение:

1 Намечаем характерные сечения, нумеруя их от свободного конца стержня к заделке.

2 Определяем продольную силу  $N_z$  в каждом характерном сечении. При этом рассматриваем всегда ту отсеченную часть, в которую не попадает жесткая заделка.

$$\text{I участок } 0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м} \quad N_1 = q_1 \cdot z_1,$$

$$\text{При } z_1=0 \quad N_1=0$$

$$\text{При } z_1=2 \text{ м} \quad N_1=20 \text{ кН}$$

$$\text{II участок} \quad N_2 = q_1 \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН}$$

$$\text{III участок} \quad N_3 = q_1 \cdot 2 - F_1 = 20 - 40 = -20 \text{ кН},$$

$$\text{IV участок } 4 \leq z_4 \leq 5 \text{ м} \quad N_4 = q_1 \cdot 2 - F_1 + q_2 \cdot (z_4 - 4),$$

$$\text{При } z_4=4 \text{ м} \quad N_4=-20 \text{ кН}$$

$$\text{При } z_4=5 \text{ м} \quad N_4=0$$

$$\text{V участок } N_5 = q_1 \cdot 2 - F_1 - F_2 + q_2 \cdot 1 = -30 \text{ кН}.$$

3 По найденным значениям строим эпюру  $N_z$ .

Положительные значения откладываются (в выбранном масштабе) над осью эпюры, отрицательные - под осью.

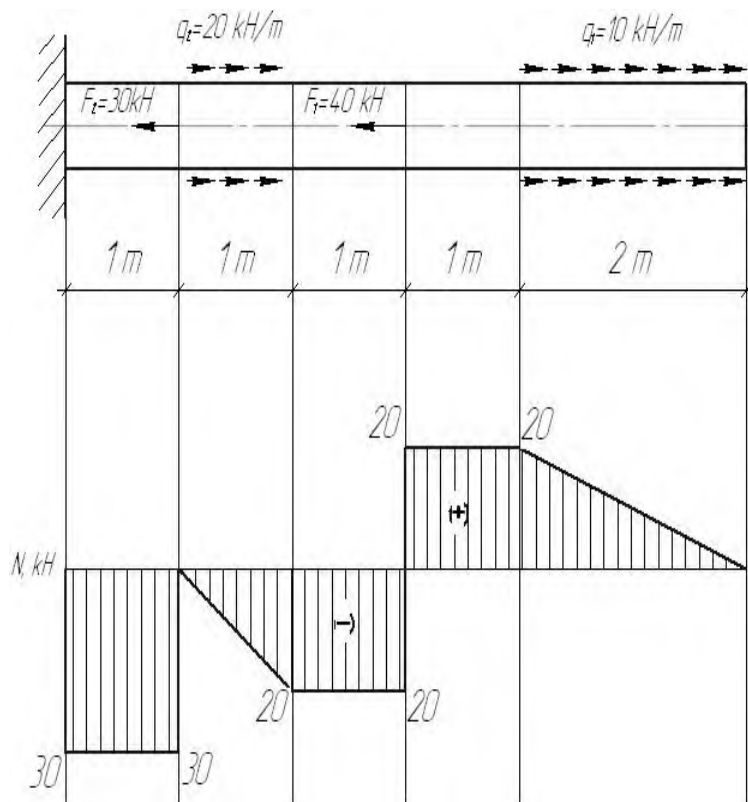


Рисунок 3 - Эпюра продольных сил

### 1.3 Вопросы для самопроверки

1 Что такое деформация? Какие деформации называют упругими, и какие пластичными (остаточными)?

2 Что называется напряжением в данной точке сечения тела? На какие две составляющие может быть разложен вектор полного напряжения?

3 Что называется прочностью, жесткостью и устойчивостью детали?

4 В чем заключается сущность расчета на прочность и на устойчивость?

5 По каким признакам и как классифицируются нагрузки в сопротивлении материалов?

6 На каких гипотезах и допущениях основаны выводы расчетных зависимостей сопротивления материалов?

7 Сформулируйте принцип независимости действия сил в применении к сопротивлению материалу.

8 В чем заключается метод сечения и какова цель его применения? Укажите последовательность операций при использовании метода сечений?



## 2 РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

### 2.1 Теоретическая часть

Изучение темы необходимо начинать с выяснения вопроса о внутренних силовых факторах, действующих в сечении бруса. Применение метода сечений позволяет найти величину и направление равнодействующей внутренней (продольной) силы упругости в рассматриваемом сечении. Принято считать, что внутренняя растягивающая сила положительна, а сжимающая – отрицательна. Поэтому неизвестную продольную силу  $N$  всегда направляют от сечения (рисунок 4), предполагая, что в рассматриваемом сечении возникает растяжение. Величина продольной силы  $N$  определяется из условия равновесия отсеченной части, а именно: сумма сил, действующих по оси  $x$ , равна нулю при условии равновесия бруса.

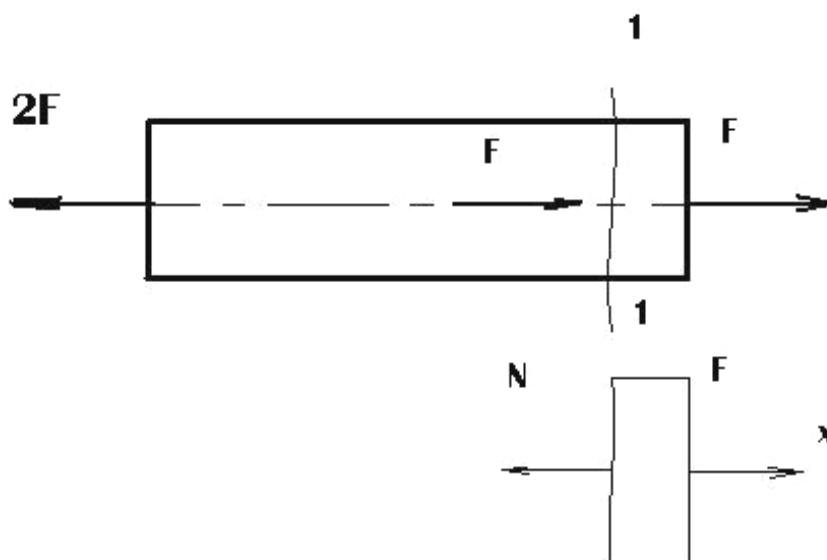


Рисунок 4- Направление продольной силы  $N$

$$\sum F_{ix} = F - N = 0, \text{ и следовательно } N = F.$$

Если при расчете продольная сила получается положительной, это значит, что она действительно направлена от сечения и является растягивающей. Если  $N$  получается отрицательной, то она является сжимающей.

При изучении растяжения и сжатия прямого бруса следует обратить особое внимание на гипотезу плоских сечений, которая справедлива и при других видах нагружения бруса.

Сущность ее заключается в том, что плоские сечения, нормальные к оси бруса до деформации, остаются и после деформации плоскими и нормальными к его оси, а отсюда следует, что продольные элементы бруса растягиваются одинаково, силы упругости будут распределяться по сечению бруса равномерно, а поэтому напряжение во всех точках сечения определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где  $N$  – внутренняя сила;

$A$  – площадь поперечного сечения, которая является геометрической характеристикой прочности и жесткости, форма сечения значения не имеет, все точки сечения равноопасны.

Мерой деформации растяжения ( $\varepsilon$ ) является относительное удлинение (рисунок 5).

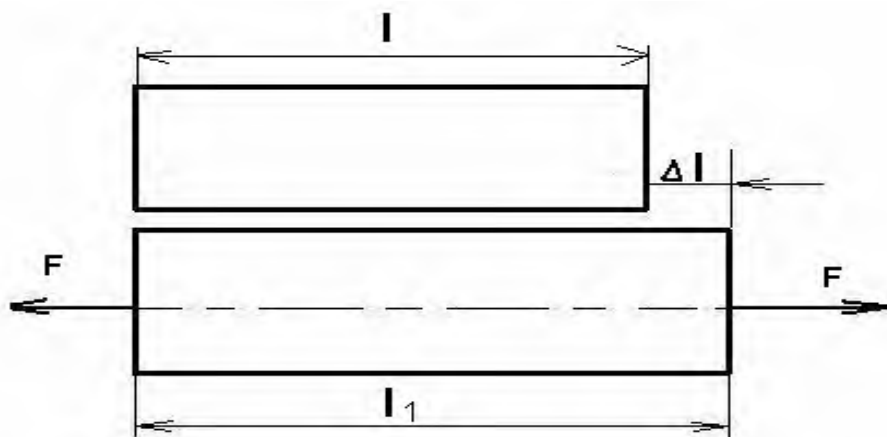


Рисунок 5- Удлинение бруса

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

где  $l$  – первоначальная длина бруса;

$\Delta l = l_1 - l$  – абсолютное удлинение.

Величина  $\varepsilon$  не имеет размерности и часто выражается в процентах.

Особого внимания заслуживает закон Гука, согласно которому в пределах упругой деформации материала между напряжением и деформацией принимается прямо пропорциональная зависимость, которая выражается формулой:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – нормальное напряжение;

$E$  – модуль продольной упругости (модуль упругости первого рода или модуль Юнга);

$\varepsilon$  - относительное удлинение (или осевое укорочение).

Модуль продольной упругости имеет размерность напряжения МПа или Па, ( $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ ) и характеризует жесткость материала, его способность сопротивляться упругому деформированию.

Для участка бруса длиной  $l$ , на котором постоянны продольная сила и площадь поперечного сечения, закон Гука можно записать в виде:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (2)$$

Это вторая форма закона Гука. Произведение  $EA$  называют жесткостью сечения. При расчетах на растяжение и сжатие используют основной принцип прочности детали: действующие или расчетные напряжения ни в одной точке детали не должны превышать допускаемые напряжения.

Так как при растяжении (сжатии) во всех точках сечения напряжения одинаковы, то при расчете бруса на прочность определяют положение наиболее напряженного (опасного) поперечного сечения. Если брус имеет постоянное по его длине поперечное сечение, то опасным является сечение, в котором возникает наибольшая продольная сила  $N$ . Если значение продольной силы во всех сечениях одинаково, то опасным является сечение с наименьшей площадью. Для определения опасного сечения бруса при изменяющихся по его длине площади поперечного сечения и продольной силе необходимо строить эпюру нор-

мальных напряжений.

Условие прочности бруса при растяжении (сжатии), составленное для опасного сечения, имеет вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad (3)$$

Условие прочности в словесной форме можно записать следующим образом:

$$\begin{array}{l} \text{Действующее} \\ \text{(расчетное)} \\ \text{пряжение} \end{array} \text{ на-} = \frac{\text{Внутреннее усилие}}{\text{Характеристика поперечного сечения}} \leq \text{Допускаемое напряжение}$$

Форма сечения бруса не влияет на его прочность при растяжении (сжатии). Форму сечения бруса необходимо знать только для определения размеров сечения при известном сечении площади.

С помощью условия прочности выполняют три вида расчетов: проверочный расчет, проектный расчет и определение допускаемой нагрузки.

Надо знать, что в ряде случаев необходимые для расчета бруса усилия невозможно найти только из уравнений равновесия. Такие задачи называют статически неопределимыми. При решении таких задач уравнения, которых не хватает для определения усилий, составляют из условия деформации бруса или системы.

## 2.2 Практическая часть

**Задача 1.** Ступенчатый стержень круглого поперечного сечения нагружен силами  $P_1 = 40 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 10 \text{ кН}$ ;  $P_3 = 20 \text{ кН}$ . Принимаем материал стержня  $[\sigma] = 140 \text{ МПа}$ ,  $E = 0,4 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $[n] = 0,8$ .

Определить:

- 1 Необходимые размеры поперечных сечений бруса;
- 2 Нормальные напряжения;
- 3 Перемещения поперечных сечений.

Решение:

1 Построим эпюры продольных сил.

Схема нагружения стержня представлена на рисунке 6. Обозначим сечения, в которых приложены силы и меняются размеры стержня буквами, начиная от А до F. Сечениями, где приложены силы, стержень разбивается на три участка, в пределах которых продольная сила постоянная, поэтому для определения ее значений нужно рассечь каждый участок и из условия равновесия отсеченной части, не содержащей заделку, определить величину продольной силы.

Проведем на участке АВ произвольное сечение I-I, отбросим часть стержня, содержащую заделку, и рассмотрим условие равновесия оставшейся правой части. На рассматриваемую часть стержня действует сила  $P_3 = 20 \text{ кН}$  и продольная сила  $N_1$  в сечении I-I. При определении продольных сил в сечениях предполагаем, что они растягивают рассматриваемую часть стержня, т.е. направлены от сечения.

Проектируя силы на ось X, получим  $N_1 - P_3 = 0$ . Откуда  $N_1 = P_3 = 20 \text{ кН}$ .

Т.к. продольная сила  $N_1$  получилась с положительным знаком, то участок стержня АВ растягивается.

Проведем произвольное сечение II-II и рассмотрим равновесие отсеченной части стержня, не содержащей заделку.

$$\sum F_x = 0 ,$$

$$N_2 + P_2 - P_3 = 0$$

$$N_2 = -P_2 + P_3 = 20 - 10 = 10 \text{ кН}.$$

Положительный знак продольной силы  $N_2$  свидетельствует о том, что третий участок испытывает растяжение.

Проведем произвольное сечение III-III и рассмотрим равновесие отсеченной части стержня, не содержащей заделку.

$$\sum F_x = 0 ,$$

$$N_3 - P_1 + P_2 - P_3 = 0$$

$$N_3 = P_1 - P_2 + P_3 = 40 - 10 + 20 = 50 \text{ кН}.$$

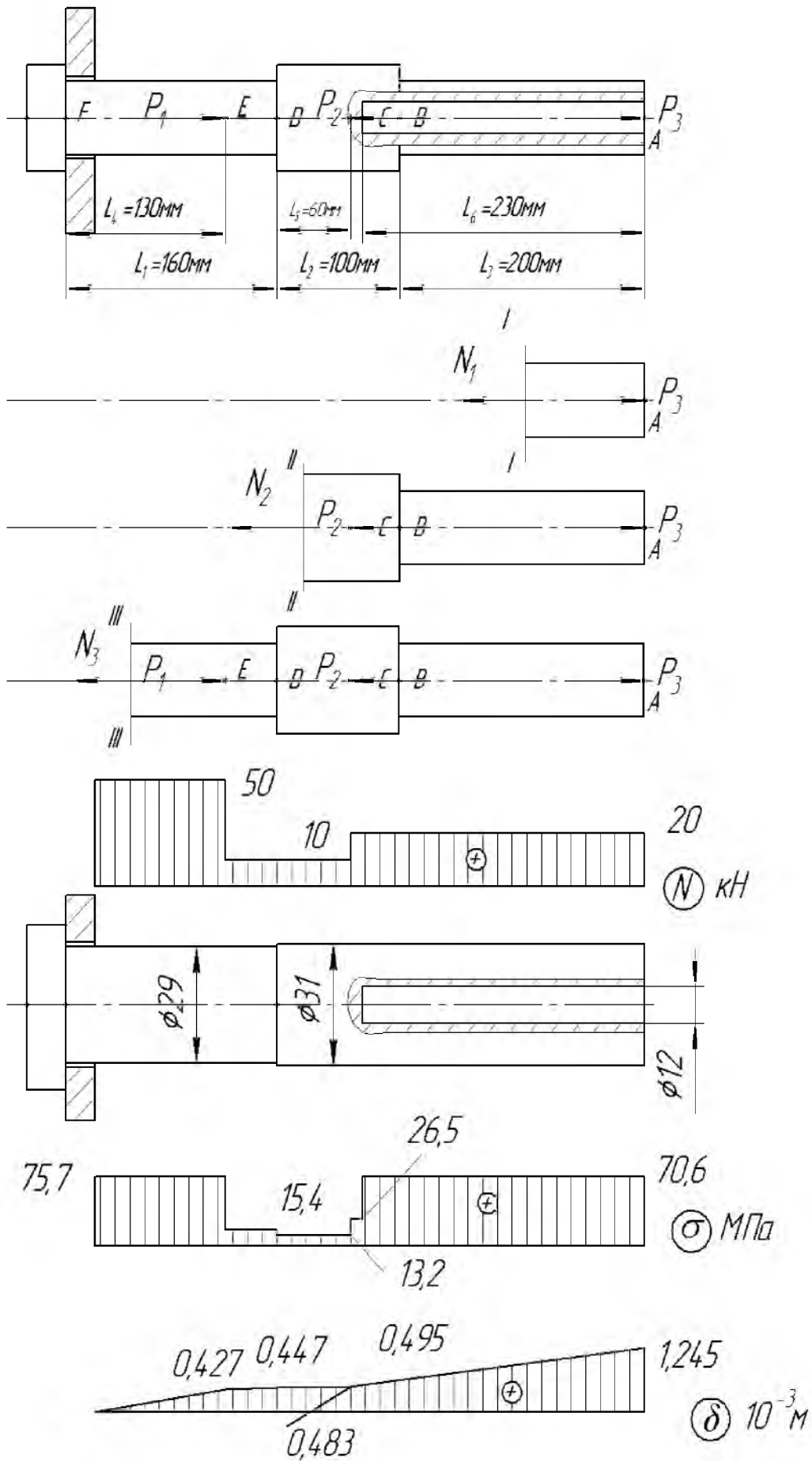


Рисунок 6 - Схема нагружения стержня

Положительный знак продольной силы  $N_3$  свидетельствует о том, что третий участок испытывает растяжение.

По найденным значениям продольных сил строим график (эпюру) изменения продольных сил по длине стержня. Проводим базу эпюры параллельно оси стержня и в выбранном масштабе откладываем вверх положительные значения продольных сил и вниз отрицательные.

При правильно построенной эпюре продольных сил в сечениях, где приложены сосредоточенные силы на эпюре будут иметь место скачки на величину приложенной силы.

2 Определим необходимые размеры поперечных сечений бруса.

Необходимые размеры поперечных сечений бруса определим исходя из условия прочности при растяжении.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\tau}}{[n]} = \frac{140}{1,8} = 77,8 \text{ МПа}$$

Определим площади сечений на каждом участке

$$A_1 = \frac{\pi}{4} (d_3 - d_4)^2 = 0,785 (d_3 - md_3)^2 = 0,2826 d_3^2;$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4} (d_2 - d_4)^2; \quad A_3 = \frac{\pi}{4} d_2^2; \quad A_4 = \frac{\pi}{4} d_1^2.$$

Значение напряжений на каждом участке

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_2 = \frac{N_1}{A_2}; \quad \sigma_3 = \frac{N_1}{A_3}; \quad \sigma_4 = \frac{N_2}{A_3}; \quad \sigma_5 = \frac{N_2}{A_4}; \quad \sigma_6 = \frac{N_3}{A_4}.$$

Выразим диаметр на участке где продольные силы имеют большее значение.

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{N_3}{0,785[\sigma]}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 10^3}{0,785 \cdot 77,8}} = 28,6 \text{ мм};$$

$$d_3 \geq \sqrt{\frac{N_1}{0,471[\sigma]}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^3}{0,2826 \cdot 77,8}} = 30,2 \text{ мм};$$

$$d_4 \geq md_3 = 12 \text{ мм};$$

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{N_1}{0,785[\sigma]}} + d_4 = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^3}{0,785 \cdot 77,8}} + 12 = 30,1 \text{ мм} .$$

Округляем диаметры до ближайшего целого большего числа.

$$d_1 = 29 \text{ мм} ; d_2 = 31 \text{ мм} ; d_3 = 31 \text{ мм} ; d_4 = 12 \text{ мм} .$$

3 Построение эпюр нормальных напряжений.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 19^2} = 70,6 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_1}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 19^2} = 70,6 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_1}{A_3} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 31^2} = 26,5 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_4 = \frac{N_2}{A_3} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 31^2} = 13,2 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_5 = \frac{N_2}{A_4} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 29^2} = 15,4 \text{ МПа} ;$$

$$\sigma_6 = \frac{N_3}{A_4} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 29^2} = 75,7 \text{ МПа} .$$

По этим данным строим эпюру нормальных напряжений.

4 Построение эпюры перемещений поперечных сечений.

Деформация бруса на каждом участке:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EA_1} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 230 \cdot 4}{0,4 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 14^2} = 0,75 \text{ мм} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м} ;$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_1 L_2}{EA_3} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 4}{0,4 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 23^2} = 0,012 \text{ мм} = 0,012 \cdot 10^{-3} \text{ м} ;$$

$$\Delta L_3 = \frac{N_2 L_3}{EA_3} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 4}{0,4 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 23^2} = 0,036 \text{ мм} = 0,036 \cdot 10^{-3} \text{ м} ;$$

$$\Delta L_4 = \frac{N_2 L_4}{EA_4} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 4}{0,4 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 22^2} = 0,02 \text{ мм} = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ м} ;$$



$$\Delta L_5 = \frac{N_3 L_5}{EA_4} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 130 \cdot 4}{0,4 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 23^2} = 0,427 \text{ мм} = 0,427 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Перемещения в сечениях:

$$\delta_E = \Delta L_5 = 0,427 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\delta_D = \Delta L_5 + \Delta L_4 = 0,427 + 0,02 = 0,447 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\delta_C = \Delta L_5 + \Delta L_4 + \Delta L_3 = 0,447 + 0,036 = 0,483 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\delta_B = \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5 = 0,483 + 0,012 = 0,495 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\delta_A = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5 = 0,495 + 0,75 = 1,245 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

4 Определим необходимую толщину и диаметр головки стержня:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_\tau}{[n]} = \frac{140}{1,8} = 77,8 \text{ МПа}$$

$$[\tau] = 0,5[\sigma] = 38,9 \text{ МПа}; [\sigma_{см}] = 2[\sigma] = 155,6 \text{ МПа}$$

На срез ось рассчитываем по формуле:

$$D \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 50 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 38,9}} = 40,5 \text{ мм};$$

На смятие ось рассчитываем по формуле:

$$h \geq \frac{P}{D[\sigma_{см}]} = \frac{50 \cdot 10^3}{41 \cdot 155,6} = 7,8 \text{ мм};$$

Принимаем диаметр головки стержня  $D=41$  мм;

Принимаем толщину головки стержня  $h=8$  мм.

**Задача 2.** Дано:  $l=1$  м;  $l/L=0,3$ ;  $C/L=0,52$ ;  $\lambda/L=0,6$ ;  $F_1/F=1,2$ ;  $F_2/F=1,2$ ;  $P_1/P=3$ ;  $P_2/P=4$ ;  $F = 12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $P=10$  кН;  $E=1 \cdot 10^5$  МПа.

Определить:  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta L$ .

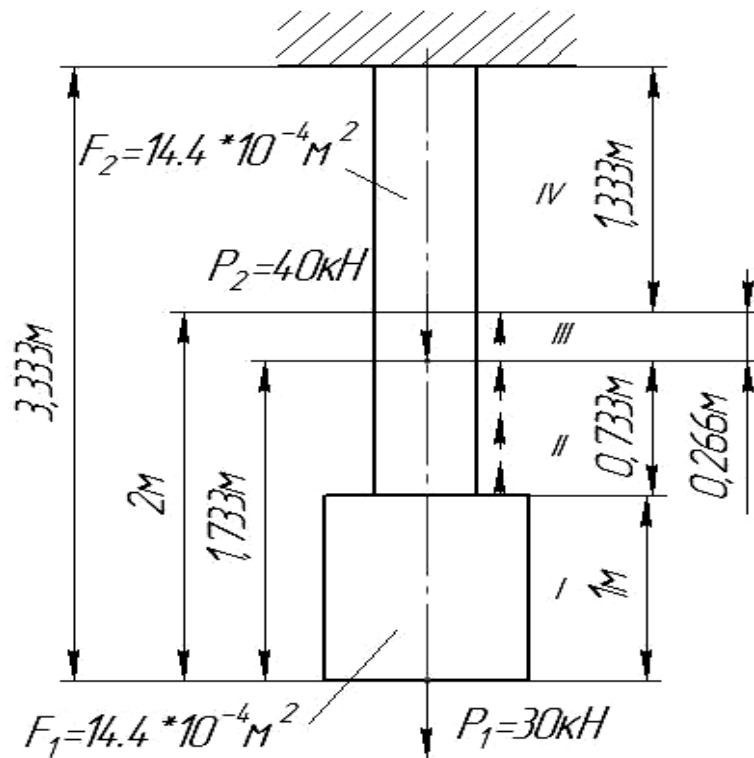


Рисунок 7 – Схема нагружения стержня

**Задача 3.** Дано:  $A = 13 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 = 13 \text{ см}^2$ ;  $a=2,7\text{м}$ ;  $b=3,7\text{м}$ ;  $c=1,3\text{м}$ ;  $\alpha=45^\circ$ ;  
 $[\sigma]=160\text{МПа}$ ;  $[\sigma_\tau]= 240 \text{ МПа}$ ;  $n=1,5$ .

Раскрыть статическую неопределимость стержневой системы.

Решение:

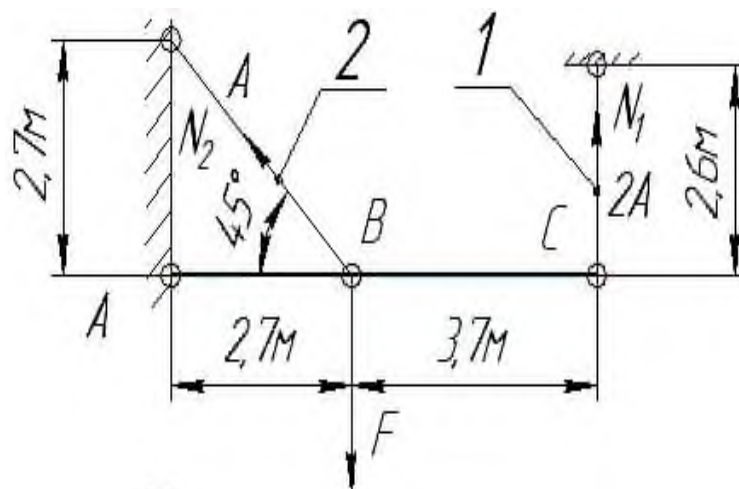


Рисунок 8 - Статически неопределимая стержневая система

## 2.3 Вопросы для самопроверки

- 1 Как можно нагрузить прямой брус, чтобы он работал только на растяжение (сжатие)?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении стержня при его растяжении или сжатии?
- 3 Как строится эпюра продольных сил?
- 4 Что такое продольная и поперечная деформация бруса при растяжении (сжатии) и какова зависимость между ними?
- 5 По какой формуле определяется величина напряжения в поперечном сечении стержня?
- 6 Сформулируйте закон Гука и приведите формулу, выражающую этот закон.

## 3 ПРЯМОЙ ИЗГИБ

### 3.1 Теоретическая часть

Приступая к изучению этой темы необходимо уяснить, что теория изгиба построена при следующих допущениях и предположениях (рисунок 9):

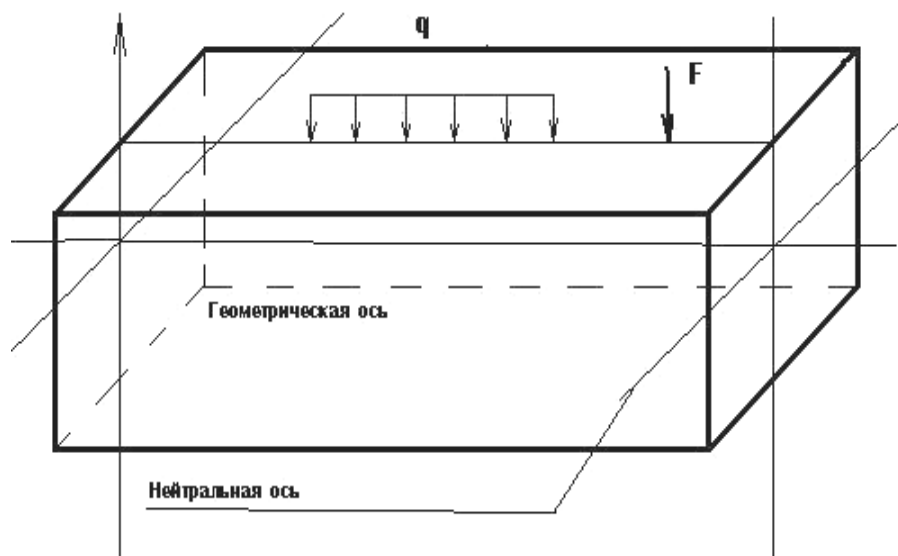


Рисунок 9 - Схема нагружения бруса

1 геометрическая ось бруса, т.е. ось, проходящая через центры тяжести сечений, есть прямая линия;

2 внешние силы, изгибающие брусок, лежат в одной плоскости, проходящей через геометрическую ось бруса и все нагрузки перпендикулярны к геометрической оси бруса

- плоскость действия нагрузок является плоскостью симметрии бруса;
- поперечные сечения бруса, плоские до деформации изгиба, остаются плоскими и после деформации;

3 деформации бруса незначительны.

Изгибом называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникают два силовых фактора – поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M_x$ , для определения численных значений, которых использу-

ется метод сечений. Необходимо помнить, что поперечная сила в данном сечении равна алгебраической сумме внешних сил, расположенных только по одну сторону (справа или слева) от рассматриваемого сечения, а изгибающий момент в данном сечении равен алгебраической сумме моментов внешних сил (расположенных слева или справа от сечения), взятых относительно центра тяжести сечения. При этом надо понять и строго придерживаться правила знаков для поперечной силы и изгибающего момента. Поперечная сила считается положительной, если внешние силы стремятся сдвинуть левую часть балки относительно правой вверх или правую часть балки относительно левой – вниз. Правило для поперечной силы показано на рисунке 10.

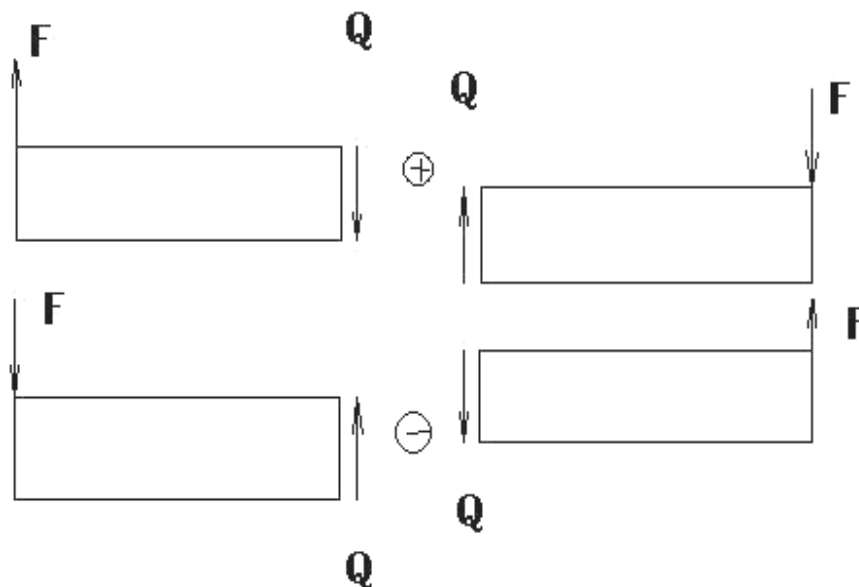


Рисунок 10 - Правило знаков поперечной силы  $Q$  при изгибе

Правило знаков для изгибающих моментов: внешним моментам, изгибающим мысленно закрепленную в рассматриваемом сечении отсеченную часть балки выпуклостью вниз, приписывается знак плюс, а моментам, изгибающим отсеченную часть балки выпуклостью вверх – знак минус.

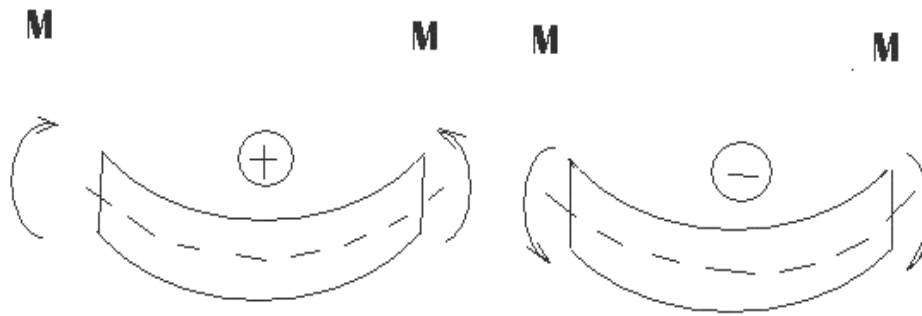


Рисунок 11- Правило знаков изгибающего момента  $M_x$  при изгибе

Следует научиться свободно, строить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Для проверки правильности построения эпюр целесообразно пользоваться теоремой Журавского, устанавливающей зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой:

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad (4)$$

т.е. поперечная сила равна производной от изгибающего момента по абсциссе сечения  $x$ .

Интенсивность распределения нагрузки:

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}, \quad (5)$$

т.е. вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения  $x$  равна интенсивности распределенной нагрузки.

Необходимо уметь выводить формулу для определения нормальных напряжений в производной точке сечения балки:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x}, \quad (6)$$

где  $M$  – изгибающий момент в данном сечении балки;

$y$  – расстояние точки сечения от нейтральной оси;

$I_x$  – осевой момент инерции сечения балки.

Из формулы для определения нормальных напряжений в производной

точке можно получить расчетное уравнение на изгиб. Обозначив допустимое напряжение на изгиб  $[\sigma]$ , получим расчетное уравнение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (7)$$

где  $M_{\max}$  – наибольший изгибающий момент в сечении балки;

$W_x$  – осевой момент сопротивления сечения.

Условие прочности позволяет выполнять три вида расчетов: проверочный расчет балки на прочность, определение допустимых размеров сечения и расчет допустимых действующих на балку нагрузок.

После этого следует перейти к изучению вопроса об определении углов поворота поперечных сечений и прогибов балок. Для их определения целесообразно использовать универсальные уравнения.

Линейное перемещение «у» центра тяжести сечения называется прогибом. Наибольший прогиб обозначают  $f$ . Сечение балки поворачивается вокруг нейтральной линии сечения на некоторый угол  $\varphi$ , который называется углом поворота сечения. Условие жесткости при изгибе записывают в виде:

$$f \leq [f]; \quad \varphi_{\max} \leq [\varphi]$$

Допустимый прогиб назначают в долях пролета балки  $\ell$ .

Для валов принимают  $[f] = (0,0002 - 0,0010) \ell$ .

Допустимые углы поворота сечений вала в местах, где расположены подшипники, принимают в пределах  $0,001 - 0,005$  рад.

### 3.2 Практическая часть

**Задача 1.** Дано:  $\ell=2,4\text{м}$ ;  $F=12\text{кН}$ ;  $q=10\text{кН/м}$ ;  $M=6\text{кНм}$ .

Определить номер двутавра, прогиб в середине пролета.

Решение:

Схема нагружения балки представлена на рисунке 12. Определим опорные реакции, записывая уравнения моментов всех сил, приложенных к балке, относительно точек А и В.

$$\sum M_A = 0 \quad q \cdot 2,4 \cdot 1,2 + q \cdot 1,2 \cdot 5,4 + F \cdot 2,4 - M - R_B \cdot 4,8 = 0$$

$$R_B = \frac{q \cdot 2,4 \cdot 1,2 + q \cdot 1,2 \cdot 5,4 + F \cdot 2,4 - M}{4,8} = 24,25 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0 \quad q \cdot 2,4 \cdot 3,6 - q \cdot 1,2 \cdot 0,6 + F \cdot 2,4 + M - R_A \cdot 4,8 = 0$$

$$R_A = \frac{q \cdot 2,4 \cdot 3,6 - q \cdot 1,2 \cdot 0,6 + F \cdot 2,4 + M}{4,8} = 23,75 \text{ кН}$$

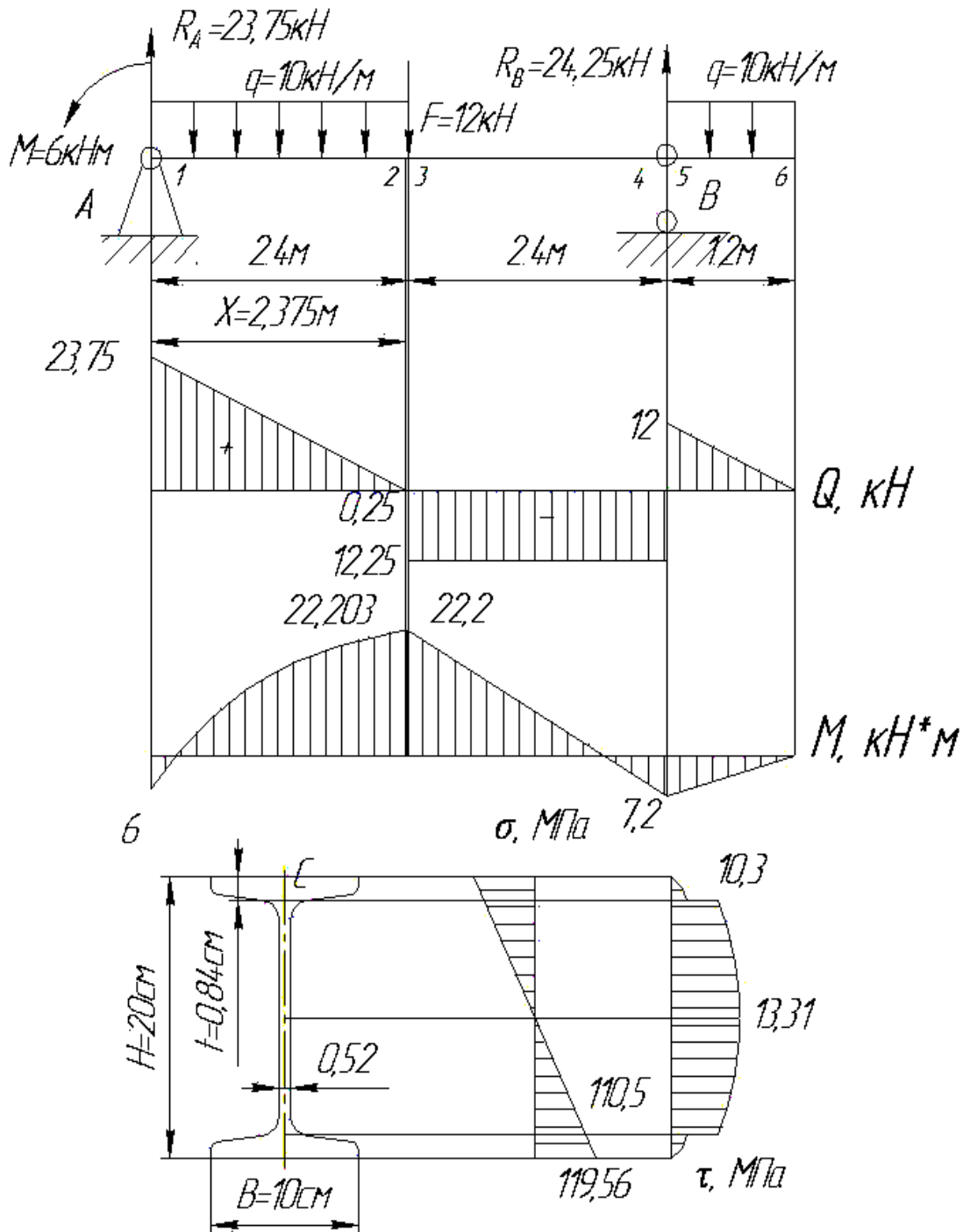


Рисунок 12- Схема нагружения балки



$$\text{Проверка: } \sum P_x = 0 \quad R_A - F + R_B - q \cdot 2,4 - q \cdot 1,2 = 0$$

Положительные знаки опорных реакций свидетельствуют о том, что предполагаемое направление соответствует истинному. Возьмем на балке характерные сечения и вычислим в них величины  $Q$  и  $M$ .

Определение значений поперечной силы в характерных сечениях.

$$Q_{1-1} = R_A = 23,75 \text{ кН}$$

$$Q_{2-2} = R_A - q \cdot 2,4 = -0,25 \text{ кН}$$

$$Q_{3-3} = Q_{4-4} = R_A - q \cdot 2,4 - F = -12,25 \text{ кН}$$

$$Q_{5-5} = q \cdot 1,2 = 12 \text{ кН}$$

$$Q_{6-6} = 0$$

$$X = \frac{2,4 \cdot 23,75}{24} = 2,375 \text{ м}$$

По найденным значениям поперечных сил построена эпюра  $Q$ .

Определение величин изгибающих моментов в характерных сечениях.

$$M_{1-1} = -M = -6 \text{ кНм}$$

$$M_{2-2} = M_{3-3} = -M + R_A \cdot 2,4 - q \cdot 2,4 \cdot 1,2 = 22,2 \text{ кНм}$$

$$M_{4-4} = M_{5-5} = -q \cdot 1,2 \cdot 0,6 = -7,2 \text{ кНм}$$

$$M_{6-6} = 0$$

По найденным значениям моментов строим эпюру изгибающих моментов  $M_x$ .

Из эпюры изгибающих моментов находим опасное сечение

$$M_{\max} = 22,203 \text{ кНм}$$

Из условия прочности  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_y}{n} = \frac{240}{1,6} = 150 \text{ МПа}$$

Найдем необходимый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{22,203 \cdot 10^{-3}}{150} 10^6 = 148,02 \text{ см}^3$$

По сортаменту (ГОСТ 8239–72) принимаем двутавр № 20 с  $W_x = 184 \text{ см}^3$   
 $S_x^* = 104 \text{ см}^3$ ;  $I_x = 1840 \text{ см}^4$ ;  $[\tau] = 0,6[\sigma] = 90 \text{ МПа}$

Опасное сечение в точке, где  $M=22,2 \text{ кНм}$ ,  $Q=12,25 \text{ кН}$ .

Определим максимальные, нормальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{22 \cdot 10^{-3}}{184 \cdot 10^{-6}} = 119,56 \text{ МПа} < [\sigma] = 150 \text{ МПа}$$

Максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^*}{b \cdot I_x} = \frac{12,25 \cdot 10^{-3} \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 13,31 \text{ МПа} < [\tau] = 90 \text{ МПа}$$

Определяем напряжения в опасном сечении в точке С по формуле

$$\sigma_c = \frac{M_x \cdot y_c}{I_x} = \frac{22,2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,16 \cdot 10^{-2}}{1840 \cdot 10^{-8}} = 110,5 \text{ МПа}$$

$$\tau_c = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^{omc}}{b \cdot I_x} = \frac{12,25 \cdot 10^{-3} \cdot 80,472 \cdot 10^{-6}}{0,52 \cdot 10^{-2} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 10,3 \text{ МПа} < [\tau] = 90 \text{ МПа}$$

$$S_x^{omc} = Bt \left( \frac{H}{2} - \frac{t}{2} \right) = 10 \cdot 0,84(10 - 0,42) = 80,472 \text{ см}^3$$

По найденным данным строим эпюры напряжений.

Определим перемещение точки К балки.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$V_A = 0 \text{ при } X = 0; \quad V_B = 0 \text{ при } X = 4,8 \text{ м.}$$

Левая опора совпадает с началом координат  $V_A = V_0 = 0$ . Следовательно, один из начальных параметров определен.

В уравнение должно войти все внешние усилия расположенные левее точки В.

$$EIV_B = EIV_0 + EIv_0 \cdot 4,8 + R_A \frac{(4,8-0)^3}{3!} - M \frac{(4,8-0)^2}{2!} - q \frac{(4,8-0)^4}{4!} - F \frac{(4,8-2,4)^3}{3!} + q \frac{(4,8-2,4)^4}{4!}$$

$$EIv_0 \cdot 4,8 + 23,75 \frac{4,8^3}{6} - 6 \frac{4,8^2}{2} - 10 \frac{4,8^4}{24} - 12 \frac{2,4^3}{6} + 10 \frac{2,4^4}{24}$$

$$EIv_0 = -27,84 \text{ кНм}^2$$

Для определения прогиба в точке К при  $x = 2,4 \text{ м}$  составим уравнение:

$$EIV_K = -27,84 \cdot 2,4 + 23,75 \frac{2,4^3}{6} - 6 \frac{2,4^2}{2} - 10 \frac{2,4^4}{24} = -43,2 \text{ кНм}^3$$

$$V_K = \frac{-43,2 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^7 \cdot 1840} = -1,17 \text{ см}$$

Таким образом точка К перемещается вниз на 1,17 см.

Анализируя эпюру  $M_x$  видим, что на участке 0-1 растянуты нижние волокна, и поэтому на этом участке изогнутая ось балки будет иметь выпуклость вниз. В точке, где  $M_x = 0$ , будет точка перегиба. На участке 1-2 растянуты верхние волокна, и изогнутая ось балки будет иметь выпуклость вверх. На участке 3-4 растянуты нижние волокна, и изогнутая ось балки будет иметь выпуклость вниз. В точке, где  $M_x = 0$ , будет точка перегиба. Учитывая все сказанное и то, что прогибы в опорных сечениях равны нулю, строим приблизительный вид изогнутой балки (рисунок 13).

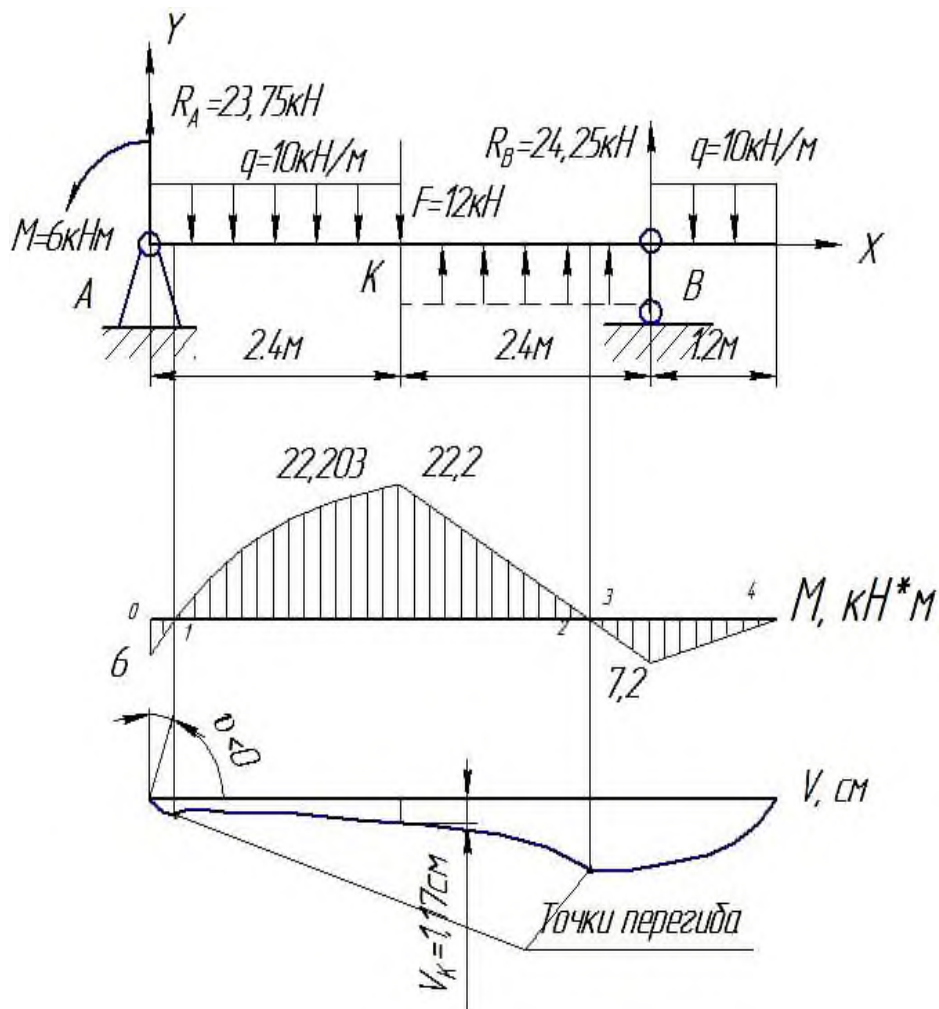


Рисунок 13 - Приблизительный вид изогнутой балки

**Задача 2.** Дано: В предыдущей задаче мы выбрали сечение балки состоящее из двутавра №10 с  $I_x = 198 \text{ см}^4$ ;  $W_x = 39,7 \text{ см}^3$

Определим прогибы балки.

Решение:

В точке 1 прикладываем единичную силу, от нее определяем реакции опор и строим эпюру изгибающих моментов, которую «перемножаем» на эпюру М (рисунок 14).

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \frac{0,5}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 1,575 + 0,5 \cdot 1,575) + \\
 &+ \frac{1}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 1,575 - 2 \cdot 0,327 \cdot 2,635 + 0,327 \cdot 1,575 - 0,5 \cdot 2,635) + \\
 &+ \frac{0,6}{6EI_x} (-2 \cdot 0,327 \cdot 2,635 - 2 \cdot 0,224 \cdot 3,898 - 0,327 \cdot 3,898 - 2,635 \cdot 0,224) - \\
 &- \frac{7 \cdot 0,6^3}{24EI_x} \cdot 0,551 + \frac{1,3}{6EI_x} (-2 \cdot 0,224 \cdot 3,898 + 2 \cdot 0,224) - \frac{7 \cdot 1,3^3}{24EI_x} \cdot 0,224 = \\
 &= \frac{0,954}{EI_x} = \frac{0,954 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}
 \end{aligned}$$

Знак «плюс» указывает на то, что точка 1 перемещается по направлению единичной силы, т.е. вниз.

В точке 2 прикладываем единичную силу, от нее определяем реакции опор и строим эпюру изгибающих моментов, которую «перемножаем» на эпюру М.

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \frac{1}{6EI_x} (-2 \cdot 2,635 \cdot 0,327 + 0,327 \cdot 1,575) + \\
 &+ \frac{0,6}{6EI_x} (-2 \cdot 2,2635 - 2 \cdot 0,524 \cdot 3,898 - 2,635 \cdot 0,524 - 3,898 \cdot 0,327) - \\
 &- \frac{7 \cdot 0,6^3}{24EI_x} \cdot 0,851 + \frac{1,3}{6EI_x} (-2 \cdot 0,524 \cdot 3,898 + 2 \cdot 2 \cdot 0,95 - 0,95 \cdot 3,898 + 0,524 \cdot 2) - \\
 &- \frac{7 \cdot 1,3^3}{24EI_x} \cdot 1,474 + \frac{0,95}{6EI_x} (2 \cdot 0,95 \cdot 2) = \frac{2,08}{EI_x} = \frac{2,08 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 5,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}
 \end{aligned}$$

Знак «плюс» указывает на то, что точка 2 перемещается по направлению

единичной силы, т.е. вниз.

Определим углы поворотов поперечных сечений балки.

В точке 1 прикладываем единичный момент, от него определяем реакции опор и строим эпюру изгибающих моментов, которую «перемножаем» на эпюру  $M$ .

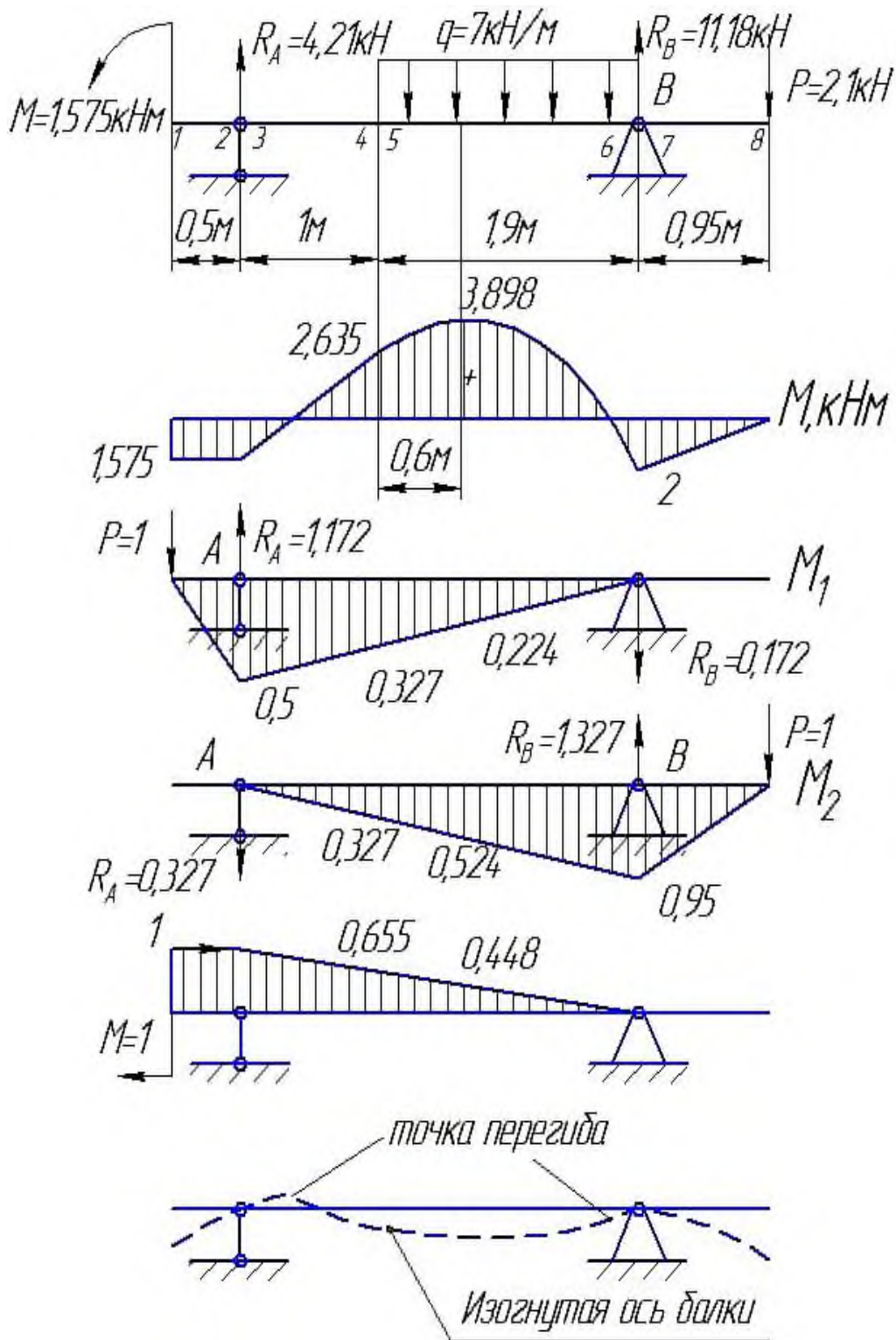


Рисунок 14 – Точка перегиба и изогнутая ось балки

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \frac{0,5}{6EI_x} (-2 \cdot 1 \cdot 1,575 - 2 \cdot 1 \cdot 1,575 - 2 \cdot 1 \cdot 1,575) + \\
&+ \frac{1}{6EI_x} (-2 \cdot 1 \cdot 1,575 + 2 \cdot 0,635 \cdot 2,635 - 0,655 \cdot 1,575 + 1 \cdot 2,635) + \\
&+ \frac{0,6}{6EI_x} (2 \cdot 0,635 \cdot 2,635 + 2 \cdot 0,448 \cdot 3,898 + 0,655 \cdot 3,898 + 2,635 \cdot 0,448) + \\
&+ \frac{7 \cdot 0,6^3}{24EI_x} \cdot 1,103 + \frac{1,3}{6EI_x} (2 \cdot 0,448 \cdot 3,898 - 2 \cdot 0,448) - \frac{7 \cdot 1,3^3}{24EI_x} \cdot 0,448 = \\
&= \frac{0,915}{EI_x} = \frac{0,915 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ рад}
\end{aligned}$$

Знак «плюс» указывает на то, что сечение в точке 1 поворачивается по часовой стрелке.

**Задача 3.** Для заданных двух схем балок (рисунок 15) требуется написать выражения  $Q_y$ ,  $M_x$  для каждого участка в общем виде, построить эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$ , найти  $M_{x \max}$  и подобрать:

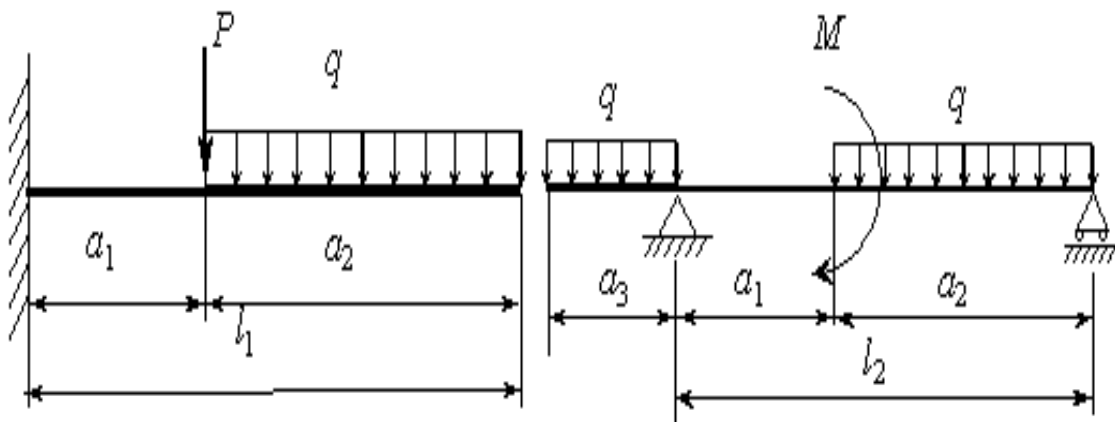


Схема а

Схема б

Рисунок 15 - Плоский изгиб

для схемы а: деревянную балку круглого поперечного сечения при  $[\sigma] = 8$  МПа;

для схемы б: стальную балку двутаврового поперечного сечения при  $[\sigma] = 160$  МПа.

Исходные данные:  $M = 20$  кН·м;  $P = 20$  кН;  $q = 8$  кН/м;  $L_1 = 12$  м;  $L_2 = 8$  м;  $a_1/a = 2$ ;  $a_2/a = 8$ ;  $a_3/a = 3$ .

### 3.3 Вопросы для самопроверки

- 1 Дайте определение понятия «прямой чистый изгиб», «прямой поперечный изгиб».
- 2 Как находится изгибающий момент в каком-либо сечении балки?
- 3 Как находится поперечная сила в каком-либо сечении балки? Когда поперечная сила считается положительной?
- 4 Какой случай называется чистым изгибом?
- 5 Напишите формулу для определения нормального напряжения в произвольной точке поперечного сечения бруса, работающего на изгиб. Какой момент инерции входит в указанную формулу?
- 6 Как записывается условие прочности при изгибе?
- 7 Что называется осевым моментом сопротивления?
- 8 Напишите формулы для определения осевых моментов сопротивления круга, кольца, прямоугольника.
- 9 Какие формы поперечных сечений рациональны для балок из пластичных материалов?
- 10 Какие формы поперечных сечений следует применять для чугунных балок?
- 11 В каких плоскостях возникают касательные напряжения при изгибе? Как находится их величина?
- 12 Как записывается дифференциальное уравнение натянутой оси балки?
- 13 Как находят прогиб балки графо-аналитическим методом?
- 14 Напишите универсальное уравнение для определения перемещений при изгибе.
- 15 В чем состоит сущность расчета на жесткость при изгибе?

## **4 ЭНЕРГИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

### **4.1 Теоретическая часть**

Статически неопределимые балки и рамы – конструкции, в которых уравнений статики недостаточно для определения опорных реакций и внутренних усилий. Число связей, наложенных на статически неопределимую систему, больше того количества связей, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость конструкции. Такими связями могут быть как опорные связи, так и стержни самой конструкции. Будем рассматривать балки и простые рамы, то есть такие конструкции, в которых связями, обеспечивающими геометрическую неизменяемость, являются опорные закрепления (опорные связи). Для обеспечения геометрической неизменяемости балки (рамы) в плоскости достаточно трех связей. Каждая связь запрещает какое-то перемещение. Шарнирно-подвижная опора запрещает перемещение по направлению, перпендикулярному плоскости опирания, и является одной связью. Шарнирно-неподвижная опора делает невозможными линейные перемещения по двум взаимно-перпендикулярным направлениям (вертикальному и горизонтальному) и соответствует двум связям, наложенным на конструкцию. Наконец, при наличии жесткого защемления на конце стержня становятся невозможными все перемещения: и вертикальное, и горизонтальное, и угол поворота, поэтому, жесткое защемление представляет собой три связи, обеспечивающие геометрическую неизменяемость балки (рамы). Каждая дополнительная связь сверх трех для плоских систем превращает конструкцию в статически неопределимую. Такие дополнительные связи, которые не являются необходимыми для обеспечения геометрической неизменяемости конструкции, называются лишними.

Оговоримся, что здесь и далее понятие «расчет» подразумевает только построение эпюр внутренних силовых факторов, возникающих в элементах системы, а не расчет на прочность, жесткость и т.д.



Статически неопределимые системы обладают рядом характерных особенностей:

1. Статически неопределимая система ввиду наличия добавочных лишних связей, по сравнению с соответствующей статически определимой системой оказывается более жесткой;

2. В статически неопределимых системах возникают меньшие внутренние усилия, что определяет их экономичность по сравнению со статически определенными системами при одинаковых внешних нагрузках;

3. Разрушение лишних связей в нагруженном состоянии, не ведет к разрушению всей системы в целом, так как удаление этих связей приводит к новой геометрически неизменяемой системе, в то время как потеря связи в статически определимой системе приводит к изменяемой системе;

4. Для расчета статически неопределимых систем необходимо предварительно задаваться геометрическими характеристиками поперечных сечений элементов, т.е. фактически их формой и размерами, так как их изменение приводит к изменению усилий в связях и новому распределению усилий во всех элементах системы;

5. При расчете статически неопределимых систем необходимо заранее выбрать материал конструкции, так как необходимо знать его модули упругости;

6. В статически неопределимых системах температурное воздействие, осадка опор, неточности изготовления и монтажа вызывают появление дополнительных усилий.

Основными методами расчета статически неопределимых систем являются:

1. Метод сил. При расчете по методу сил основными искомыми величинами являются усилия в лишних связях. Знание усилий в лишних связях позволит по методу сечений выполнять полный расчет по определению усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов заданной системы;

2. Метод перемещений. При расчете по методу перемещений основными искомыми величинами являются перемещения узловых точек, вызванные деформацией системы. Знание этих перемещений необходимо и достаточно для определения всех внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов, заданной системы;

3. Метод конечных элементов. При расчете по методу конечных элементов система разбивается на простые конечные элементы и по матрице жесткости элемента и системы в целом устанавливается связь между перемещениями узлов элемента и системы и усилиями в них;

4. Смешанный метод. Здесь часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть – перемещения;

5. Комбинированный метод. Используется при расчете симметричных систем на несимметричные нагрузки. Оказывается, что на симметричную составляющую заданной нагрузки систему целесообразно рассчитывать методом перемещений, а на обратносимметричную составляющую – методом сил.

Помимо указанных аналитических методов при расчете особо сложных систем используются различные численные методы.

Кроме указанной классификации, методы расчета статически неопределимых систем можно расчленить по степени их точности, по области работы материала сооружений, по особенностям расчетных операций и т.д.

По степени точности различают точные и приближенные методы расчета.

Точные методы базируются на обычных основных допущениях, принятых при расчете достаточно жестких сооружений (закон Гука, расчет по деформированной схеме, принцип сложения действия сил). Приближенные методы расчета, кроме обычных упрощений, используют дополнительные допущения, что обуславливает заметное отклонение от результатов точных методов расчета.

По области работы материала различают расчет сооружений в упругой стадии и расчет сооружений за пределом упругости. По особенностям расчет-

ных операций методы расчета можно разделить на вычислительные и экспериментальные.

## 4.2 Практическая часть

**Задача 1.** Дано:  $L = 4,5$  м,  $q = 40$  кН/м,  $P = 150$  кН,  $M = 15$  кНм,  $\alpha = 0,5$ ,  
 $\beta = 0,5$ ,  $[\sigma] = 140$  МПа

Решение:

1 Расчет начинаем с определения степени статической определимости. Так как неизвестных реакций четыре, а уравнений равновесия можно составить три, то задача один раз статически не определима.

2 Для неразрезной балки в качестве основной системы выбираем такую же балку но с врезанными шарнирами на промежуточной опоре в шарнирах (рисунок 16).

3 К основной системе приложим заданную нагрузку, определяем реакции опор и построим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки.

Участок АВ

$$\sum M_A = 0 \quad P \cdot 2,25 + M - R_B \cdot 4 = 0$$

$$R_B = \frac{P \cdot 2,25 + M}{4,5} = 78,333 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0 \quad P \cdot 2,25 - M - R_A \cdot 4 = 0$$

$$R_A = \frac{P \cdot 2,25 - M}{4,5} = 71,666 \text{ кН}$$

Участок ВС

$$\sum M_B = 0 \quad q \cdot 2,25 \cdot 1,125 - R_C \cdot 4,5 = 0$$

$$R_C = \frac{q \cdot 2,25 \cdot 1,125}{4,5} = 22,5 \text{ кН}$$

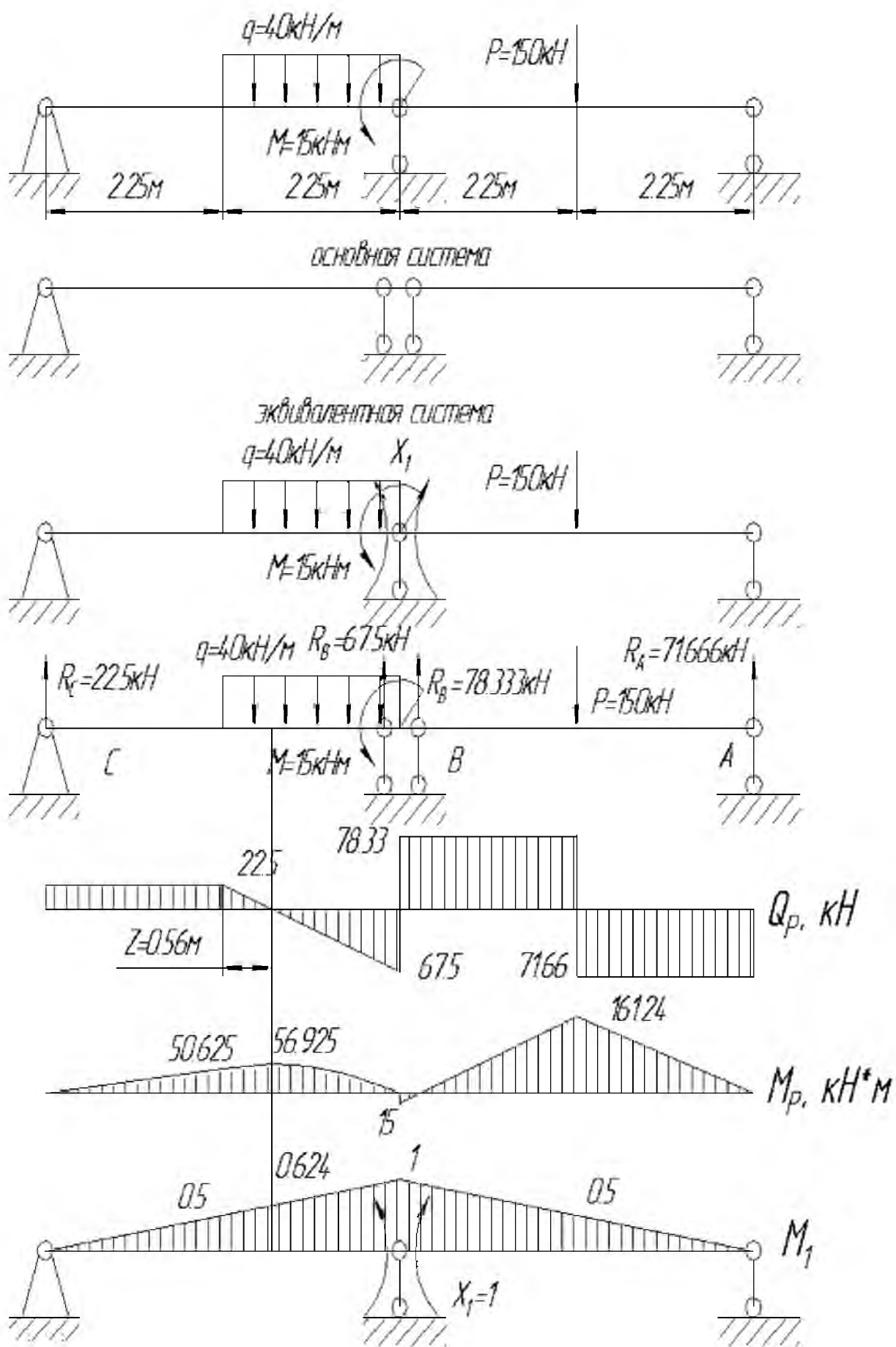


Рисунок 16 - Статически неопределимая балка

$$\sum M_C = 0 \quad q \cdot 2,25 \cdot 3,375 - R_B \cdot 4,5 = 0$$

$$R_B = \frac{q \cdot 2,25 \cdot 3,375}{4,5} = 67,5 \text{ кН}$$

4 Снимаем заданную нагрузку, прикладываем  $X_1=1$  и строим эпюру изгибающих моментов.

5 Составим каноническое уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

6 Определим коэффициенты канонического уравнения.

Перемножим эпюру  $M_1$  саму на себя

$$\delta_{11} = \frac{4,5}{6EI_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{4,5}{6EI_x} (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{3}{EI_x}$$

Перемножим эпюру  $M_1$  и  $M_p$

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 161,24) + \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 161,24 - 2 \cdot 15 \cdot 1 + 1 \cdot 161,24 - 0,5 \cdot 15) + \\ &+ \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 50,625) + \frac{0,56}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 50,625 + 2 \cdot 56,925 \cdot 0,624 + 0,5 \cdot 56,925 + \\ &+ 0,624 \cdot 50,625) + \frac{40 \cdot 0,56^3}{24EI_x} 1,124 + \frac{1,69}{6EI_x} (2 \cdot 56,925 \cdot 0,624 + 1 \cdot 56,925) + \\ &+ \frac{40 \cdot 1,69^3}{24EI_x} 1,624 = \frac{252,715}{EI_x} \end{aligned}$$

7 Решим каноническое уравнение.

$$X_1 = -\frac{252,715}{3} = -84,238 \text{ кНм}$$

8 К каждой из балок прикладываем заданную нагрузку и найденный момент. От них определяем реакции опор и строим эпюры  $Q$  и  $M$ .

Участок АВ

$$\sum M_A = 0 \quad P \cdot 2,25 + M + X_1 - R_B \cdot 4,5 = 0$$

$$R_B = \frac{P \cdot 2,25 + M + X_1}{4,5} = 97,05 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0 \quad P \cdot 2,25 - M - X_1 - R_A \cdot 4,5 = 0$$

$$R_A = \frac{P \cdot 2,25 - M - X_1}{4,4} = 52,95 \text{ кН}$$

Участок ВС

$$\sum M_B = 0 \quad q \cdot 2,25 \cdot 1,125 - X_1 - R_C \cdot 4,5 = 0$$

$$R_C = \frac{q \cdot 2,25 \cdot 1,125 - X_1}{4,5} = 3,78 \text{ кН}$$

$$\sum M_C = 0 \quad q \cdot 2,25 \cdot 3,375 + X_1 - R_B \cdot 4,5 = 0$$

$$R_B = \frac{q \cdot 2,25 \cdot 3,375 + X_1}{4,5} = 86,22 \text{ кН}$$

9 Выполним деформационную проверку.

Перемножим эпюру  $M_1$  и  $M_s$

$$\begin{aligned} \Delta_{1s} = & \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 119,12) + \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 119,12 - 2 \cdot 69,238 \cdot 1 + 1 \cdot 119,12 - \\ & - 0,5 \cdot 69,238) + \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 8,505) + \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 8,505 - 2 \cdot 1 \cdot 84,238 + \\ & + 1 \cdot 8,505 - 0,5 \cdot 84,238) + \frac{40 \cdot 2,25^3}{24EI_x} 1,5 \approx 0 \end{aligned}$$

10 Из эпюры изгибающих моментов находим опасное сечение

$$M_{\max} = 119,12 \text{ кНм}$$

$$\text{Из условия прочности } \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

Найдем необходимый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{119,12 \cdot 10^3}{140} = 850,8 \text{ см}^3$$

$$\text{Для одного швеллера } W_x = \frac{850,8}{2} = 425,4 \text{ см}^3$$

По таблице сортамента выбираем швеллер №33 ГОСТ 8239

$$W_x = 484 \text{ см}^3 \quad I_x = 7980 \text{ см}^4.$$

11 Определим прогиб и угол поворота в заданных сечениях.

В точке К прикладываем единичную силу, от нее определяем реакции опор и строим эпюру изгибающих моментов, которую «перемножаем» на эпюру  $M$ .

$$y_K = \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 119,12 \cdot 1) + \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 119,12 \cdot 1 - 69,238 \cdot 1) = \frac{152,715}{EI_x} =$$

$$= \frac{152,715 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 7980 \cdot 10^{-8}} = 9,56 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9,56 \text{ мм}$$

Знак «плюс» указывает на то, что точка К перемещается по направлению единичной силы, т.е. вниз.

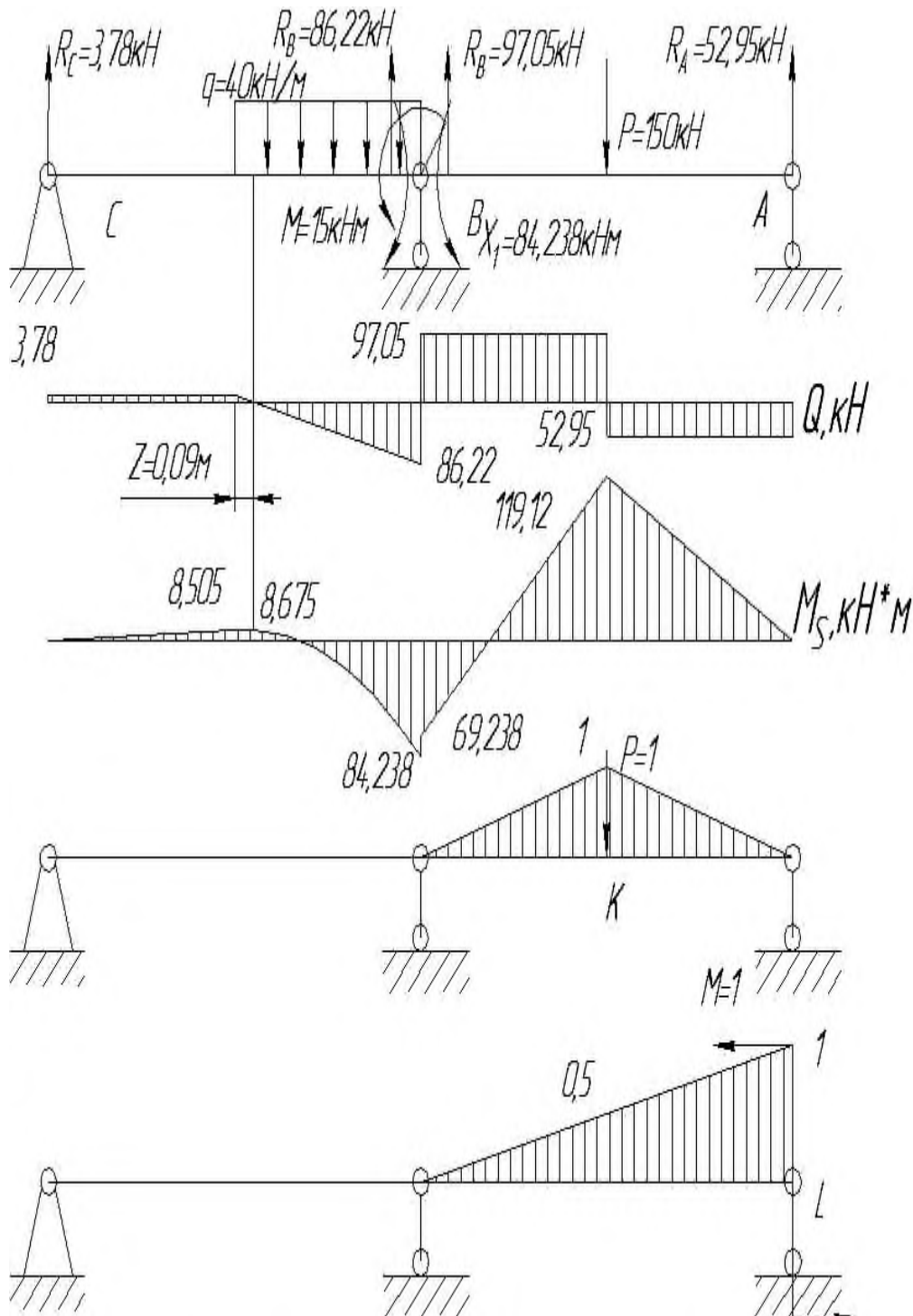


Рисунок 17 - Прогиб и угол поворота в заданных сечениях

В сечении  $L$  прикладываем единичный момент, от него строим эпюру изгибающих моментов, которую «перемножаем» на эпюру  $M$ .

$$\begin{aligned}\theta_L &= \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 119,12 + 119,12 \cdot 1) + \frac{2,25}{6EI_x} (2 \cdot 0,5 \cdot 119,12 - 0,5 \cdot 69,238) = \\ &= \frac{121}{EI_x} = -\frac{121 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 7980 \cdot 10^{-8}} = 7,58^{-3} \text{ рад}\end{aligned}$$

Знак «плюс» указывает на то, что сечение в  $L$  поворачивается в направлении единичного момента, т.е. по часовой стрелке.

**Задача 2.** Для статически неопределимой балки (рисунок.18, а) требуется:

- 1) раскрыть ее статическую неопределимость;
- 2) построить эпюру изгибающих моментов от действия внешних (пролетных) нагрузок;
- 3) подобрать двутавровое сечение балки из условия ее прочности;
- 4) определить угол поворота сечения  $L$  и прогиб балки в сечении  $K$ .

Дано:  $q = 6$  кН/м;  $m = 4$  кНм;  $a = 1,2$  м;  $[\sigma] = 160$  МПа;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.



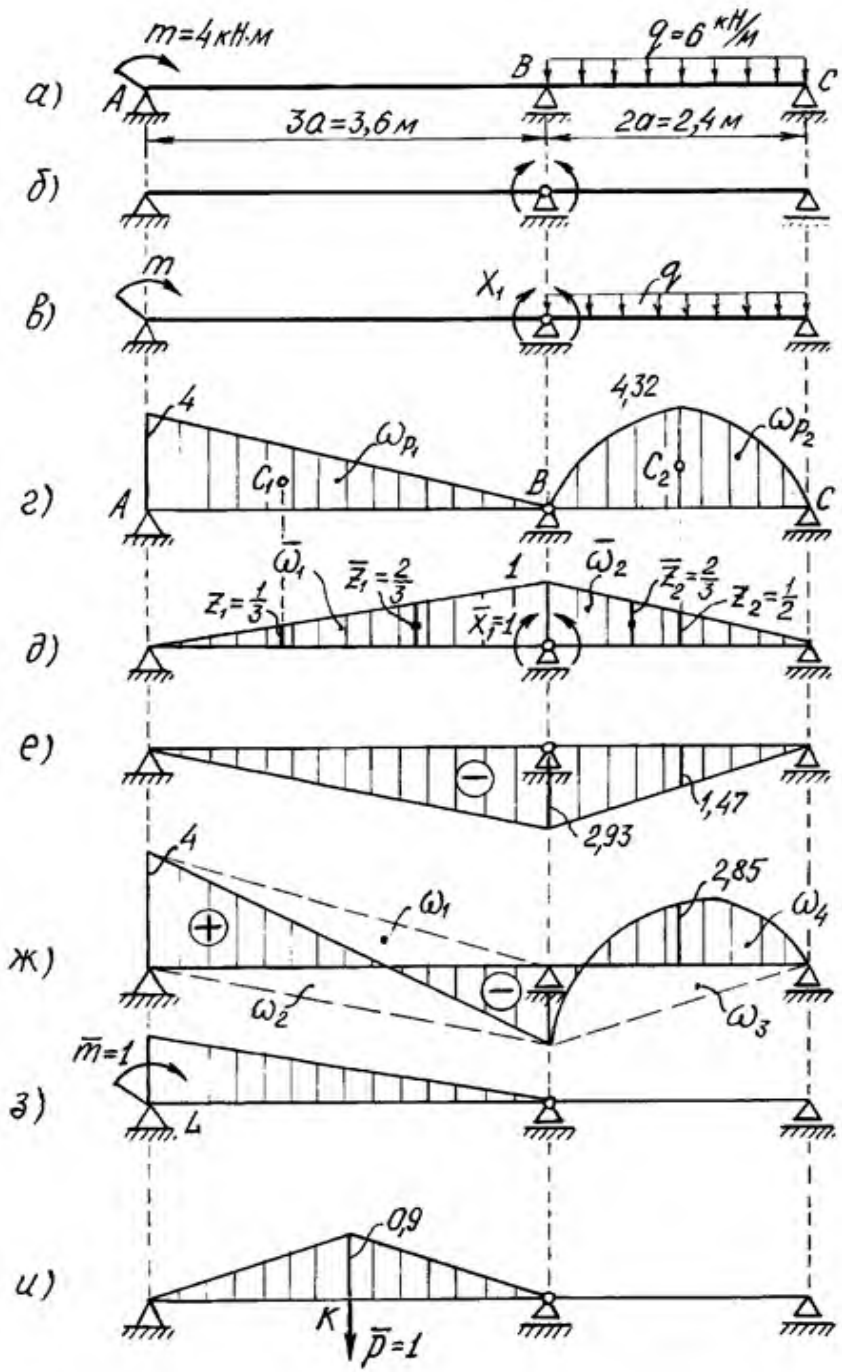


Рисунок 18- Статически неопределимая балка:

- а - заданная система; б - основная система; в - эквивалентная система;  
 г - грузовая эпюра  $M_p$ ; д - единичная эпюра  $M_1$ ; е - эпюра;  
 ж - окончательная эпюра  $M$ ; з - эпюра от единичного момента  $M_m$ ;  
 и - эпюра от единичной силы  $M_p$

Решение:

1 Вычисляем степень статической неопределимости балки.

По условиям закрепления имеем четыре опорных реакции: две на опоре  $A$  и по одной на опорах  $B$  и  $C$ . Для плоской системы сил можно составить только три уравнения равновесия, поэтому степень статической неопределимости балки  $n = 4 - 3 = 1$ , т.е. система один раз статически неопределима.

2 Выбираем основную систему.

Для этого разрезаем балку над средней опорой, тем самым, устраняя лишнюю связь, и вставляем над опорой промежуточный шарнир. «Лишней» неизвестной в этом случае будет изгибающий момент в опоре  $B$ , который обозначаем  $X_1$ . На рисунке 18,б показана основная система. Загружая основную систему пролетными нагрузками и лишней неизвестной, получаем эквивалентную систему (рисунок 18,в). Достоинство принятой основной системы в том, что каждый пролет работает как самостоятельная балка и при построении эпюр может рассматриваться отдельно.

3 Строим в основной системе эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_p$ .

Рассмотрим участок  $AB$ . Так как на этом участке нагрузок нет, для построения эпюры достаточно знать величины изгибающих моментов в сечениях  $A$  и  $B$ . На опоре  $A$  по условию  $M = m = 4$  кНм; на опоре  $B$  изгибающий момент равен нулю (опорный момент  $X_1$  не учитываем), эпюра моментов ограничена прямой линией.

Рассмотрим участок  $BC$ .

Вследствие симметрии пролетной нагрузки реакции опор будут одинаковыми:

$$R_B = R_C = \frac{q \cdot 2a}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1,2}{2} = 7,2 \text{ кН}$$

Изгибающий момент в произвольном сечении  $x$

$$M_{(x)} = R_B \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} = 7,2 \cdot x - \frac{6 \cdot x^2}{2}$$

и эпюра изгибающего момента ограничена квадратной параболой.

Строим эту параболу по трем лежащим на ней точкам:

$$x_B = 0, \quad M_B = 0;$$

$$x = 1,2 \text{ м}, \quad M_{\max} = 7,2 \cdot 1,2 - \frac{6 \cdot 1,2^2}{2} = 4,32 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$x_c = 2,4 \text{ м}, \quad M_c = 0.$$

Эпюра  $M_p$  показана на рис.3, з.

4 Строим эпюру  $\bar{M}_1$  от единичного момента  $\bar{X}_1 = 1$ .

В сечениях  $A$  и  $C$  изгибающие моменты равны нулю, а в сечении  $B$  изгибающий момент равен единице. Эпюра  $\bar{M}_1$  линейна, ее вид показан на рис.3, д.

5 Составляем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

и вычисляем коэффициент  $\delta_{11}$  при неизвестном. Для этого эпюра  $\bar{M}_1$  умножается сама на себя. Чтобы упростить вычисления, разбиваем эпюру на два треугольника  $ADB$  и  $BDC$  и площадь каждого из них умножаем на ординату, расположенную в центре тяжести каждого из них (рисунок 18, д):

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_i} (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{z}_1 + \bar{\omega}_2 \cdot \bar{z}_2)$$

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 1 = 1,8 \quad \bar{z}_1 = \frac{2}{3}$$

$$\bar{\omega}_2 = \frac{1}{2} \cdot 2,4 \cdot 1 = 1,2 \quad \bar{z}_2 = \frac{2}{3}$$

После подстановки числовых значений имеем

$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ}$$

Для определения  $\Delta_{1p}$  перемножаем эпюры  $M_p$  и  $\bar{M}_1$  (рисунок 18, з, д)

Площадь параболического сегмента вычисляется по формуле:

$$\omega_{\text{нар}} = \frac{ql^3}{12}$$

где  $q$  - интенсивность распределенной нагрузки;  $l$  - длина участка балки под нагрузкой.

Вычисляем свободный член канонического уравнения  $\Delta_{1p}$ :

$$\Delta_{1p} = (M_p \cdot \overline{M}_1) = \frac{1}{EJ} (\omega_{p1} z_1 + \omega_{p2} z_2)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3,6 = 7,2 \quad z_1 = \frac{1}{3}$$

$$\omega_4 = \frac{ql^3}{12} = \frac{6 \cdot 2,4^3}{12} = 6,912 \quad z_2 = \frac{1}{2}$$

Произведя соответствующие вычисления, получаем

$$\Delta_{1p} = \frac{5,856}{EJ}.$$

Тогда каноническое уравнение принимает вид

$$\frac{2}{EJ} \cdot X_1 + \frac{5,856}{EJ} = 0$$

откуда находим

$$x_1 = -\frac{5,856}{2} = -2,92 \text{ кНм.}$$

Отрицательное значение  $X_1$  говорит о том, что следует изменить направление момента  $X_1$  на обратное.

6 Строим эпюру изгибающих моментов.

Считая момент  $X_1$  внешней нагрузкой, можно определить опорные реакции, рассматривая каждый пролет балки отдельно, а затем построить эпюру моментов обычным способом, как это выполнялось для статически определимой балки. В данном случае удобнее воспользоваться уже построенными эпюрами.

Эквивалентная система находится под действием заданных пролетных нагрузок и вычисленного момента  $X_1$ . Следовательно, окончательная эпюра изгибающих моментов может быть представлена суммой двух эпюр

$$M = M_p + M_{x1}.$$

Первая эпюра уже построена (рисунок 18, з), а вторая получается умножением ординат эпюры  $\overline{M}_1$  (рисунок 18, д) на вычисленное значение  $X_1$ . Эпюра  $M_{x1}$  показана на рисунке 18,е. Геометрически складываем эпюры  $M_p$  и  $M_{x1}$  (рисунок 18, з, е), суммируя ординаты эпюр в характерных точках:

$$M_A = 4 + 0 = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad M_E = 4,32 - 1,47 = 2,85 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$M_B = 0 - 2,93 = -2,93 \text{ кН}\cdot\text{м}. \quad M_C = 0.$$

По найденным значениям  $M$  строим окончательно эпюру изгибающих моментов (рисунок 18, ж).

Для проверки правильности расчетов и построения эпюры изгибающих моментов можно использовать условие равенства нулю угла поворота смежных сечений балки над средней опорой (перемещение по направлению отброшенной связи). Этот угол вычисляется перемножением окончательной эпюры моментов (рисунок 18, ж) на эпюру  $\overline{M}_1$  (рисунок 18, д). При перемножении эпюру  $M$  удобно представить в виде трех треугольников, показанных пунктирными линиями на рисунке 18, ж, и параболического сегмента.

Угол поворота смежных сечений балки над средней опорой вычислим методом перемножения эпюр:

$$\theta_B = \frac{1}{EJ} (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4).$$

Площади эпюр и соответствующие ординаты под их центрами тяжести

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3,6 = 7,2 \quad z_1 = \frac{1}{3}$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2,93 \cdot 3,6 = -5,274 \quad z_1 = \frac{2}{3}$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{2} \cdot 2,93 \cdot 2,4 = -3,516 \quad z_2 = \frac{2}{3}$$

$$\omega_4 = \frac{ql^3}{12} = \frac{6 \cdot 2,4^3}{12} = 6,912 \quad z_3 = \frac{1}{3}$$

определяются по соответствующим эпюрам (рисунок 18, ж) и (рисунок 18, д).

Итак,

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EJ} (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \omega_4 y_4) = \frac{1}{EJ} \left( 7,2 \cdot \frac{1}{3} - 5,274 \cdot \frac{2}{3} - 3,516 \cdot \frac{2}{3} + 6,912 \cdot \frac{1}{2} \right) = \\ &= -\frac{0,004}{EJ} \approx 0 \end{aligned}$$

Полученный результат свидетельствует о том, что эпюра изгибающих моментов построена правильно. Небольшая погрешность, не превышающая 5% ,возникла в результате округлений.

7 Подбираем сечение балки по условию прочности.

При изгибе условие прочности имеет вид

$$\frac{M_z^{\max}}{W_z} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad W_z \geq \frac{M_z^{\max}}{[\sigma]}$$

По эпюре  $M$  (рис.18, ж) находим максимальный момент  $M_z^{\max} = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , а по условию задачи  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Подставляя эти числа в последнюю формулу, получим величину требуемого момента сопротивления двутавра:

$$W_z \geq \frac{4 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 25 \text{ см}^3$$

По таблицам сортамента прокатной стали подбираем номер двутавра и выписываем его геометрические характеристики: двутавр №10,  $W_x = 39,7 \text{ см}^3$ ,  $J_x = 198 \text{ см}^4$ .

(Момент сопротивления подобранного двутавра больше требуемого расчетного, но меньшего размера в таблице нет, поэтому принимаем двутавр №10).

8 Определяем перемещения.

Определяем угол поворота сечения  $L$ .

Для этого приложим в сечении  $L$  основной системы единичный момент  $\overline{m}_1 = 1$  и построим эпюру моментов  $\overline{M}_m$  (рисунок 18 з). Угол поворота сечения  $L$  вычисляем, перемножая эпюры  $M$  и  $\overline{M}_m$  (рисунок 18 ж, з):

$$\theta_L = M \times \overline{M}_m = \frac{1}{EJ_x} (\omega_1 z_3 + \omega_2 z_4);$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3,6 = 7,2 \quad z_3 = \frac{4 - 2293}{3}$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2} \cdot 2,93 \cdot 3,6 = -5,274 \quad z_4 = \frac{1}{3}$$

$$\theta_L = M \times \overline{M}_m = \frac{1}{EJ_x} \left( 7,2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 2,93 \cdot 3,6 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{3,042}{EJ_x}$$

$$\theta_L = \frac{3,042 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 0,008 \text{ рад.}$$

Определяем прогиб в сечении  $K$ .

Приложим в сечении  $K$  основной системы единичную силу  $P=1$  и построим от нее эпюру моментов  $\overline{M}_p$  (рисунок 18, и). Так как сила  $P=1$  приложена в середине пролета  $AB$ , опорные реакции будут равны:

$$R_A = R_B = 0,5.$$

Определяем моменты в характерных точках участка  $AB$ :

$$M_A = 0; M_K = 0,5 \cdot 1,8 = 0,9 \text{ м}; M_B = 0.$$

Прогиб в сечении  $K$  вычисляется перемножением эпюр  $M$  и  $\overline{M}_p$  (рисунок 18, ж, и). Площадь при этом берем с эпюры  $M$ , а соответствующая ордината на эпюре  $\overline{M}_p$  равна величине средней линии трапеции, то есть алгебраической полусумме ее оснований:

$$\omega_s = \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot 3,6 = 1,62 \quad z_s = \frac{4 - 2,93}{2} = 0,535$$

$$f_K = \frac{\omega_s \cdot z_s}{EJ_x} = \frac{1,62 \cdot 0,535 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = 0,0054 \text{ м} = 0,54 \text{ см}$$

Результат получен со знаком плюс, прогиб направлен в сторону приложенной единичной силы, то есть вниз.

### 4.3 Вопросы для самопроверки

1. Чем принципиально отличаются статически неопределимая балка от статически определимой?
2. Какие методы могут быть использованы для расчета статически неопределимых балок?
3. Как решают простейшие статически неопределимые балки?
4. Как записывается уравнение трех моментов?
5. Какие балки называют статически неопределимыми?
6. Какой порядок расчета используется при решении статически неопреде-

лимых балок?

7. Каким методом ведется проверка балки на жесткость?
8. Запишите условие прочности балки по нормальным напряжениям?
9. Объясните, как, используя условия прочности по нормальным напряжениям, подбираются балки из ГОСТа?
10. Для чего и как проводятся деформационная проверка при решении статически неопределимых балок?



## 5 ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

### 5.1 Теоретическая часть

В начале изучения этого раздела необходимо хорошо усвоить, что понимается под напряженным состоянием в произвольной точке деформированного тела. Следует помнить, что напряжения, действующие в какой-либо площадке, проведенной через рассматриваемую точку, зависят от ориентации этой площадки.

Анализ напряженного состояния в точке деформированного тела осуществляется методом продольного перехода к бесконечно малым объемам. Для этого в окрестности исследуемой точки выделяют элементарный параллелепипед с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Учитывая малость размеров параллелепипеда, можно считать, что все его грани есть площадки, проходящие через данную точку и тогда напряжения на гранях параллелепипеда могут рассматриваться как напряжения, действующие в рассматриваемой точке.

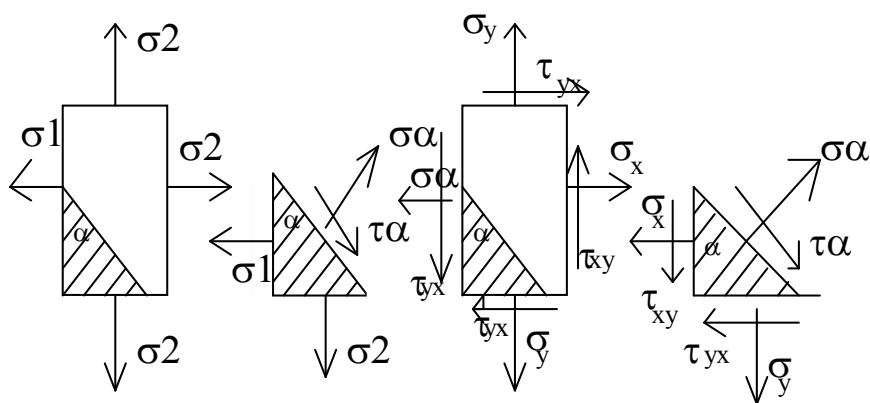


Рисунок 19 - Основные виды напряженного состояния

Необходимо знать определение основных видов напряженного состояния: линейного (одноосного), плоского (двухосного) и объемного (трехосного), а также уметь изображать напряжения, действующие по граням выделяемых

элементарных объемов при различных видах напряженного состояния (Рисунок 19).

Следует ясно представлять, какие площадки среди бесчисленного множества площадок, проходящих через исследуемую точку деформируемого тела, называются главными и какие напряжения действуют по ним. Обратите внимание на более простое изображение сложного напряженного состояния через главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ).

Необходимо усвоить методику определения напряжения по различным площадкам при произвольном напряженном состоянии, в частности, рассмотреть линейное и плоское напряженное состояние.

При исследовании плоского напряженного состояния возникают задачи двух видов:

1 Для напряженного состояния, заданного главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2$ , надо определить нормальное  $\sigma_\alpha$  и касательные  $\tau_\alpha$  напряжения по произвольно ориентированной площадке, заданной углом (Рисунок 19);

2 Для напряженного состояния, заданного в общем виде (Рисунок 19), нужно определить нормальные и касательные напряжения по произвольно ориентированной площадке, а также найти положение главных площадок и величину главных напряжений.

Следует иметь в виду, что указанные задачи решаются как аналитически, так и графически с помощью кругов Мора. Необходимо знать обобщенный закон Гука для различных видов напряженного состояния и потенциальную энергию упругой деформации.

Прежде чем приступить к изучению различных теорий прочности, необходимо хорошо усвоить их значения. Надо ясно представлять, в каких условиях расчета на прочность приходится прибегать к гипотезам прочности. Далее необходимо изучить основные теории прочности и уметь записывать условие прочности по каждой теории для данного напряженного состояния.

## 5.2 Практическая часть

**Задача 1.** Элементарный параллелепипед, находящийся в произвольном месте стальной конструкции подвергается действию системы напряжений, лежащих в одной плоскости (рисунок 20).

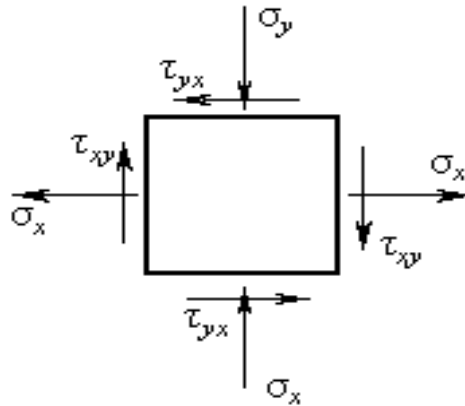


Рисунок 20 - Элементарный параллелепипед

Требуется найти:

- 1) главные напряжения и направление главных площадок;
- 2) максимальные касательные напряжения;
- 3) главные деформации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ;
- 4) эквивалентное напряжение  $\sigma_{ЭКВ}^{IV}$  по четвертой (энергетической) теории прочности;
- 5) относительное изменение объема;
- 6) удельную потенциальную энергию деформации.

Исходные данные:  $\sigma_x = 90$  МПа,  $\sigma_y = 80$  МПа,  $\tau_{xy} = 50$  МПа.

Решение:

При выполнении этой задачи необходимо руководствоваться следующим *правилом знаков* для нормальных и касательных напряжений: нормальное напряжение положительно, если оно направлено по внешней нормали к плоскости сечения, то есть оно является растягивающим, а сжимающее - отрицательно. Касательное напряжение по боковой грани призмы положительно, если

изображающий его вектор до совмещения с внешней нормалью следует повернуть против часовой стрелки.

Расставим знаки напряжений на рисунке 20.

Получим:  $\sigma_x = -90$  МПа,  $\sigma_y = -80$  МПа,  $\tau_{xy} = 50$  МПа,  $\tau_{yx} = -50$  МПа

1 Найдем главные напряжения

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 50^2} = 5 \pm 98,62 \text{ МПа} \quad (8)$$

Главные напряжения обозначают  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  при этом индексы расставляют так, чтобы выполнялось неравенство:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (9)$$

В задаче рассматривается плоское напряженное состояние, т.е. одно из трех главных напряжений равно нулю, поэтому из формулы (8) и правила (9) следует:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 103,62 \text{ МПа} \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = \sigma_{\min} = -93,62 \text{ МПа}$$

Направление главных площадок относительно заданных площадок, определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 50}{90 + 80} = -\frac{100}{170} = -0,588 \quad 2\alpha_0 = -30^{\circ}30' \quad \alpha_0 = 15^{\circ}15'$$

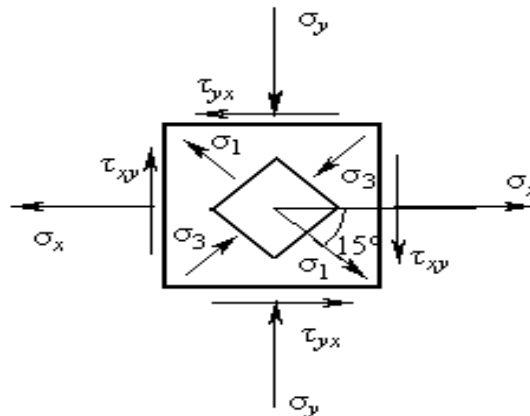


Рисунок 21 – Распределение напряжений

Отрицательный угол  $\alpha_0$  откладывается по часовой стрелке от площадки с большим нормальным напряжением (в данном случае  $\sigma_x$ , на рисунке 21). Можно также пользоваться правилом: для определения положения главной площадки с напряжением  $\sigma_{\max}$  необходимо площадку с большим (в алгебраическом смысле) нормальным напряжением повернуть на угол  $\alpha_0$  в направлении, в котором вектор касательного напряжения, действующего по этой же площадке, стремится вращать элементарный параллелепипед относительно его центра.

2 Найдем максимальные касательные напряжения. Они равны наибольшей полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{103,62 + 93,62}{2} = \pm 98,62 \text{ МПа}$$

3 Найдем главные деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  из обобщенного закона Гука, приняв коэффициент Пуассона равным  $\mu = 0,3$ :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [103,62 - 0,3(0 - 93,62)] = 65,8 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [0 - 0,3(-93,62 + 103,62)] = -1,5 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-93,62 - 0,3(103,62 + 0)] = -62,3 \cdot 10^{-5}$$

4 Найдем эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV}$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} &= \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_3} = \\ &= \sqrt{103,62^2 + 93,62^2 + 103,62 \cdot 93,62} = 99 \text{ МПа} \end{aligned}$$

5 Найдем относительное изменение объема:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 65,8 \cdot 10^{-5} - 1,5 \cdot 10^{-5} - 62,3 \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^{-5}$$

6 Найдем удельную потенциальную энергию деформации:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]$$

В данной задаче  $\sigma_2 = 0$ .

$$u = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2) = \frac{1}{4 \cdot 10^5} (103,62^2 + 93,62^2 + 2 \cdot 0,3 \cdot 103,62 \cdot 93,62) =$$

$$= 6330,6 \cdot 10^{-5} = 0,063 \frac{\text{МДж}}{\text{м}^3}$$

**Задача 2.** Дано:  $a=5$  см;  $b=2$  см;  $[\sigma_c]=100$  МПа;  $[\sigma_p]=27$  МПа.

Определить напряжение, действующее в сечении (рис. 22).

Решение:

Найдем положение главных центральных осей, определив положение центра тяжести фигуры. Разобьем сложную фигуру на составляющие простые.

Площадь фигуры

$$A_1 = 5 \cdot 10 = 50 \text{ см}^2.$$

$$A_2 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ см}^2.$$

$$Z_{\text{ЦТ}} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{c_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{Y_{c_1} A_1 + Y_{c_2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 \cdot 50 + 5 \cdot 25}{50 + 25} = 1,66 \text{ см}.$$

$$Y_{\text{ЦТ}} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{c_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{Z_{c_1} A_1 + Z_{c_2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 \cdot 50 - 2,5 \cdot 25}{50 + 25} = -0,833 \text{ см}.$$

Откладываем эти координаты и проводим через центр тяжести точку  $C$  главные центральные оси  $z$  и  $y$ .

Найдем моменты инерции всей фигуры относительно осей  $y$  и  $z$ :

$$I_{Y_c} = \sum_{i=1}^n [I_{Y_{c_i}} + a_i^2 A_i] = \frac{5^3 \cdot 10}{12} + 1,666^2 \cdot 50 + \frac{5^3 \cdot 5}{12} + 3,334^2 \cdot 25 = 572,916 \text{ см}^4$$

$$I_{Z_c} = \sum_{i=1}^n [I_{Z_{c_i}} + b_i^2 A_i] = \frac{10^3 \cdot 5}{12} + 0,833^2 \cdot 50 + \frac{5^3 \cdot 5}{12} + 1,667^2 \cdot 25 = 572,916 \text{ см}^4$$

Изгибающие моменты входящие в формулу определения напряжения создаются силой  $F$ , которая приложена в точке  $A$  с координатами

$$[-4,166; -4,166]$$

$$M_Y = F \cdot Z_A = -F \cdot 4,166$$

$$M_Z = F \cdot Y_A = -F \cdot 4,166$$

Наибольшее значение напряжений в растянутой и сжатой зонах можно вычислить если известны координаты опасных точек. Эти точки наиболее удалены то нейтральной оси, положение которых определяется отрезками  $Y_0 Z_0$

$$Z_0 = \frac{-i_Y^2}{Z_a} \quad Y_0 = \frac{-i_Z^2}{Y_a}$$

Квадраты радиусов инерции равны

$$i_Y^2 = \frac{I_Y}{A} = \frac{572,916}{75} = 7,638 \text{ см}; \quad i_Z^2 = \frac{I_Z}{A} = \frac{572,916}{75} = 7,638 \text{ см};$$

$$Z_0 = \frac{7,638}{4,166} = 1,833 \text{ см} \quad Y_0 = \frac{7,638}{4,166} = 1,833 \text{ см}$$

Проведя нейтральную ось находим наиболее удаленные от нее точки С[-4.166;5.833]; В[5.833;-4.166]. Определим напряжение в этих точках

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{F}{A} + \frac{M_Z \cdot Y_C}{I_Z} + \frac{M_Y \cdot Z_C}{I_Y} = \frac{F}{75} - \frac{F \cdot 4,166 \cdot 5,833}{572,916} + \frac{F \cdot 4,166 \cdot 4,166}{572,916} = \\ &= 0,0012 F = [\sigma_p] = 27 \text{ МПа} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{F}{A} + \frac{M_Z \cdot Y_B}{I_Z} + \frac{M_Y \cdot Z_B}{I_Y} = \frac{F}{75} - \frac{F \cdot 4,166 \cdot 5,833}{572,916} + \frac{F \cdot 4,166 \cdot 4,166}{572,916} = \text{Откуда} \\ &= -0,0012 F = [\sigma_c] = 100 \text{ МПа} \end{aligned}$$

$$F_C = \frac{\sigma_p}{0.0012 \cdot 10^{-2}} = 2250000 \text{ Н} = 2250 \text{ кН}$$

$$F_B = \frac{\sigma_c}{0.0012 \cdot 10^{-2}} = 8333333 \text{ Н} = 8333 \text{ кН}$$

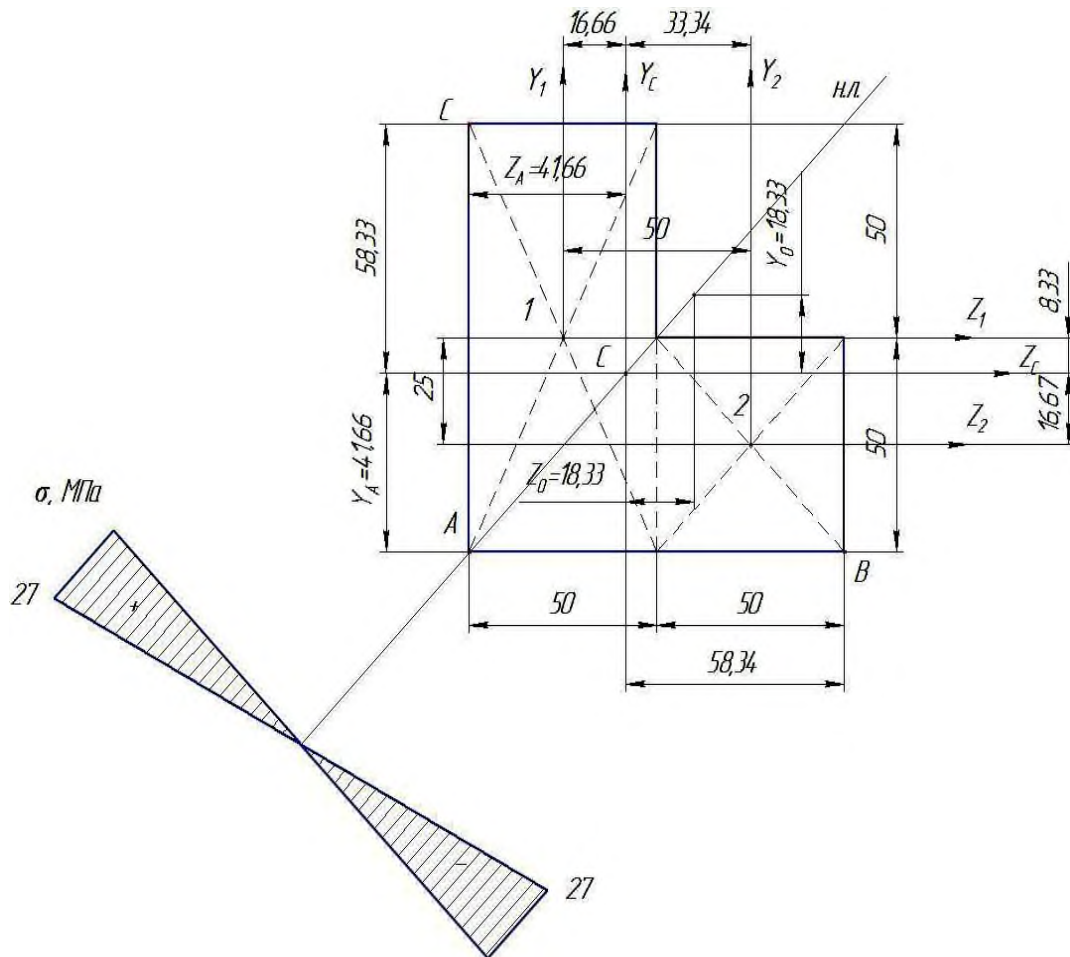


Рисунок 22- Эпюра напряжения, действующее в сечении

В качестве допустимой нагрузки принимаем меньшее значение силы действующее при растяжении стержня  $F = 2250 \text{ кН}$  откуда

$$\sigma_C = 0.0012 \cdot 10^{-2} \cdot 2250 \cdot 10^3 = 27 \text{ МПа}$$

$$\sigma_B = 0.0012 \cdot 10^{-2} \cdot 2250 \cdot 10^3 = -27 \text{ МПа}$$



**Задача 3.** Для составного сечения, состоящего из швеллера №20 и уголка №14(10) (рисунок 23).

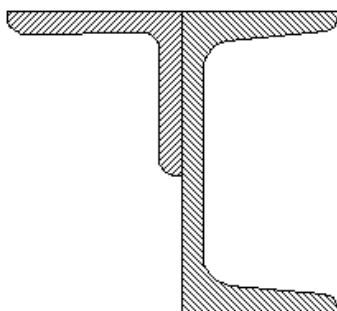


Рисунок 23- Составное сечение

Требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти величины осевых и центробежных моментов инерции относительно центральных осей;
- 3) определить направления главных центральных осей;
- 4) найти величины моментов инерции относительно главных нейтральных осей;
- 5) вычертить сечение в масштабе 1:2 и указать на нем все размеры в числах и все оси.

### 5.3 Вопросы для самопроверки

- 1 Что называется напряженным состоянием в данной точке деформируемого тела?
- 2 Какие имеются виды напряженного состояния материала?
- 3 Как определить напряжение на наклонной площадке растянутого стержня?
- 4 В чем заключается закон парности касательных напряжений?
- 5 Как называются площадки, по которым действуют наибольшие и наи-

меньшие нормальные напряжения?

6 Какие напряжения называются главными?

7 Как производится графическое построение для определения напряжений в наклонных площадках в случае плоского напряженного состояния?

8 Чему равно наибольшее касательное напряжение в случае плоского и объемного напряженного состояния?

9 Напишите формулу обобщенного закона Гука.

10 Чему равно изменение объема при сложном напряженном состоянии?

11 Как определяется потенциальная энергия упругой деформации?

12 Как формируются основные теории прочности?

13 Как записывается условие прочности по этим теориям?

## 6 СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

### 6.1 Теоретическая часть

В теории изгиба и кручения важную роль играют моменты инерции сечения. Необходимо вспомнить и повторить из теоретической механики правила нахождения центра тяжести сечения и статических моментов плоских фигур.

Необходимо уяснить вычисление моментов инерции для простейших плоских фигур (прямоугольника, треугольника, круга).

Рассматривая теорему о моменте инерции сечения относительно оси, параллельной центральной ( $I_{y1}=I_y+a^2A$ ), необходимо понять, что теорема справедлива только в том случае, если ось «у» проходит через центр тяжести фигуры.

Важно уяснить, что сумма моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей.

Приступая к изучению раздела «Кручение», следует отметить, что данную деформацию испытывают такие детали машин, как валы, пружины, иногда болты при затяжке гайки ключом и др. Деформация кручения появляется при нагружении бруса парами сил, плоскости, действия которых перпендикулярны к его оси. Моменты этих пар называют вращающими моментами.

При вычислении вращающих моментов пользуются формулой:

$$M = 1000 \frac{N}{\omega} \text{ нм},$$

где  $N$  – мощность в кВт,

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ рад/сек}$$
 угловая скорость;

$n$  – число оборотов в минуту;

$M$  – вращающий момент в н.м.

Необходимо уяснить те допущения, на которых основана элементарная теория кручения стержней круглого сечения: крайние сечения остаются пло-

скими, расстояния между поперечными сечениями не изменяются, радиусы, проведенные на торцевых сечениях, остаются прямолинейными и поворачиваются вместе с сечениями на некоторый угол.

Следует разобраться в построении эпюры крутящих моментов. Эпюра показывает изменение величины крутящего момента по длине вала. Необходимо уметь самостоятельно выполнять вывод формулы для напряжений при кручении стержня круглого сечения.

При кручении напряжение распределяется по поперечному сечению неравномерно (в линейной зависимости от расстояния точки до полюса сечения)

$$\tau = \frac{M_{кр} \rho}{I_p}, \quad (10)$$

где  $\rho$  – расстояние до точки сечения;

$I_p$  – полярный момент инерции площади сечения;

$M_{кр}$  – крутящий момент в поперечном сечении;

$\tau$  – касательное напряжение в точке, находящейся на расстоянии  $\rho$  от оси бруса.

Опасными считаются все точки контура сечения, геометрическими характеристиками прочности и жесткости сечения являются соответственно полярный момент сопротивления и полярный момент инерции, значения которых зависят не только от площади, но и от формы сечения. Рациональным (т.е. дающим экономию материала) является кольцевое сечение, имеющее по сравнению с круглым сплошным, меньшую площадь при равном моменте сопротивления (моменте инерции).

Необходимо уметь рассчитывать диаметр вала из условия прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр \max}}{W_p} \leq [\tau] \text{ и условия жесткости:}$$

$$\varphi^0 = \frac{180}{\pi} \frac{M_{кр} \ell}{G I_p} \leq [\varphi^0], \text{ где}$$

где  $W_p$  – полярный момент сопротивления площади сечения,

$\ell$  - длина вала,

$G$  – модуль упругости при сдвиге,

$I_p$  – полярный момент инерции площади сечения.

Для бруса из пластичного материала принимают  $[\tau] = (0,55-0,6) [\sigma_p]$ , для валов из конструкционных сталей обычно принимают  $[\tau] = 20 \dots 50$  МПа.

Допускаемый угол закручивания в машиностроении принимают:

$[\varphi^0] = 0,25 \dots 1,00$  град/м.

## 6.2 Практическая часть

**Задача 1.** К стальному валу приложены скручивающие моменты:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  (рисунок 24).

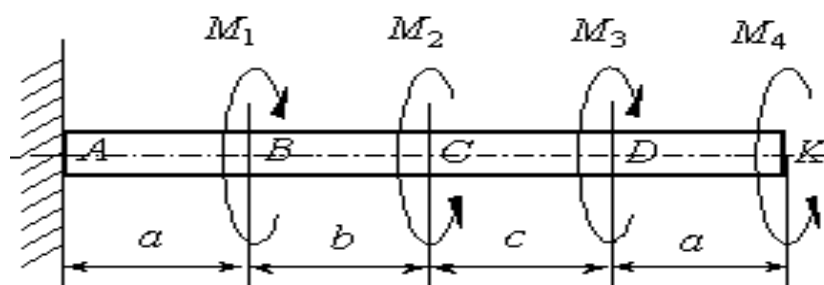


Рисунок 24- Стальной вал

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) при заданном значении  $[\tau]$  определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его величину до ближайшего большего значения из данного ряда диаметров 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 3) построить эпюру углов закручивания;
- 4) найти наибольший относительный угол закручивания.

Исходные данные:  $M_1 = M_3 = 2$  кНм,  $M_2 = M_4 = 1,6$  кНм,  $a = b = c = 1,2$  м,  $[\tau] = 80$  МПа,  $[\mu] = 0,3$ .

Решение.

- 1 Построить эпюру крутящих моментов.

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях брусьев, определяются с помощью метода сечений. Крутящие моменты в произвольных поперечных сечениях бруса численно равны алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Рассекая последовательно участки вала, получим:

$$\text{I участок ( KD ) : } M_{z1} = -M_4 = -1,6 \text{ кНм}$$

$$\text{II участок ( DC ) : } M_{z2} = -M_4 + M_3 = -1,6 + 2 = 0,4 \text{ кНм}$$

$$\text{III участок ( CB ) : } M_{z3} = -M_4 + M_3 - M_2 = -1,6 + 2 - 1,6 = -1,2 \text{ кНм}$$

$$\text{IV участок ( BA ) : } M_{z4} = -M_4 + M_3 - M_2 + M_1 = -1,6 + 2 - 1,6 + 2 = 0,8 \text{ кНм}$$

По значениям этих моментов строим эпюру  $M_k$  в выбранном масштабе. Положительные значения  $M_k$  откладываем вверх, отрицательные - вниз от нулевой линии эпюры (рисунок 25).

2 При заданном значении  $[\tau]$  определим диаметр вала из расчета на прочность. Условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp \max}}{W_p} \leq [\tau]$$

где  $|M_K|_{\max}$  - абсолютная величина максимального крутящего момента на эпюре  $M_k$  (рисунок 25).

$$|M_K|_{\max} = 1,6 \text{ кНм};$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \text{ - полярный момент сопротивления для сплошного круглого}$$

вала. Диаметр вала определяется по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi} \cdot \frac{|M_x|_{\max}}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1,6 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0467 \text{ м}$$

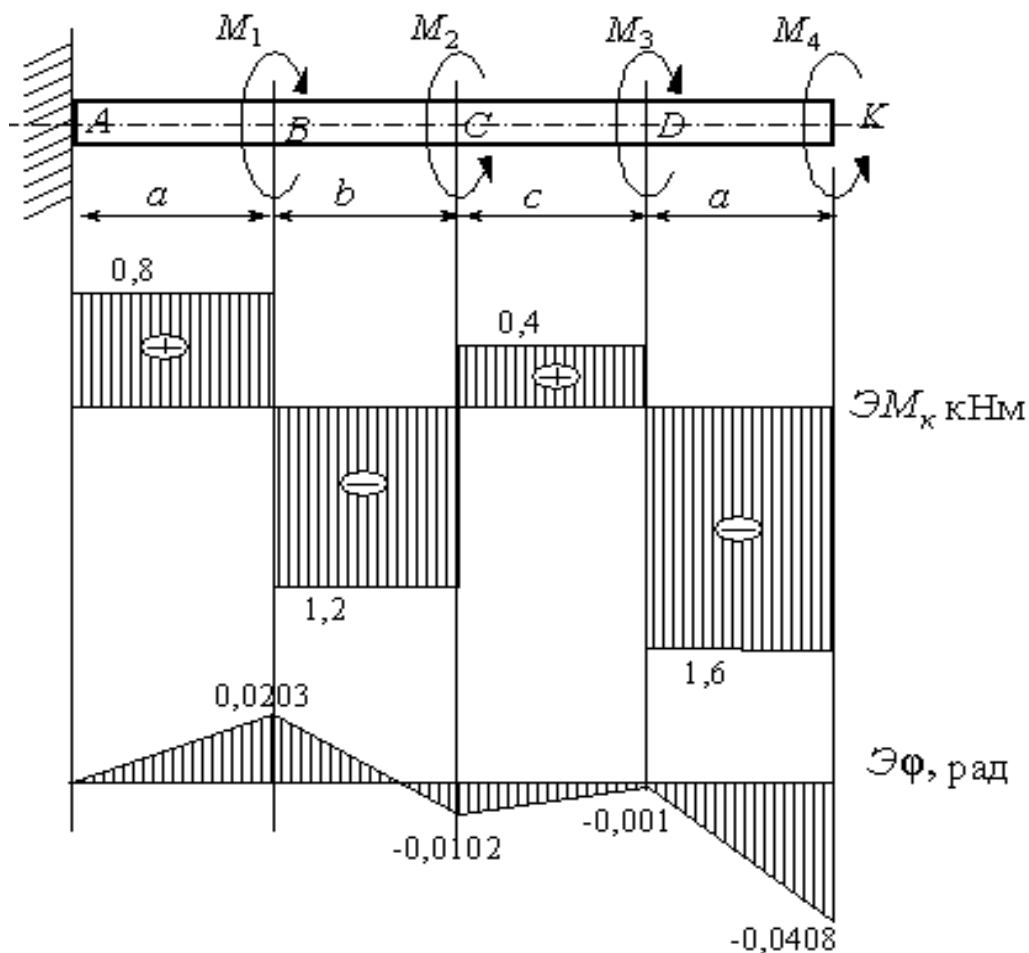


Рисунок 25- Эпюры внутренних силовых факторов при кручении

Принимаем  $d = 50 \text{ мм} = 0,05 \text{ м}$ .

3 Построим эпюру углов закручивания вала.

Угол закручивания участка вала длиной  $l$  постоянного поперечного сечения определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_{кр} \ell}{G \cdot J_p}$$

где  $G \cdot J_p$  - жесткость сечения вала при кручении.

$J_p$  - полярный момент инерции круглого вала.

Модуль сдвига для стали

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{2 \cdot 10^{11}}{2(1 + 0,3)} = 0,77 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2,$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4 \cdot 10^{-8}}{32} = 61,33 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Вычислим углы закручивания сечений В, С, D и К относительно закрепленного конца вала (сечения А)

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B = \frac{M_{K4} \cdot a}{G \cdot J_p} = \frac{0,8 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{0,77 \cdot 10^{11} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0203 \text{ рад}$$

$$\varphi_C = \varphi_B + \frac{M_{K3} \cdot b}{G \cdot J_p} = 0,0203 + \frac{1,2 \cdot 10^3}{0,77 \cdot 10^{11} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = -0,0102 \text{ рад}$$

$$\varphi_K = \varphi_D + \frac{M_{K1} \cdot a}{G \cdot J_p} = -0,0001 - \frac{1,6 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{0,77 \cdot 10^{11} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = -0,0406$$

Строим эпюру углов закручивания (рисунок 23).

4 Найдем наибольший относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{\varphi_D - \varphi_K}{a} = \frac{|M_{K1}|}{G \cdot J_p} = \frac{1,6 \cdot 10^3}{0,77 \cdot 10^{11} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0339 \text{ рад/м.}$$

**Задача 2.** Дано:  $L=0,86\text{м}$ ;  $C_1=0,22\text{м}$ ;  $C_2=0,48\text{м}$ ;  $C_3=0,62\text{м}$ ;  $d_1/d=4$ ;  $d_2/d=2$ ;  $M_1=2\text{кНм}$ ;  $M_2=-4\text{кНм}$ ;  $M_3=-6\text{кНм}$ ;  $G=8 \cdot 10^4 \text{МПа}$ ;  $[\theta]=1,8^\circ/\text{м}$ ;  $M=2\text{кНм}$ .

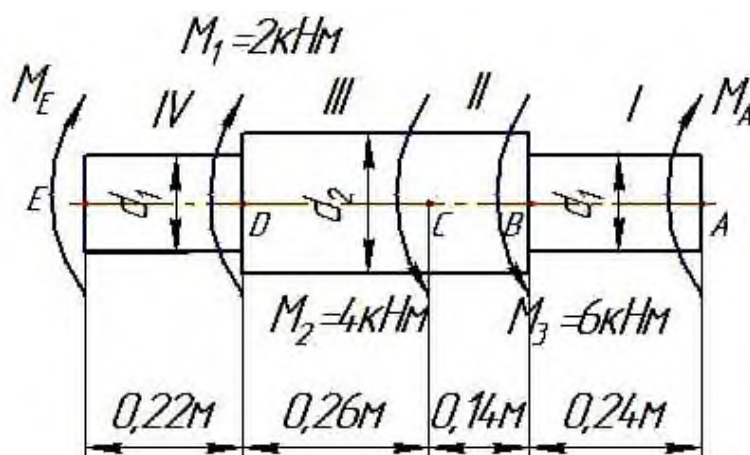


Рисунок 26- Схема нагружения стержня



### 6.3 Вопросы для самопроверки

- 1 Дайте определение понятия "крутящий момент в поперечном сечении бруса".
- 2 Что такое эпюра крутящих моментов? Как производить ее построение?
- 3 Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого стержня при кручении? Как находится их величина в произвольной точке поперечного сечения?
- 4 Как нужно нагрузить брус, чтобы он работал только на кручение?
- 5 Каким образом определить в любом поперечном сечении бруса величину крутящего момента?
- 6 Сформулируйте правило знаков при определении величины крутящего момента.
- 7 На каких гипотезах и допущениях основаны выводы расчетных зависимостей при кручении?
- 8 По какому закону распределяются напряжения в поперечном сечении круглого бруса при кручении?
- 9 Какой величиной характеризуется величина деформации при кручении?
- 10 По каким формулам определяются величины деформации кручения (относительный угол закручивания) в радианах на метр и в градусах на метр?
- 11 Что такое полярный момент инерции поперечного сечения бруса?
- 12 По каким формулам определяется полярный момент инерции круга и кругового кольца?
- 13 Что такое жесткость сечения бруса?
- 14 Как определяется при кручении напряжение в любой точке круглого поперечного сечения бруса и как определяется наибольшее напряжение?

## 7 МЕТОД СИЛ

### 7.1 Теоретическая часть

Наиболее широко применяемым в машиностроении общим методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является *метод сил*. Он заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами. Величина их в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения в системе соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями. Таким образом, при указанном способе решения неизвестными оказываются силы. Отсюда и название «метод сил».

Алгоритм расчета методом сил. Независимо от особенностей рассматриваемой конструкции, можно выделить следующую последовательность расчета статически неопределимых систем методом сил:

1. Определить степень статической неопределимости;
2. Выбрать основную систему;
3. Сформировать эквивалентную систему;
4. Записать систему канонических уравнений;
5. Построить единичные и грузовые эпюры внутренних силовых факторов, возникающих в элементах рассматриваемой конструкции;
6. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений;
7. Построить суммарную единичную эпюру;
8. Выполнить универсальную проверку коэффициентов при неизвестных и свободных членов;
9. Решить систему канонических уравнений, т.е. определить реакции лишних связей;
10. Построить эпюры возникающих внутренних силовых факторов для

заданной системы (иначе говоря, окончательные эпюры);

11. Выполнить статическую и кинематическую проверки.

Отметим, что пункты 7, 8, 11 приведенного алгоритма не являются безусловно необходимыми, хотя и позволяют контролировать правильность выполнения расчета. А для систем с одной лишней связью пункты 7 и 8 просто лишены смысла, так как в этом случае суммарная единичная эпюра совпадает с единичной.

## 7.2 Практическая часть

**Задача 1.** Для статически неопределимой E-образной рамы с одной скользящей и двумя неподвижными опорами используя метод сил, формулу Мора и правило Верещагина необходимо определить реакции опор и построить эпюры моментов, поперечных и продольных сил. Построить эпюры M, Q и N.

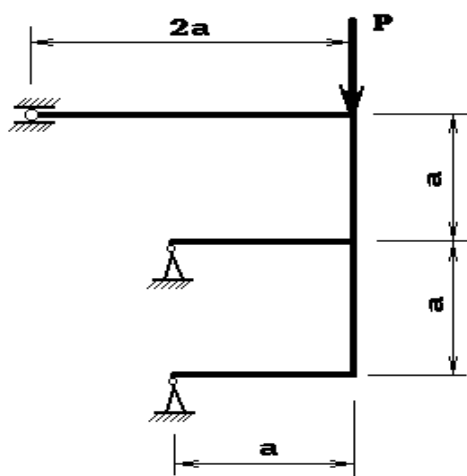


Рисунок 27- Статически неопределимая E-образная рама

Решение:

Данная система дважды статически неопределима, так как рама прикреплена пятью связями, а уравнений статики для их определения – три. Выбираем основную систему путем отбрасывания лишних связей и заменой их неизвестными усилиями  $X_1$  и  $X_2$ . Фактически  $X_1$  будет являться реакцией опоры C, а  $X_2$

– вертикальной составляющей реакции опоры В.

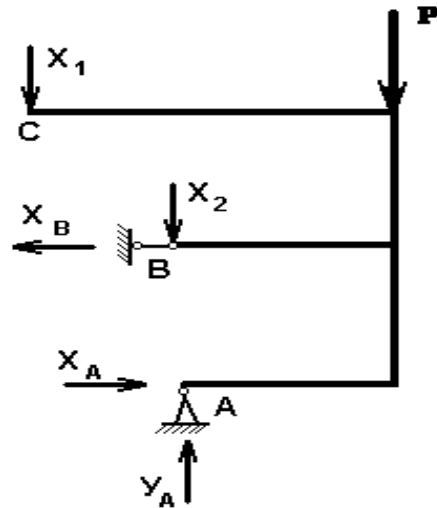


Рисунок 28 – Основная система

Составляем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов при неизвестных и свободных членах необходимо построить эпюры изгибающих моментов поочередно для каждой силы.

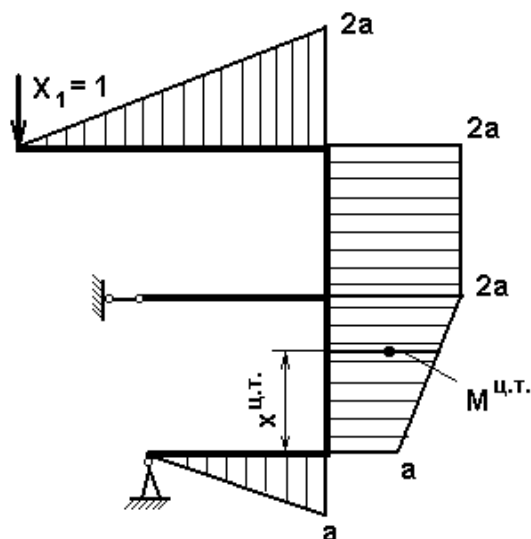


Рисунок 29- Эпюра изгибающих моментов

Эпюра единичных изгибающих моментов от единичной силы  $X_1$

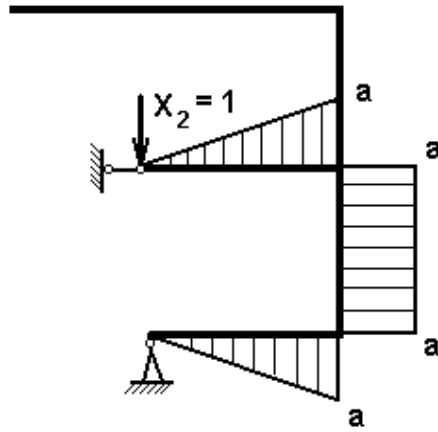


Рисунок 30 - Эпюры единичных изгибающих моментов

Эпюры единичных изгибающих моментов от единичной силы  $X_2$

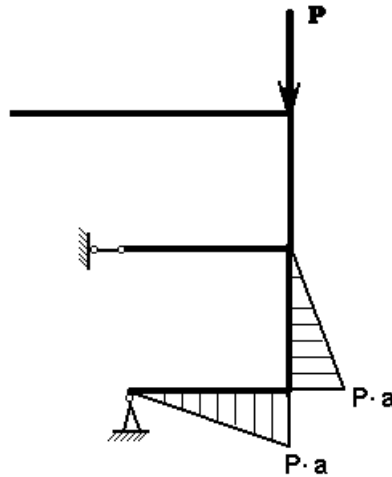


Рисунок 31 - Эпюры единичных изгибающих моментов

Подсчитываем коэффициенты, по формуле Мора используя правило Верещагина:

$$\delta_{ij} = \Sigma \frac{1}{EJ} \cdot M_i^{u.m.} \cdot \omega_j$$

где  $M_i^{u.m.}$  – величина изгибающего момента единичной эпюры  $X_j$  в точке, где расположен центр тяжести фигуры, образованной единичной эпюрой  $X_i$ ;

$\omega_j$  – площадь фигуры, образованной единичной эпюрой  $X_i$ .

Например, для трапециевидного участка длиной  $L$  и размерами сторон  $m$

и  $M$  единичной эпюры  $X_1$  находим координату центра тяжести для трапеции:

$$X^{y.m.} = \frac{L}{3} \cdot \left( 1 + \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \right) = \frac{a}{3} \cdot \left( 1 + \frac{1}{1 + \frac{a}{2a}} \right) = \frac{5}{9}a;$$

Далее находим значение  $M^{н.т.}$  в этой точке для всех эпюр.

– для эпюры  $X_1$  это будет:

$$M_1^{y.m.} = m + \frac{M - m}{L} \cdot X^{y.m.} = a + \frac{2a - a}{a} \cdot \frac{5}{9}a = \frac{14}{9}a,$$

для эпюры  $X_2$  в любой точке данного участка  $M$  равно  $a$ , следовательно:

$$M_2^{y.m.} = a$$

для эпюры  $P$  это будет:

$$M_P^{y.m.} = \frac{M}{L} \cdot (L - X^{y.m.}) = \frac{Pa}{a} \cdot \left( a - \frac{5}{9}a \right) = \frac{4}{9}Pa.$$

Соответственно площади эпюр на данном участке будут равны:

$$\omega_1 = \frac{M + m}{2} \cdot L = \frac{2a + a}{2} \cdot a = \frac{3}{2}a^2,$$

$$\omega_2 = M \cdot L = a \cdot a = a^2,$$

$$\omega_P = \frac{1}{2} \cdot M \cdot L = \frac{1}{2} \cdot Pa \cdot a = \frac{1}{2} \cdot Pa^2.$$

Аналогичным образом находим составляющие уравнения Мора для других, более простых участков и вычисляем требуемые коэффициенты:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{2}{3}2a \cdot \frac{1}{2}2a \cdot 2a + 2a \cdot 2a \cdot a + \frac{14}{9}a \cdot \frac{3}{2}a^2 + \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot a \right) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{28}{3}a^3,$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( a \cdot \frac{3}{2}a^2 + \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot a \right) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{11}{6}a^3,$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot a + a \cdot a \cdot a + \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot a \right) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{5}{3}a^3,$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{Pa}{a} \cdot \left( a - \frac{5}{9}a \right) \cdot \frac{3}{2}a^2 + \frac{2}{3}Pa \cdot \frac{1}{2}a \cdot a \right) = \frac{1}{EJ} \cdot Pa^3,$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{2}{3}Pa \cdot \frac{1}{2}a \cdot a + \frac{1}{2}Pa \cdot a^2 \right) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{7}{6}Pa^3.$$

Подставив найденные коэффициенты в систему канонических уравнений и сократив на  $\frac{1}{EJ}$  и  $a^3$  получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{28}{3} \cdot X_1 + \frac{11}{6} \cdot X_2 + P = 0; \\ \frac{11}{6} \cdot X_1 + \frac{5}{3} \cdot X_2 + \frac{7}{6} \cdot P = 0. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 56 \cdot X_1 + 11 \cdot X_2 + 6P = 0; \\ 11 \cdot X_1 + 10 \cdot X_2 + 7P = 0; \end{array} \right.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим более простое выражение, из которого выразим  $X_2$  и подставим затем во второе уравнение;

$$45X_1 + X_2 - P = 0; \rightarrow X_2 = P - 45X_1;$$

$$11 X_1 + 10P - 450 X_1 + 5P = 0;$$

$$X_1 = \frac{15}{439} P = 0,034P;$$

$$X_2 = P - \frac{45 \cdot 15}{439} P = -\frac{236}{439} P = -0,538P;$$

Найдя значения неизвестных усилий  $X_1$  и  $X_2$ , обратимся к основной системе и найдем  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $X_B$ .

$$\underline{\Sigma Y = 0};$$

$$Y_A - X_1 - X_2 - P = 0;$$

$$Y_A = X_1 + X_2 + P = 0,034P - 0,538P + P = 0,496P;$$

$$\underline{\Sigma M_A = 0};$$

$$X_1 \cdot a + X_B \cdot a - P \cdot a = 0;$$

$$X_B = P - X_1 = 0,966P;$$

$$\underline{\Sigma X = 0};$$

$$X_A - X_B = 0;$$

$$X_A = X_B = 0,966P;$$

Зная значения всех усилий, действующих на раму, строим эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$ :

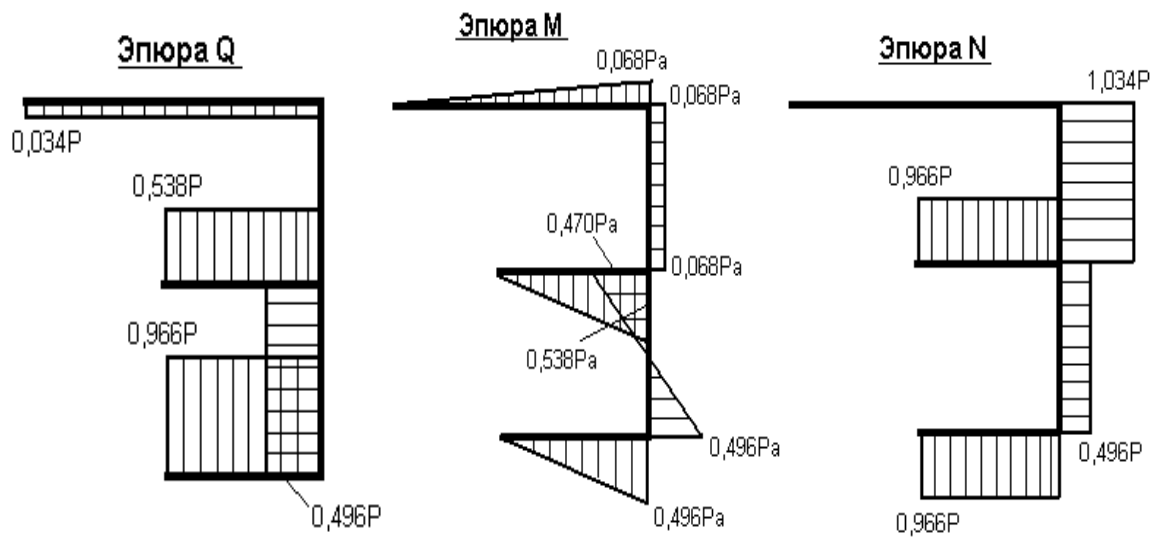


Рисунок 32 - эпюры M, Q и N

### Задача 2

Для изображенной на рисунок 33 нагруженной в своей плоскости рамы, вертикальные элементы которой имеют моменты инерции  $J$ , а горизонтальные элементы  $- kJ$ ;

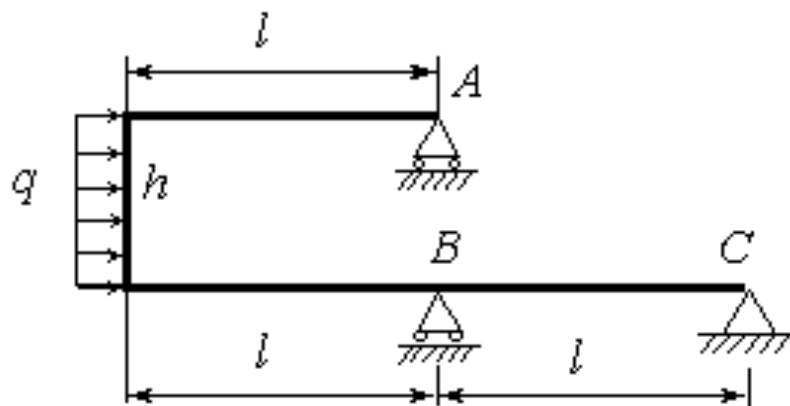


Рисунок 33 – Статически неопределимая плоская рама

Исходные данные:

$$k = 1,5; l = 6 \text{ м}, h = 3 \text{ м}, q = 10 \text{ кН/м.}$$

Требуется:

- 1) установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему;
- 2) написать канонические уравнения;



- 3) построить эпюры изгибающего момента от единичных сил и от заданной нагрузки;
- 4) найти коэффициенты канонических уравнений;
- 5) найти величины «лишних» неизвестных  $X$  ;
- 6) выполнить деформационную проверку правильности определения неизвестных;
- 7) построить эпюры внутренних силовых факторов  $N$  ,  $Q$  ,  $M$  .

### 7.3 Вопросы для самопроверки

1. Как составляют канонические уравнения метода сил?
2. В какой последовательности выполняют расчет статически неопределимой балки?
3. Какие плоские рамы считаются статически неопределимыми?
4. Какой метод расчета наиболее предпочтителен для расчета рам?
5. Что понимается под выражением «каноническое уравнение» метода сил?
6. Как определяется степень статической неопределимости рамы?
7. Объясните смысловую сторону метода сил?
8. Какой порядок расчета принят при решении статически неопределимых рам?
9. Можно ли использовать метод сил при решении пространственных статически неопределимых рам?

## 8 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 8.1 Теоретическая часть

На практике часто встречаются случаи, когда в результате действия нагрузки в поперечных сечениях бруса одновременно появляется несколько компонентов внутренних сил. Тогда говорят, что брус находится в условиях сложного сопротивления (рисунок 34).

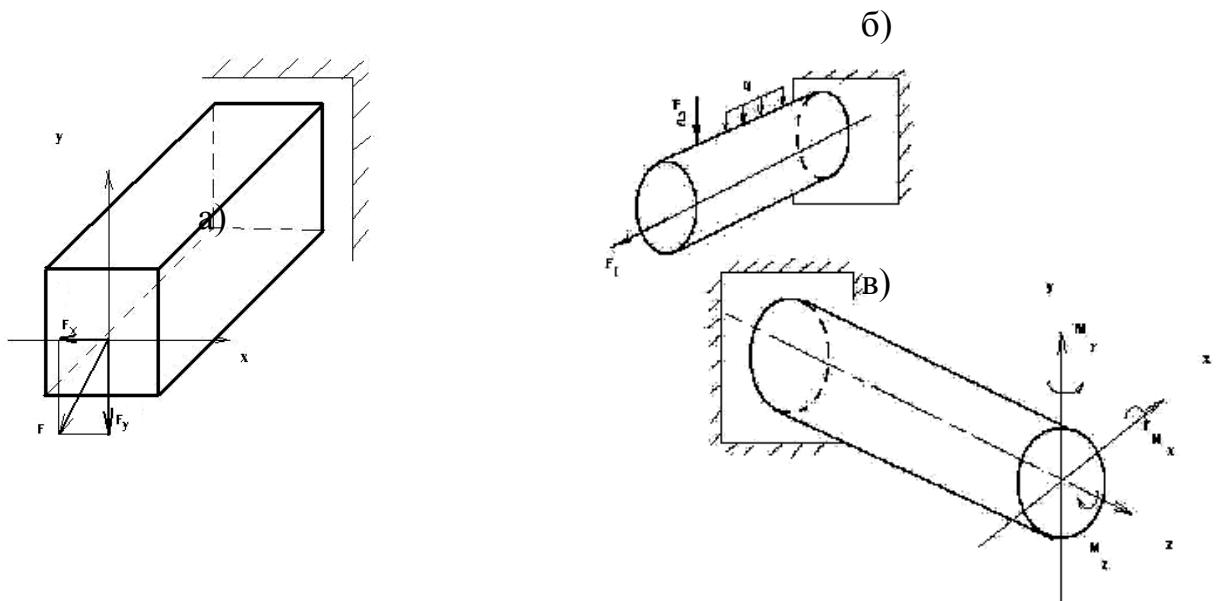


Рисунок 34- Сложное сопротивление:

- а) косо́й изгиб; б) одновременного растяжения или сжатия с изгибом;
- в) внецентренного растяжения (сжатия) одновременного кручения и изгиба

Задачи на сложное сопротивление решаются исходя из принципа независимости действия сил. Это принцип позволяет получить окончательный результат решения задачи при совместном действии различных силовых факторов путем наложения (суммирования) результатов, вызванных каждым внешним силовым фактором в отдельности.

Наиболее часто на практике в поперечных сечениях бруса возникают следующие комбинации внутренних силовых факторов: два изгибающих момента, действующие во взаимно перпендикулярных плоскостях; продольная сила и из-

гибающие моменты; изгибающие и крутящий моменты; продольная сила и крутящий момент. Следует иметь в виду, что напряжение  $\sigma$  надо рассматривать как алгебраическую сумму нормальных напряжений, вызванных растягивающими и изгибающими внешними силовыми воздействиями, а касательное напряжение  $\tau$  – как алгебраическую сумму касательных напряжений в данной точке, вызванных кручением и изгибом.

Необходимо более детально рассмотреть задачу об определении напряжений и деформаций для трех случаев сложного сопротивления: косоугольного изгиба, внецентренного растяжения (сжатия), совместного действия изгиба и кручения.

## 8.2 Практическая часть

**Задача 1.** Дано:  $N=26$  л.с.;  $n=360$  об/мин;  $a=1,2$  м;  $b=0,6$  м;  $c=1,1$  м;  $D_1=450$  см;  $D_2=400$  см;  $\lambda_1 / \lambda_2 = 45 / 25$ .

Определить:

Определить моменты, приложенные к шкивам;

Определить окружные усилия;

3) Определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях, и строить эпюры изгибающих моментов;

4) Построить эпюру суммарных изгибающих моментов;

5) Определить опасные сечения и величины максимального расчетного момента по третьей теории прочности.

Решение:

1) Определение моментов, приложенных к шкивам. Момент на шкивах по передаваемой мощности и скорости вращения вала определяется по формуле

$$M = \frac{N}{\omega},$$

где  $N$  - передаваемая валом мощность, Вт,

$$N = 19,11 \text{ кВт} = 19,11 \cdot 10^3 \text{ Вт}$$

$\omega$  – угловая скорость вращения вала, рад/с.

Угловую скорость можно вычислить по формуле

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 360}{30} = 37,7 c^{-1}$$

Вычисляем момент на первом шкиве:

$$M_1 = \frac{N}{\omega} = \frac{19,11 \cdot 10^3}{37,7} = 506,89 \text{ Нм}$$

Моменты на втором и третьем шкивах будут одинаковыми и равны половине момента первого шкива

$$M_2 = M_3 = \frac{M_1}{2} = 253,44 \text{ Нм}$$

Построим эпюры крутящих моментов.

2) Определение окружных усилий (рисунок 35).

$$M_{кp1} = P_1 \frac{D_1}{2} \quad M_{кp2} = P_2 \frac{D_2}{2}$$

$$P_1 = \frac{2M_{кp1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 506,89}{4,5} = 225,28 \text{ Н}$$

$$P_2 = \frac{2M_{кp2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 253,44}{4} = 126,72 \text{ Н}$$

Спроектируем усилия  $P_1$  и  $P_2$  на координатные оси  $x$  и  $y$ :

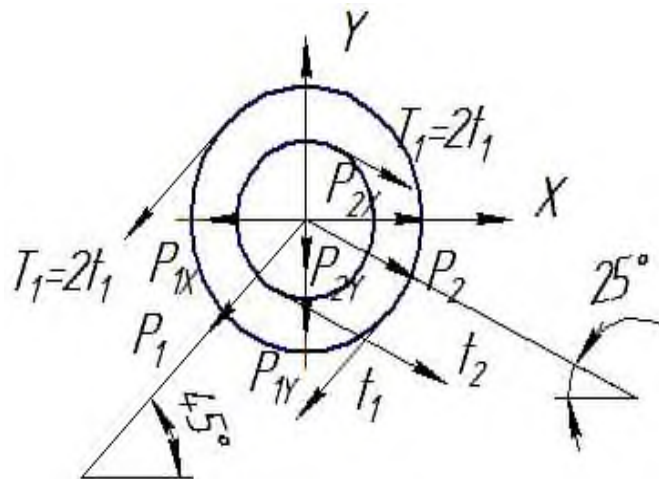


Рисунок 35 – Окружные усилия

$$P_{1x} = P_1 \cdot \cos \alpha_1 = 225,28 \cdot \cos 45^\circ = 159,3 \text{ Н}$$

$$P_{1y} = P_1 \cdot \sin \alpha_1 = 225,28 \cdot \sin 45^\circ = 159,3 \text{ Н}$$

$$P_{2x} = P_2 \cdot \cos \alpha_2 = 126,72 \cdot \cos 25^\circ = 114,84 \text{ Н}$$

$$P_{2Y} = P_2 \cdot \sin \alpha_2 = 126,72 \cdot \sin 25^\circ = 53,55H$$

3) Определяем силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях, и строим эпюры изгибающих моментов.

Рассматриваем изгиб вала в плоскости ZOX.

$$\sum M_A = 0 \quad P_{2X} \cdot 1,2 + P_{1X} \cdot 0,6 - P_{2X} \cdot 1,7 - R_{BX} \cdot 2,3 = 0$$

$$R_{BX} = \frac{P_{2X} \cdot 1,2 + P_{1X} \cdot 0,6 - P_{2X} \cdot 1,7}{2,3} = 16,59H$$

$$\sum M_B = 0 \quad P_{2X} \cdot 0,6 - P_{1X} \cdot 1,7 + P_{2X} \cdot 3,5 - R_{AX} \cdot 2,3 = 0$$

$$R_{AX} = \frac{P_{2X} \cdot 0,6 - P_{1X} \cdot 1,7 + P_{2X} \cdot 3,5}{2,3} = 86,97H$$

$$\text{Проверка: } \sum P_x = 0 \quad P_{1X} - 2P_{2X} - R_{BX} + R_{AX} = 0$$

Рассматриваем изгиб вала в плоскости YOZ.

$$\sum M_A = 0 \quad P_{1Y} \cdot 0,6 + P_{2Y} \cdot 1,7 - P_{2Y} \cdot 1,2 - R_{BY} \cdot 2,3 = 0$$

$$R_{BY} = \frac{P_{1Y} \cdot 0,6 + P_{2Y} \cdot 1,7 - P_{2Y} \cdot 1,2}{2,3} = 53,2H$$

$$\sum M_B = 0 \quad P_{1Y} \cdot 1,7 + P_{2Y} \cdot 0,6 + P_{2Y} \cdot 3,5 - R_{AY} \cdot 2,3 = 0$$

$$R_{AY} = \frac{P_{1Y} \cdot 1,7 + P_{2Y} \cdot 0,6 + P_{2Y} \cdot 3,5}{2,3} = 213,2H$$

$$\text{Проверка: } \sum P_y = 0 \quad P_{1Y} + 2P_{2Y} - R_{BY} - R_{AY} = 0$$

4) Построим эпюру суммарных изгибающих моментов

Находим суммарный момент по формуле:

$$M_u = \sqrt{M_{\text{гор}}^2 + M_{\text{верт}}^2}$$

5) Определение опасного сечения и величины максимального расчетного момента по третьей теории прочности.

Из эпюр  $M_K$  и  $M_u$  видно, что опасное сечение будет в точке С, где  $M_K = 253,44Hm$ ;  $M_u = 157,7Hm$

$$M_p^{\text{III}} = \sqrt{M_u^2 + M_K^2} = \sqrt{157,7^2 + 253,44^2} = 298,5Hm$$

5) Условие прочности вала по третьей теории прочности определяется по формуле

$$\sigma_p^{III} = \frac{M_p^{III}}{W_x} \leq [\sigma]$$

где  $W_x$  - осевой момент сопротивления сечения. Для круга:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1d^3 \quad d = \sqrt[3]{\frac{M_p^{III}}{0.1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{298,5 \cdot 10^3}{0.1 \cdot 50}} = 39,08 \text{ мм}$$

Принимаем диаметр вала:  $D=40$  мм

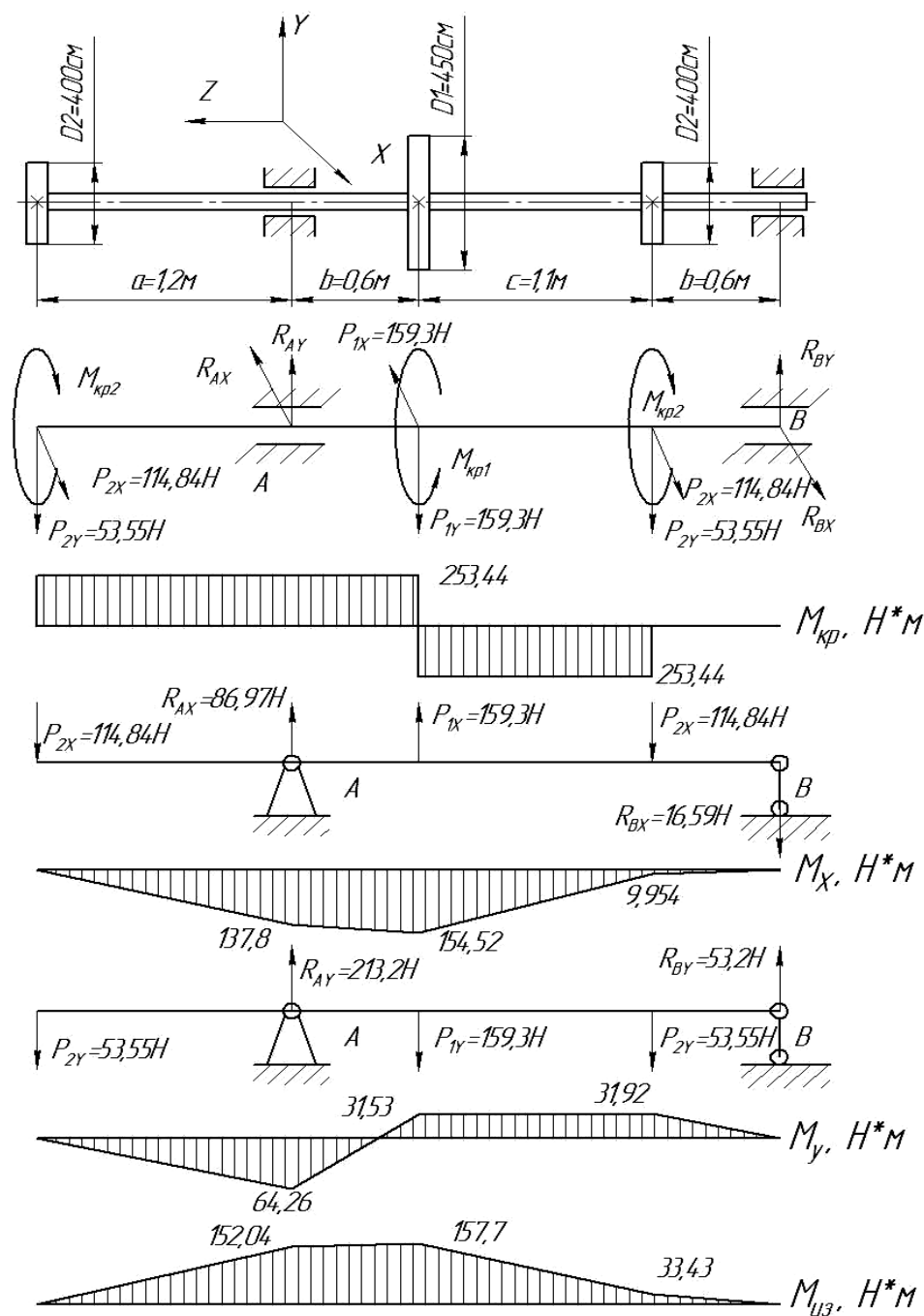


Рисунок 36-Эпюры внутренних силовых факторов при сложном сопротивлении

**Задача 2.** Дано:  $P_1=3$  кН,  $P_2=4$  кН,  $P_3=2$  кН,  $q_1=3$  кН/м,  $q_2=4$  кН/м,  $M_1=3$  кН/м,  $M_2=4$  кН/м. Допускаемое напряжение на растяжении – сжатии  $[\sigma] = 160$  МПа. Первый стержень длиной  $\ell_1=4$  м имеет прямоугольное сечение с отношением сторон  $\frac{h}{b} = 1,5$ , второй ( $\ell_2=3$  м) и третий ( $\ell_3=2$  м) – круглое сечение.

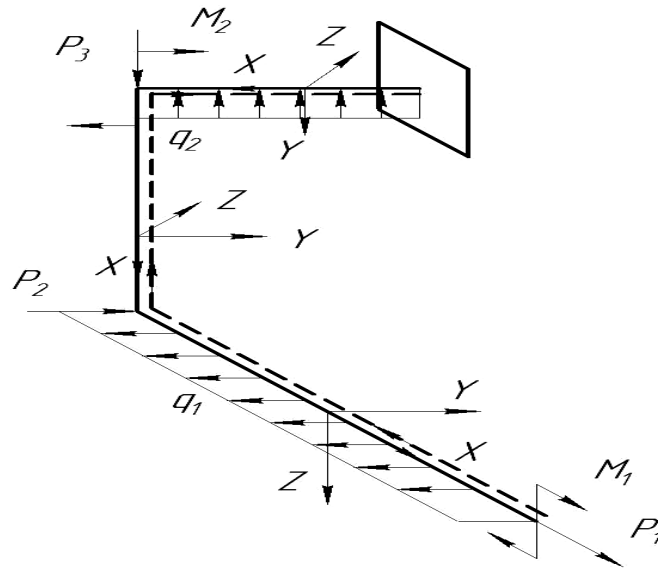


Рисунок 37 – Ломанный стержень

- 1) построить эпюры  $N_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$
- 2) Расчет напряжений и определение размеров поперечных сечений стержней

### 8.3 Вопросы для самопроверки

- 1 Какой случай изгиба называется косым изгибом?
- 2 Возможен ли косой изгиб при чистом изгибе?
- 3 В каких точках поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при косом изгибе?
- 4 Как определяются деформации при косом изгибе?
- 5 Может ли балка круглого поперечного сечения испытывать косой изгиб?
- 6 Как находят напряжения в произвольной точке поперечного сечения

при внецентренном растяжении или сжатии?

7. Чему равно напряжение в центре тяжести поперечного сечения при внецентренном растяжении или сжатии?

8 Какие напряжения возникают в поперечном сечении стержня при изгибе с кручением?

9 Как находятся опасные сечения стержня при изгибе с кручением?

10 В каких точках круглого поперечного сечения возникают наибольшие напряжения при изгибе с кручением?

11 Как пишутся условия прочности стержня по всем четырем теориям, если известны  $\sigma_{И}$  и  $\tau_{К}$ ?

12 Как находится величина расчетного момента при изгибе с кручением стержня круглого поперечного сечения?

13 По какой теории прочности (3 или 4) получится большая величина расчетного момента при заданных величинах  $M_{И}$  и  $M_{К}$ ?



## 9 УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

### 9.1 Теоретическая часть

При изучении явления продольного изгиба необходимо обратить внимание на то, что при сжатии длинных стержней бывают случаи, когда при постепенном увеличении нагрузки резко меняется форма равновесия и напряженное состояние, в результате чего может быть внезапное разрушение.

Если сжимающие силы будут больше предельной величины, то ось стержня изогнется, и стержень будет подвергаться, кроме сжимающей силы, изгибающему моменту (рисунок 38 а, б).

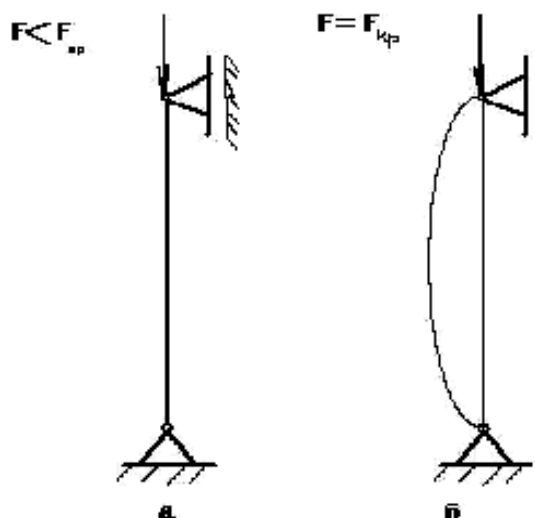


Рисунок 38- Продольный изгиб

где  $F$  – действующая на стержень сжимающая сила,

$F_{кр}$  – критическая сила, т.е. сжимающая центрально приложенная сила, при которой стержень еще устойчиво сохраняет прямолинейную форму равновесия.

Величина критической силы определяется по формуле Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu \ell)^2}, \quad (11)$$

где  $E$  – модуль упругости 1 рода материала стержня,  
 $\mu$  – коэффициент приведения длины стержня,  
 $I_{\min}$  – наименьший осевой момент инерции сечения,  
 $\ell$  – длина стержня,  
 $F_{кр}$  – величина критической силы.

Зная величину критической силы  $F_{кр}$  и площадь сечения стержня  $A$ , можно определить величину критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A_{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu\ell)^2 A}, \quad (12)$$

так как  $\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = i_{\min}$  представляет собой радиус инерции сечения и  $\frac{\ell_{np}}{i_{\min}} = \lambda$  – есть гибкость стержня, то величина критического напряжения выражается формулой:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (13)$$

Нужно обратить особое внимание на предел применимости формулы Эйлера  $\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma}}$ . При гибкости, меньше предельной формула Эйлера неприменима, расчет стержня на устойчивость выполняют по эмпирической формуле Ясинского

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda \quad (14)$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, зависящие от материала.

Следует также четко представлять себе, что при расчетах на устойчивость в отличие от расчетов на прочность предельное напряжение (здесь – критическое напряжение  $\sigma_{кр}$ ) зависит не только от материала бруса, но и его геометрических размеров, формы сечения, а также от способа закрепления концов.

В обоих случаях  $\lambda < \lambda_{пред}$  расчет стержня на продольный изгиб можно вести при помощи коэффициента понижения допускаемого напряжения на про-

стое сжатие. Расчетная формула имеет вид:

$F_{дон} = \varphi[\sigma]_{сж} \cdot A$  , коэффициент  $\varphi$  зависит от гибкости и материала стержня.

## 9.2 Практическая часть

**Задача 1.** Дано:  $F=300\text{кН}$ ;  $l=2,3\text{м}$ ;  $[\sigma]=160\text{МПа}$

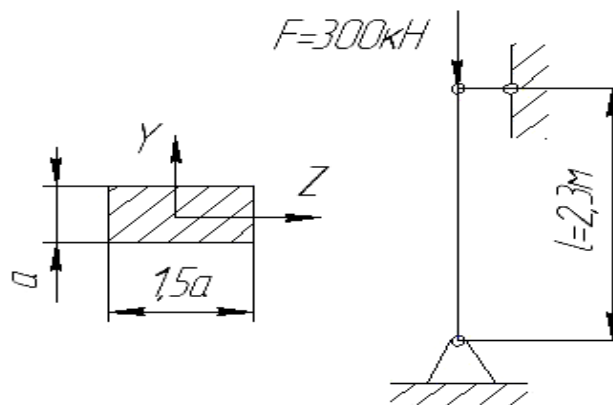


Рисунок 39- Схема нагружения стержня продольной силой F

Решение:

1 В первом приближении задаемся  $\varphi_1 = 0,5$  . Тогда из условия устойчивости:

$$\sigma = F / A \leq [\sigma_y] = \varphi_1 [\sigma]$$

находим:

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0.5 \cdot 160 \cdot 10^2} = 37,5 \text{ см}^2$$

Площадь сечения

$$A = 1,5a \cdot a = 1,5a^2$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{1,5}} = 5 \text{ см}$$

2 Проверим устойчивость принятого сечения стержня

Определим общую длину стержня

$$l_0 = \mu l = 2,3 \cdot 1 = 2,3 \text{ м}$$

Где  $\mu = 1$  - для данного вида закрепления стержня.

Определим момент инерции сечения относительно оси Z:

$$J_Z = \frac{1,5a \cdot a^3}{12} = 78,125 \text{ см}^4$$

Определим момент инерции сечения относительно оси Y:

$$J_Y = \frac{(1,5a)^3 \cdot a}{12} = 175,78 \text{ м}^4$$

Определим радиусы инерции сечения

$$i_Z = \sqrt{\frac{J_Z}{A}} = \sqrt{\frac{78,125}{37,5}} = 1,44 \text{ см}$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{A}} = \sqrt{\frac{175,78}{37,5}} = 2,16 \text{ см}$$

Определим гибкость стержня относительно осей Z и Y

$$\lambda_Z = \frac{l_0}{i_Z} = \frac{230}{1,44} = 159,72$$

$$\lambda_Y = \frac{l_0}{i_Y} = \frac{230}{2,16} = 106,48$$

Для наибольшего значения гибкости  $\lambda_Z = 159,72$  определим коэффициент

$$\varphi = 0,27$$

Определим расчетное напряжение в сечении

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,27 \cdot 37,5 \cdot 10^2} = 296,3 > [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Стержень перегружен

Принимаем во втором приближении среднее значение

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_{\text{табл}}}{2} = \frac{0,5 + 0,27}{2} = 0,385$$

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,385 \cdot 160 \cdot 10^2} = 48,7 \text{ см}^2 \quad a = \sqrt{\frac{A}{1,5}} = 5,69 \text{ см}$$

$$J_z = \frac{1,5a \cdot a^3}{12} = 131,76 \text{ см}^4$$

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = 1,64 \text{ см}$$

$$\lambda_z = \frac{l_0}{i_z} = \frac{230}{1,64} = 139,8$$

Для наибольшего значения гибкости  $\lambda_z = 139,8$  определим коэффициент  $\varphi = 0,35$

Определим расчетное напряжение в сечении

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,35 \cdot 48,7 \cdot 10^2} = 176 > [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Стержень перегружен

Принимаем в третьем приближении среднее значение

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_{\text{табл}}}{2} = \frac{0,385 + 0,35}{2} = 0,37$$

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,37 \cdot 160 \cdot 10^2} = 50,67 \text{ см}^2 \quad a = \sqrt{\frac{A}{1,5}} = 5,8 \text{ см}$$

$$J_z = \frac{1,5a \cdot a^3}{12} = 142,66 \text{ см}^4$$

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}} = 1,68 \text{ см}$$

$$\lambda_z = \frac{l_0}{i_z} = \frac{230}{1,68} = 137$$

Для наибольшего значения гибкости  $\lambda_z = 135$  определим коэффициент  $\varphi = 0,365$

Определим расчетное напряжение в сечении

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,365 \cdot 50,67 \cdot 10^2} = 162 > [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Перегруз равен  $\frac{162 - 160}{162} \cdot 100\% = 1,2\%$  что допустимо

Окончательно принимаем  $a = 5,8$  см.

Найдем критическое значение силы

$$F_{кр} = \sigma \varphi A = 0,365 \cdot 50,67 \cdot 10^2 \cdot 162 \cdot 10^{-3} = 299,6 \text{ кН}$$

Коэффициент запаса

$$n = \frac{F_{кр}}{F} = 0,998$$

**Задача 2.** Стальной стержень длиной  $\ell = 2,3$  м сжимается силой  $P = 300$  кН. Условия закрепления стержня и форма его поперечного сечения показаны на рисунке 40.

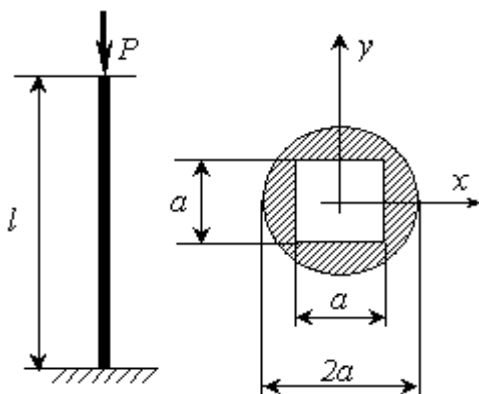


Рисунок 40 - Условия закрепления стержня и форма его поперечного сечения

Требуется найти:

- 1) размеры поперечного сечения стержня
- 2) величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости при допуске напряжении на сжатие  $\sigma = 160$  МПа.

### 9.3 Вопросы для самопроверки

- 1 В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
- 2 Какая сила называется критической?
- 3 По какой формуле находится величина критической силы?
- 4 Какая величина называется гибкостью стержня?
- 5 По какой формуле определяется критическое напряжение?
- 6 Чему равен коэффициент длины, для различных случаев закрепления

концов стержня?

7 В каких случаях можно пользоваться формулой Эйлера?

8 Как находится критическое напряжение для стержней малой и средней гибкости?

9 Как производится расчет стержней на устойчивость?

## **ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ И ДОМАШНИХ РАБОТ**

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы. Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице — по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

### **ЗАДАЧА 1 Проектный расчет бруса**

Для заданной расчетной схемы построить эпюру продольных сил и определить постоянные по участкам бруса площади квадратных поперечных сечений, округлив их значения до величин, кратных  $1\text{см}^2$ . Вычертить спроектированный брус и построить эпюру перемещений поперечных сечений в спроектированном брус, если  $E=0,8 \cdot 10^5$  МПа.

### **ЗАДАЧА 2 Проверочный расчет бруса**

Для заданной расчетной схемы, приняв значение  $q$  из задачи 1, выполнить проверочный расчет по участкам бруса. Указать недогрузку или перегрузку материала в %. Построить эпюру перемещений поперечных сечений бруса, если  $E=0,8 \cdot 10^5$  МПа.



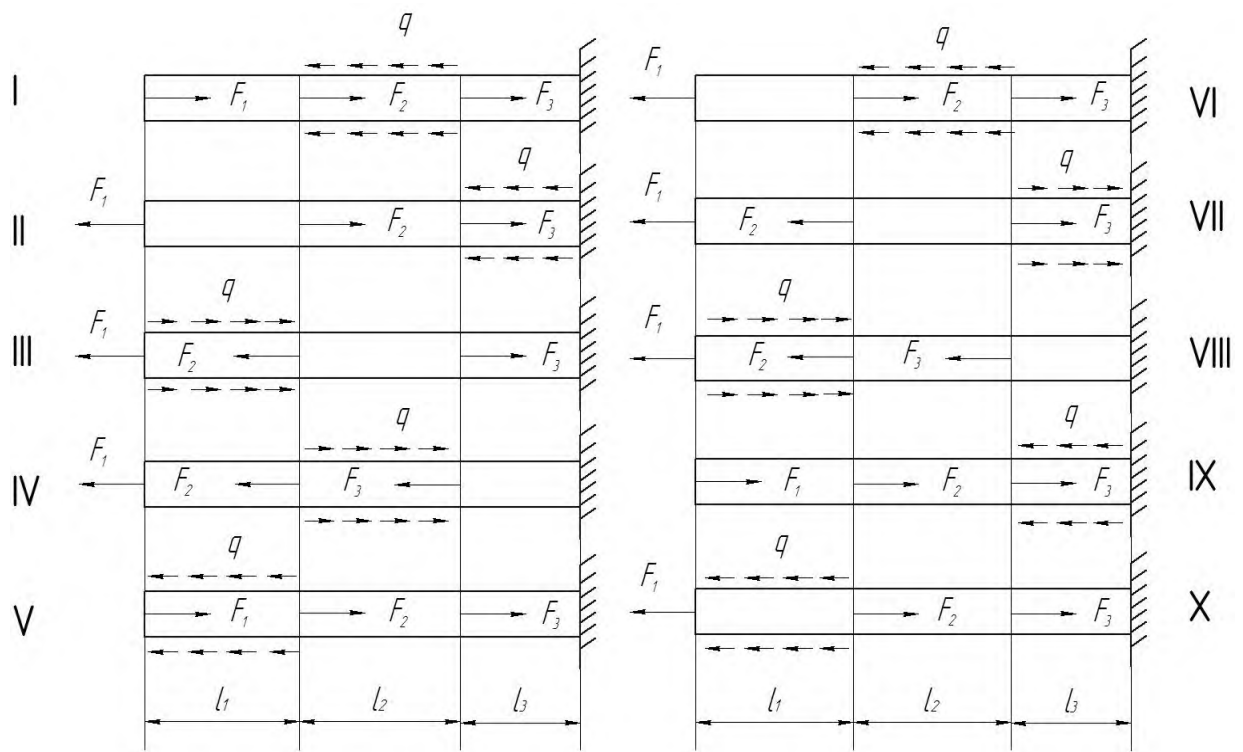


Рисунок 41 - Расчетная схема к задаче 1

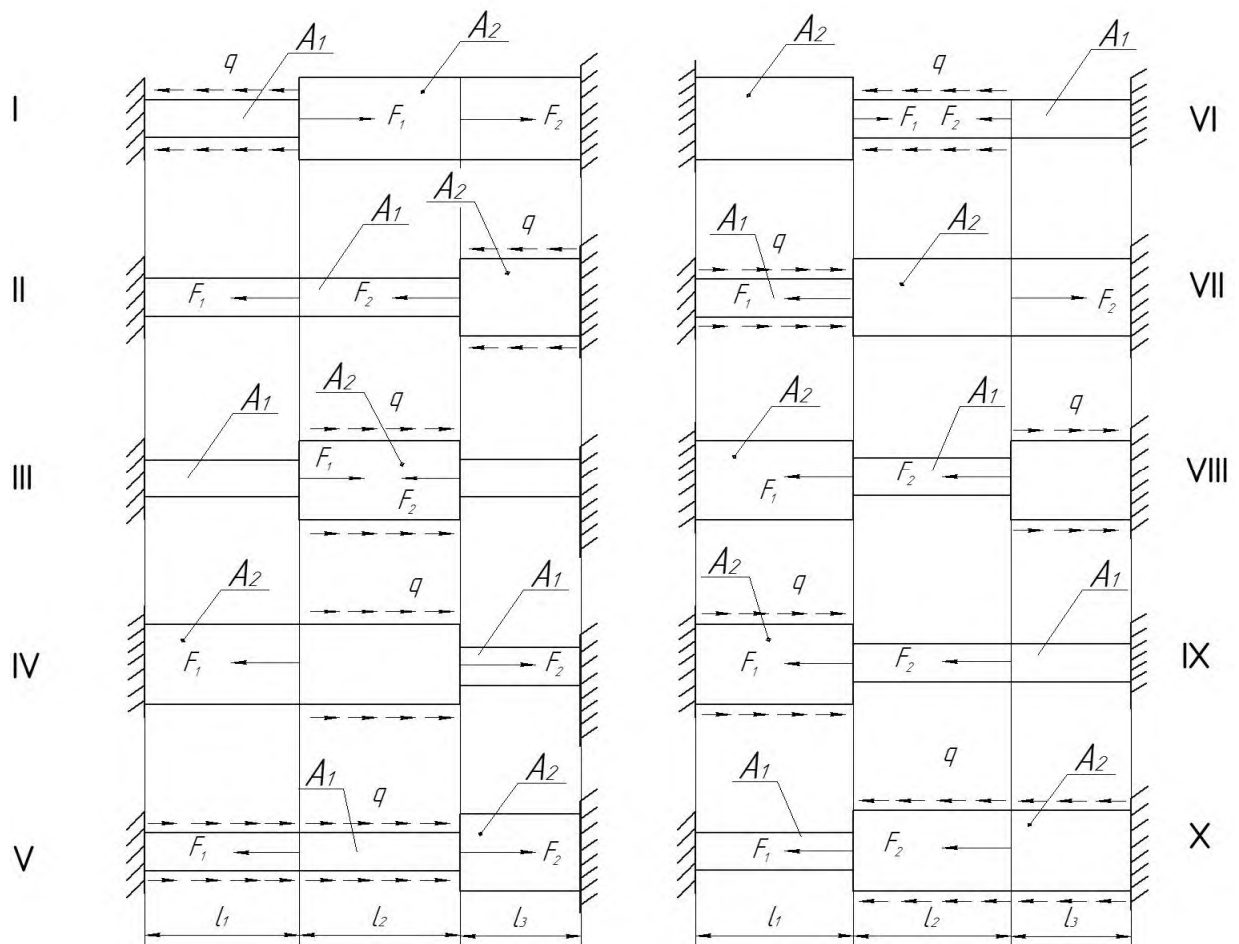


Рисунок 42 - Расчетная схема к задаче 2

Таблица 1 - Числовые значения к задачам 1 и 2

№ строки	К задачам 1 и 2					К задаче 1				К задаче 2			
	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$[\sigma]_p$	$[\sigma]_c$	$q$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$A_1$	$A_2$	$F_1$	$F_2$
	см			МПа		$\frac{кН}{м}$	кН			См <sup>2</sup>		кН	
1	20	20	20	40	100	100	20	20	20	5,0	20	$ql$	$ql$
2	30	30	30	50	110	110	30	30	30	5,0	20	$ql$	$ql$
3	40	40	40	60	120	120	40	40	40	5,0	20	$ql$	$ql$
4	50	50	50	70	130	130	50	50	50	5,0	20	$ql$	$ql$
5	60	60	60	80	140	140	60	60	60	10	20	$ql$	$ql$
6	20	20	20	40	100	-100	-20	-20	-20	10	25	$ql$	$ql$
7	30	30	30	50	110	-110	-30	-30	-30	10	25	$ql$	$ql$
8	40	40	40	60	120	-120	-40	-40	-40	15	25	$ql$	$ql$
9	50	50	50	70	130	-130	-50	-50	-50	15	25	$ql$	$ql$
0	60	60	60	80	140	-140	-60	-60	-60	15	25	$ql$	$ql$

### ЗАДАЧА 3 Расчет статически определимой балки

Для заданной расчетной схемы подобрать из сортамента по условию прочности заданный профиль сечения, если  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

Определить прогибы балки с веревине пролета и на ее свободном конце, если  $E = 2,0 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Проверить жесткость балки, если  $[f] = 0,001 \cdot l$ .

При необходимости подобрать новый заданный профиль сечения. Построить график упругой линии балки.

На рисунке 43 представлена расчетная схема к задаче 3.

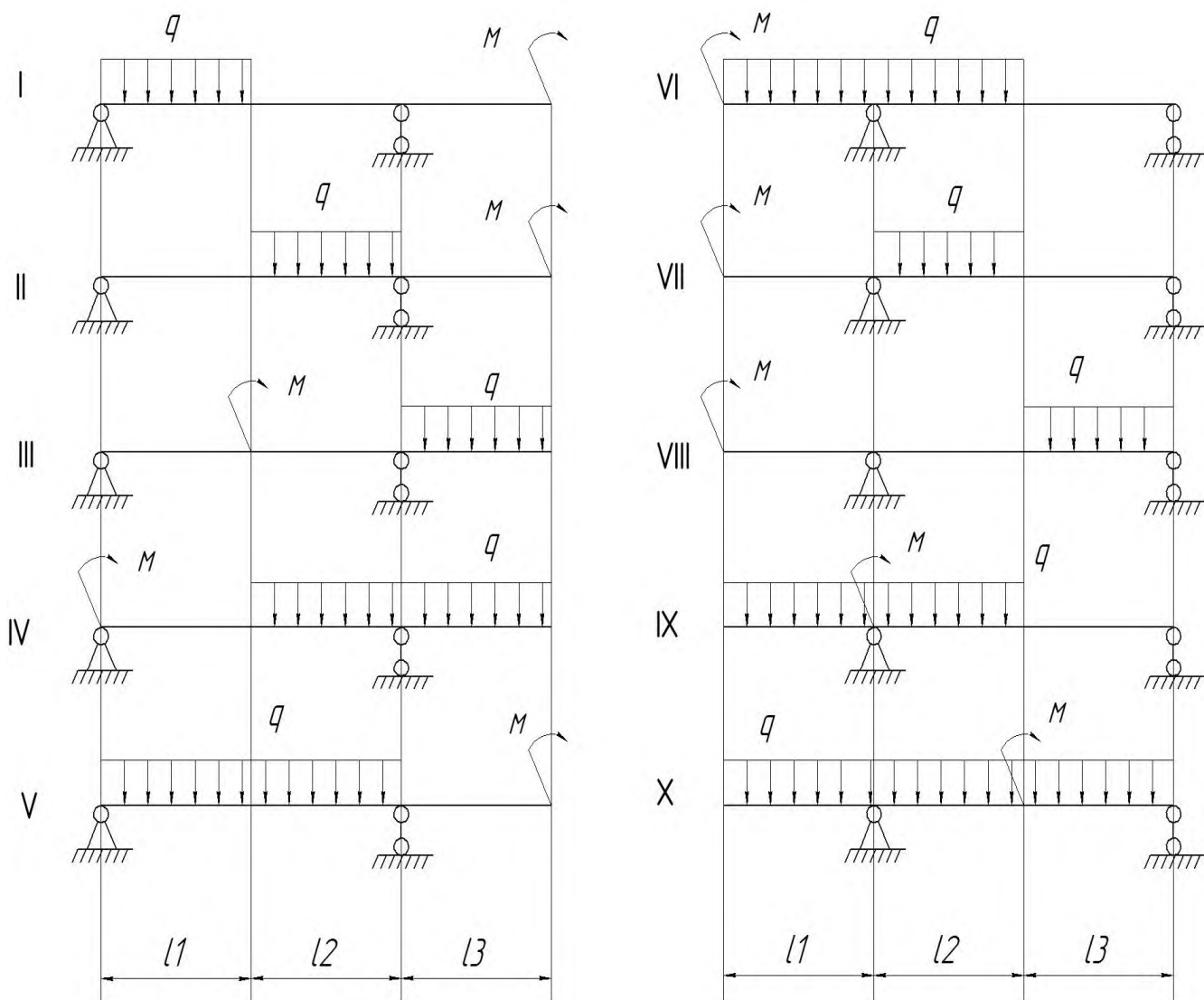


Рисунок 43 - Расчетная схема к задаче 3

Таблица 3 - Числовые значения к задаче 3

№ строки	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$q$	M	Вид сечения балки
	м			$\frac{кН}{м}$	$кН \cdot м$	
1	1,0	1,0	1,0	20	30	I
2	1,0	1,0	1,0	20	30	I
3	1,0	1,0	1,0	-20	-30	I
4	1,0	1,0	1,0	-20	-30	I
5	2,0	2,0	2,0	30	40	I
6	2,0	2,0	2,0	-30	-40	[
7	2,0	2,0	2,0	30	40	[
8	3,0	3,0	3,0	40	50	[
9	3,0	3,0	3,0	-40	-50	[
0	3,0	3,0	3,0	-40	-50	[

## ЗАДАЧА 4 Кручение бруса круглого сплошного поперечного сечения

Определить из расчета на прочность и жесткость диаметр бруса по участкам, если  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа. Из двух рассчитанных диаметров для каждого участка принять большее по величине и округлить их до значений стандартного ряда в мм: 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 32, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120 и далее через 20мм.

Начертить спроектированный ступенчатый брус, указать размеры и масштабы длины и диаметров.

Рассчитать абсолютные углы закручивания поперечных сечений бруса их эпюры.

На рисунке 44 представлена расчетная схема к задаче 4.

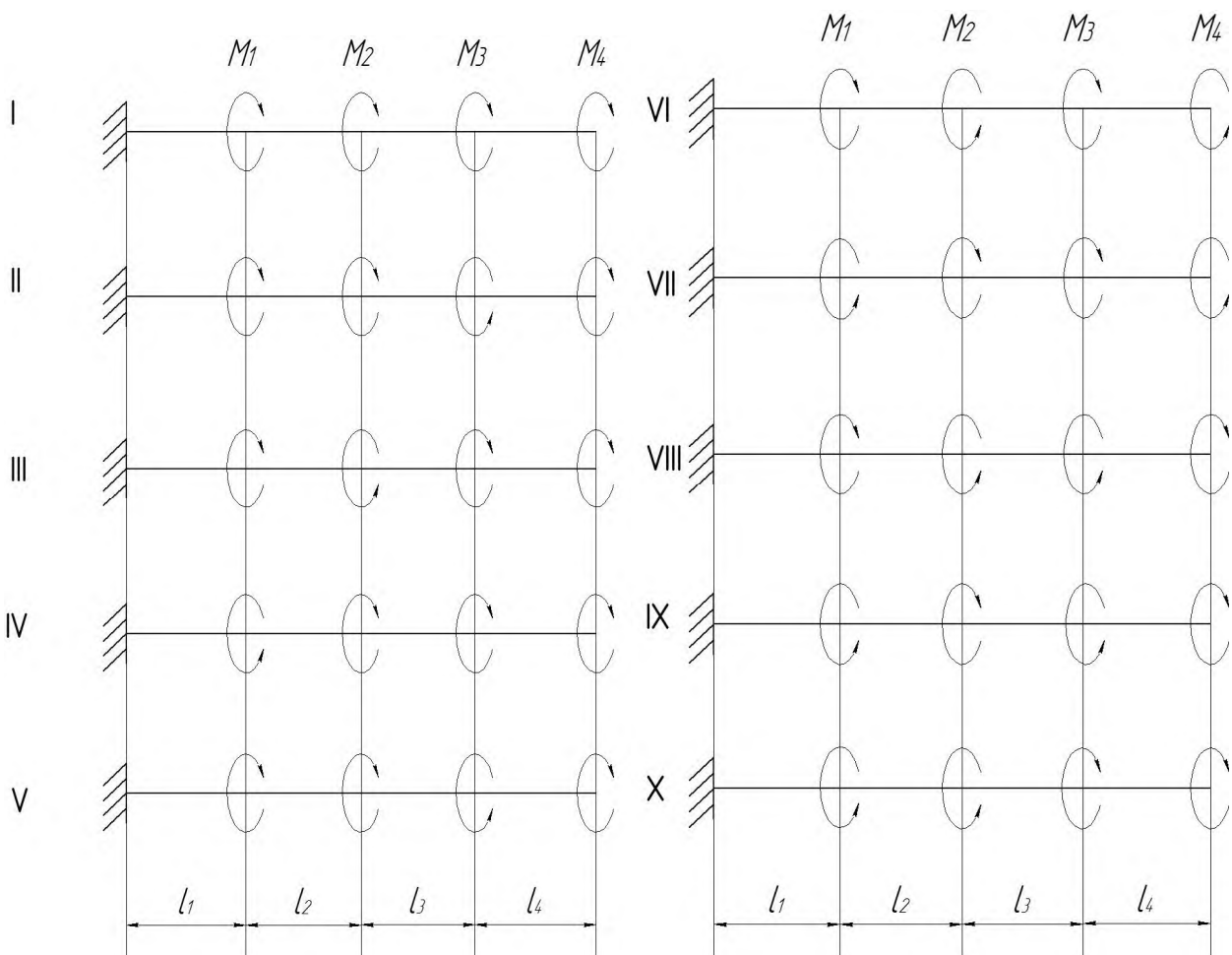


Рисунок 44 - Расчетная схема к задаче 4

Таблица 4 - Числовые значения к задаче 4

№ строки	Длина участка, м				Момент, $\kappa\text{H} \cdot \text{м}$				Допуск значений	
	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$[\tau]$ МПа	$[\theta]$ $\frac{\text{град}}{\text{м}}$
1	0,1	0,4	0,2	0,3	1,1	1,1	2,0	0,6	50	0,5
2	0,2	0,5	0,3	0,4	1,2	1,2	1,9	0,7	60	0,6
3	0,3	0,1	0,4	0,5	1,3	1,3	1,8	0,8	70	0,7
4	0,4	0,2	0,5	0,4	1,4	1,4	1,7	0,9	80	0,8
5	0,5	0,3	0,1	0,3	1,5	1,5	1,6	1,0	90	0,9
6	0,1	0,4	0,2	0,2	1,6	0,6	1,5	1,1	100	1,0
7	0,2	0,5	0,3	0,1	1,7	0,7	1,4	1,2	50	0,5
8	0,3	0,1	0,4	0,2	1,8	0,8	1,3	1,3	80	0,6
9	0,4	0,2	0,5	0,3	1,9	0,9	1,2	1,4	70	0,7
0	0,5	0,3	0,1	0,4	2,0	1,0	1,1	1,5	60	0,8

### ЗАДАЧА 5 Расчет вала на кручение с изгибом

Для заданной расчетной схемы вычислить величину скручивающего момента  $M_1$  из условия равновесия вала и рассчитать диаметр ступенчатого вала по участкам по III или IV теории прочности, принять  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ . округлить полученные размеры диаметров вала до стандартных значений (мм): 32, 36, 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80, 90, 100, 120 и далее через 20мм и вычертить в масштабе вид ступенчатого вала.

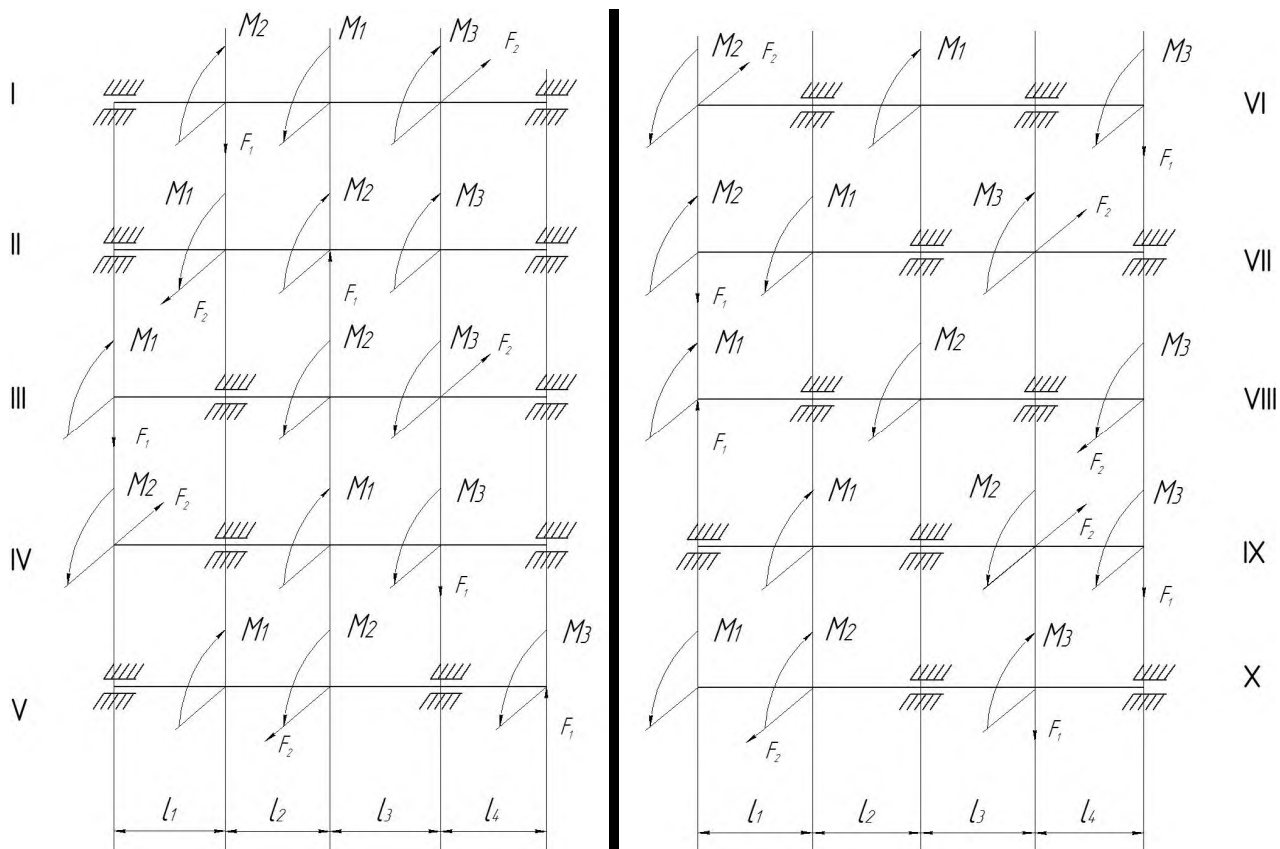


Рисунок 45 - Расчетная схема к задаче 5

Таблица 4 - Числовые значения к задаче 5

№ строки	Геометрические размеры				Нагрузки				Теория прочности
	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$F_1$	$F_2$	$M_2$	$M_3$	
	см				кН		кН·м		
1	50	50	50	50	2,0	2,0	1,0	1,0	3
2	60	60	60	60	3,0	3,0	2,0	2,0	3
3	70	70	70	70	4,0	4,0	3,0	3,0	3
4	80	80	80	80	5,0	5,0	4,0	4,0	3
5	90	90	90	90	6,0	6,0	5,0	5,0	3
6	50	50	50	50	2,0	2,0	1,0	1,0	4
7	60	60	60	60	-3,0	-3,0	2,0	2,0	4
8	70	70	70	70	-4,0	-4,0	3,0	3,0	4
9	80	80	80	80	-5,0	-5,0	4,0	4,0	4
0	90	90	90	90	-6,0	-6,0	5,0	5,0	4

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Архангельский, А.В. Сопротивление материалов: Учеб. пособие для упражнений. Ч.1, 2/ А.В. Архангельский. -М.: МИСиС, 1976,-127с.
- 2 Архангельский, А.В. Сопротивление материалов: Практикум. / А.В. Архангельский. -М.: - изд.2-е. МИСиС, 2001-177с.
- 3 Ицкович, Г.М. Сопротивление материалов: Учеб. пособие. / Г.М. Ицкович. - М.: Высш. шк., -9-е изд., стер. 2001. -368с.
- 4 Ицкович, Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов/ Л.С. Минин, А.И. Винокуров. - М.: Высш. шк., 3-е изд., перераб. и доп. -2001.-592 с.
- 5 Костенко, Н.А. Сопротивление материалов. Учеб. Пособие / С.В. Балясникова, Ю.Э. Волошановская [и др.]. -М.: Высш. Шк., 2000.-430с.
- 6 Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: Учеб. Для вузов. -М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана -10-е изд., перераб. и доп., 2001. -592с.
- 7 Эрдеди, А.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов. Учеб пособие. / А.А.Эрдеди, Н.А. Эрдеди -4-е изд., перераб. и доп.-М.: Высш.шк.; Издательский центр "Академия",2001.-318с.

**ТАТЬЯНА ВЛАДИМИРОВНА СТЕПЫКО**

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Методическое пособие для проведения практических занятий

Для студентов направлений: 150400 «Металлургия»;  
151000 «Технологические машины и оборудование»;  
140100 «Теплоэнергетика и теплотехника»;  
240100 «Химическая технология»;  
140400 «Электроэнергетика и электротехника»;  
очной и заочной форм обучения

---

Подписано в печать 22.10.2014

Формат 60x90  $\frac{1}{16}$

Печать офсетная

Уч.-изд.л. 6,0

Рег.№ 46

Тираж 100 экз.

---

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС» Новотроицкий филиал  
462359, Оренбургская обл., г. Новотроицк, ул. Фрунзе, 8.  
E-mail: [nfmisis@yandex.ru](mailto:nfmisis@yandex.ru)